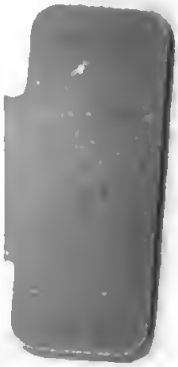

15. 4. 568

15. 4. 563

Lehrbuch

der

Perſpective

für

bildende Künſtler.

Von

Otto Gennerich.

Mit 101 in den Text eingedruckten Holzſchnitten

und

einem Atlas, 28 lithographirte Tafeln enthaltend.

Leipzig:

F. A. Brockhaus.

1865.

Digitized by Google

Lehrbuch der Perspective.

Lehrbuch

der

Perſpective

für

bildende Künſtler.

Von

Otto Gennerich.

Mit 101 in den Text eingedruckten Holzſchnitten

und

einem Atlas, 28 lithographirte Tafeln enthaltend.

Leipzig:
F. A. Brockhaus.

1865.

Vorwort.

Nachdem für die Perspective, als einen der bildenden Kunst dienenden Zweig der angewandten Mathematik, durch Aufstellung des dem Wesen dieser Wissenschaft durchweg entsprechenden, directen Constructionsverfahrens gewissermaßen der wissenschaftliche Abschluß gefunden, wie dies nach dem schon um die Mitte des vorigen Jahrhunderts erfolgten Erscheinen von J. H. Lambert's «Perspective affranchie de l'embarras du plan géométral» wohl anzunehmen ist, kann ein neu erscheinendes Lehrbuch desselben Gegenstandes nicht Neues im strengeren Sinne des Wortes bieten wollen. Für den der Sache Kundigen zumal finden sich in dem erwähnten, an sich so wenig umfangreichen Werke die Grundlagen zu den weitestgehenden Nutzanwendungen so vollständig, daß ihm jedes Wort mehr überflüssig erscheinen muß. Das Unternehmen einer neuen Bearbeitung der in Rede stehenden Disciplin kann deshalb wohl nur eine andere Rücksicht rechtfertigen. Als eine solche wird man unbedenklich die Rücksicht auf den Lernenden gelten lassen. Aus einer wesentlich auf die Darlegung der Grundzüge einer Wissenschaft abzielenden Schrift ist selbst der begabtere Schüler nicht im Stande, die ihm für den Augenblick der

Anwendung nützlichen Elemente herauszuerkennen und daraus die Antworten auf seine Bedenken zu lesen; ihm muß ein Rathgeber, welcher die in verschiedenen einzelnen Fällen auftretenden Schwierigkeiten vorhersieht und ihm bei deren Lösung die Anwendung jener Grundzüge zeigt, so lange willkommener als der erste Aufsteller derselben sein, bis er selbst zu den Kundigen zählt.

In dieser Ansicht glaubte der Verfasser des vorliegenden Werkes die äußere Rechtfertigung seiner literarischen Bemühungen in dieser Richtung überhaupt zu finden. Die einzelnen Werke der seit dem vorigen Jahrhundert angewachsenen, die Perspective betreffenden Literatur schienen ihm vollends eher Momente der Ermuthigung zu seinem Unternehmen, als Anlaß zu Bedenken dagegen darzubieten.

Was in diesen Werken bisher auch Verdienstliches geleistet worden, so schienen dem Verfasser bei dem einen methodische Einseitigkeit oder Eingeschränktheit in dem angerathenen Verfahren, bei dem andern entweder gelehrte Wortknappheit an der unrechten Stelle, oder das bis zur Unrichtigkeit und Unverständlichkeit sich verirrende Bemühen, in der Unwissenschaftlichkeit des Ausdruckes und der Erörterung die Allgemeinverständlichkeit zu finden, bei noch anderen ein nicht lohnender Aufwand an blendenden und dabei unerklärt dargebotenen Constructionsproben, bei den meisten entweder der Mangel einer hinlänglich eingehenden Berücksichtigung der von der Linearperspective untrennbaren Luftperspective, oder eine Behandlung derselben nach veralteten Anschauungen — kurz, eine Fülle von besonders dem Schüler sehr fühlbaren Mängeln Veranlassung genug zu bieten, um seine eigenen, in vieljähriger Erfahrung Lernenden gegenüber gemachten Erfahrungen in der Bearbeitung des vorliegenden Stoffes zu versuchen. Er steht jedoch nicht an, hierbei dankbar hervorzuheben, wie förderlich seinen Bestrebungen der anregende Einfluß gewesen, welchen vordem der geistige Verkehr mit dem Lehrer an der hiesigen königlichen Akademie

der Künſte, Herrn Profeſſor K. Pohlke, und deſſen geiſtvolle Auffaſſungsweiſe des Gegenſtandes auf ihn und ſeine Anſchauungen geübt.

Was ſchon Lambert und ältere Autoren vor ihm beklagt und mit unverkennbarer Erregtheit bekämpft haben: die Nachläſſigkeit vieler Kunſtjünger im Studium der Perſpective, ſollte in einer Zeit, in welcher der Strebſame die Zugänge zur Wiſſenſchaft geebnet und geweitet vorfindet, füglich nicht mehr Gegenſtand des Vorwurfs ſein können. Nichtsdeſtoweniger begegnet man heutzutage noch hier und da ſogar der Meinung, daß der Genius die Feſſeln der Mathematik nicht vertrage, und weiſen auch auf den Kunſtausſtellungen nicht wenige und ſonſt nicht unbedeutende Gemälde und Basrelief-Sculpturen das Walten einer ähnlichen Meinung in den unzweideutigen Merkmalen jener behaglichen Feſſelloſigkeit deutlich genug auf. Die Anhänger dieſes Genius-Cultus ernüchtern zu wollen, iſt ein ſelten dankbares Unternehmen, da ſie zunächſt nicht mehr die erforderliche Ausdauer im Studium beſitzen und dann, bei der etwaigen Umkehr von dem ſüßgewohnten Taſten nach dem Rechten zu dem bewußten Schaffen, in der Regel in eine, der früheren Feſſelloſigkeit entgegengeſetzte widerliche Trockenheit und Abſichtlichkeit in ihren Schöpfungen verfallen. Günſtiger Erfolg von dem Rathe, das Studium der Perſpective mit allem Eifer aufzunehmen, iſt nur bei den Kunſtbefliſſenen zu erwarten, welche, von Erſtlingserfolgen noch nicht beirrt, unbefangen einſtweilen mehr dem Fleiße als dem Genie vertrauen.

Für Architekten, welche die Nothwendigkeit, den landſchaftlichen Eindruck von Bauprojecten in einer perſpectiviſchen Darſtellung derſelben vor ihrer Ausführung zu überſehen, auf das Studium der Perſpective ſelbſt hinweiſt, bedarf es der beſondern Empfehlung deſſelben nicht.

Die hier der Linearperſpective vorangeſchickte Optik darf nicht als der entbehrlichere Theil des Studiums betrachtet werden.

Abgesehen davon, daß Denjenigen, welche für das Auge schaffen, vorweg daran liegen muß, die Functionen desselben und das Wesen der durch den Gesichtssinn wahrnehmbaren subjectiven und objectiven Erscheinungen zu verstehen, dient die Befolgung der optischen Gesetze, welche von den Künstlern unter dem Namen der Luftperspective begriffen wird, der linearperspectivischen Construction erst zur Ergänzung, und hat die letztere keinen Werth, wo jene mit ihr in Widerspruch steht. Die wissenschaftlichen Ermittelungen auf diesem Gebiete gewähren, insofern sie das Verständniß der natürlichen Erscheinungen geben, für deren bildliche Darstellung so vollkommenen Anhalt, daß sie für den Künstler direct benutzbar sind. Es ist deshalb hier von dem andererseits mit wenig Glück gemachten Versuche, ihre besondere Anwendung auf die künstlerische Darstellung darzulegen, Abstand genommen worden. Was den Umfang und die Darstellungsart der Optik betrifft, so mußte es hier darauf ankommen, den neueren Anschauungen zu genügen, jedoch unter Verzichtleistung auf wissenschaftliches Entwickeln das dem künstlerischen Bedürfnisse entsprechende Maß zu treffen.

Trotz des ernstesten Bemühens hierbei, den Vortrag auch dem Standpunkte geringerer wissenschaftlicher Vorbildung anzupassen, erweist sich doch immer, sowohl hinsichtlich der Optik als insbesondere der Linearperspective, die Kenntniß der Elemente der Geometrie und der Methode des orthographischen Projicirens als unerläßliche Vorbedingung für das Verständniß.

In Bezug auf die Bearbeitung der Optik bekennt sich der Verfasser als zu aufrichtigem Dank verpflichtet gegen seinen lieben Freund, den Lehrer der Mathematik und Naturwissenschaften an der Gewerbschule zu Stralsund, Herrn Dr. F. Plettner, unter dessen treuem Beirathe Bedenken mannichfacher Art ihre Erledigung gefunden.

Was der Verfasser in anderen perspectivischen Lehrbüchern

meiſt vermißte: eine gründliche Anleitung bei der Wahl des Geſichtspunktes für bildliche Darſtellungen, bei der Orientirung der Natur gegenüber u. ſ. w., bieten im Allgemeinen das erſte Kapitel der Linearperſpective und ein, mehr auf das Bedürfniß des Malers eingehendes, dem Schluſſe angefügtes Beiſpiel.

In den im erſten Abſchnitte enthaltenen Conſtructionen mußte im Allgemeinen der von Lambert in ihren Grundzügen zuſammengeſtellten, förderlicheren Verſchwindungspunkt-Methode der Vorzug gegeben werden; nichtsdeſtoweniger ſind dabei doch, im Mißtrauen gegen ſtrenge Methodik, die in verſchiedenen Fällen durch dieſe ſelbſt gebotenen verſchiedenen, hin und wieder auch zu der vor Lambert üblichen Grundrißmethode zurückkehrenden Behandlungsarten vorgeführt worden. Der geſtellten Aufgabe gemäß ſind, insbeſondere bei der Auswahl der im ſechsten Kapitel enthaltenen Beiſpiele, alle diejenigen Conſtructionsübungen ausgeſchloſſen geblieben, welche den künſtleriſchen Zwecken nicht direct dienen; doch iſt aller verwickelteren Fälle gedacht worden. Die Hülfsconſtructionen, welche es ermöglichen, daß man die perſpectiviſche Conſtruction durchaus innerhalb der Grenzen der gewählten Bildfläche, ohne Benutzung außerhalb derſelben liegender Hülfspunkte, ausführen kann, und auf deren praktiſche Anwendung in einem neueren Werke das Hauptgewicht gelegt iſt, haben dem Verfaſſer eben nur als weniger weſentliche Hülfsmittel erſcheinen können. Denn da ein gewiſſenhafter Künſtler die Grenzen ſeiner Bildfläche überhaupt erſt nach der Conſtruction der Perſpective ihres Inhaltes definitiv feſtzuſtellen vermag, iſt er ſchon dadurch in dem Falle, die Conſtruction zuvor auf einer andern als der eigentlichen Bildfläche vornehmen zu müſſen, und hat er es dabei in der Hand, durch Ausführung derſelben in kleinerem Maßſtabe einem großen Theile jener keineswegs ſchwer aufzufaſſenden, wohl aber außerordentlich umſtändlichen Hülfs-

conſtructionen aus dem Wege zu gehen. Eigentliche Schwierigkeiten, zu deren Ueberwindung der Anfänger der Anleitung bedarf, bietet nur die Inangriffnahme der Conſtruction und die Wahl des nächſtliegenden und ſicherſten unter den mancherlei dabei einzuſchlagenden Wegen. Hierin den Lernenden anzuleiten, ihm aber für die Fälle, in welchen jene Hülfsconſtructionen unvermeidlich ſind, den ganzen Vorrath derſelben (Kapitel 5 und 24) zur Verfügung zu ſtellen und deren Anwendung an geeigneten Beiſpielen zu zeigen, erſchien dem Verfaſſer die zweckmäßigere Art der Löſung der Aufgabe eines Lehrbuches.

Mit der Ausführlichkeit in der Behandlung der Conſtructionen ſchiefer Objecte (erſter Abſchnitt, B) iſt es insbeſondere darauf abgeſehen, das Verſtändniß der Conſtructionsmittel zu vervollkommnen. Neben den hierbei nöthigſten Beiſpielen boten die Conſtructionen der Spiegelbilder (ſechster Abſchnitt), bei welchen deshalb auch gekrümmte Spiegel Berückſichtigung gefunden haben, ein vortreffliches Material zu ebendahin gehörigen und übrigens an ſich ſelbſt lehrreichen Beiſpielen. Wer dem Studium dieſer Abſchnitte ausweichen wollte, weil ihr Inhalt auf den erſten Blick ſeltener praktiſch verwerthbar erſcheint, verkennt die beſte Gelegenheit zur Stärkung des Vorſtellungsvermögens und zur Uebung in der Handhabung der Conſtructionsmittel.

In dem dem Lehrbuche beigefügten Atlas ſind auf 28 lithographirten Tafeln neben einer Anzahl Figuren, welche, die Entwickelungen der Regeln erläuternd, wegen ihrer größeren Ausdehnung nicht, wie ein anderer Theil derſelben Figurengattung, in den Text eingedruckt dargeboten werden konnten, die den Beiſpielen entſprechenden Conſtructionen vorgeführt. Es wird für das Studium des Werkes von nachhaltigerem Erfolge ſein, wenn dieſelben nicht blos gelegentlich eingeſehen, ſondern größerentheils unter Annahme kleiner Veränderungen, etwa in der Orientirung der Bildebene und des Geſichtspunktes, nachconſtruirt werden. Die in dieſen

Conſtructionen, den gegebenen Regeln zuwider, meiſt zu kurz angenommene Diſtanz wird den Studirenden nicht irreleiten, wenn er erwägt, daß nur auf dieſem Wege die Conſtructionslinien und -Punkte hinlänglich weit aus einander zu rücken waren, um das Verfahren verſtändlich darlegen zu können. Nachdem er hierdurch den Gang der Conſtruction und gerade durch die Uebertreibung den Charakter der unvermeidlichen perſpectiviſchen Verzerrung nur deſto ſicherer aufgefaßt hat, wird ihm die Befolgung der Mahnung, ſich bei der praktiſchen Anwendung des Gelernten ſtreng an die im erſten Kapitel hinſichtlich der Diſtanz gegebenen Regeln zu binden, nirgend Schwierigkeit machen.

Die Anordnung des Stoffes ergab ſich aus der durch die Verſtändlichkeit bedingten Folgerichtigkeit ſeiner Theile von ſelbſt. Die Terminologie iſt mit geringen Abweichungen die durch den mündlichen Unterricht und das Lehrbuch des verſtorbenen, um die Perſpective und ihre didaktiſche Behandlung hochverdienten Profeſſor Hummel*) üblich gewordene.

Schließlich glaubt der Verfaſſer noch ausſprechen zu müſſen, daß die Ausführlichkeit der Erörterung und die hin und wieder dabei vorkommenden Wiederholungen auf mehr als einer Nachgiebigkeit gegen ſeine Eigenthümlichkeit beruhen. Mancherlei autodidaktiſche Bemühungen haben ihm die Wahrnehmung aufgedrängt, daß die Autoren von Lehrbüchern, im Hinblick auf die Anſchauungen eines Eingeweihten und deſſen Kritik, es häufig hintanſetzen, den vielen, und einem Lehrer meiſt vorher bekannten, Zweifeln und Bedenken eines Lernenden vornehmlich gerecht zu werden und möglichen Mißverſtändniſſen lieber durch größere Ausführlichkeit und allenfalls durch Wiederholungen vorzubeugen. Dieſen Fehler zu vermeiden, gebot hier außerdem ſchon die Rückſicht

*) „Die freie Perſpective für Maler und Architekten“ (Berlin 1824).

auf den ungleichen wissenschaftlichen Standpunkt der Jünger der Kunst.

Ob die gewählte äußere Form dem Bedürfnisse wirklich entspreche, ob endlich in der vollendeten Arbeit die beim Beginn derselben ins Auge gefaßten Ziele erreicht vorliegen, sind Fragen, deren Beantwortung von der Zukunft erwartet werden muß. Möchte die freudig aufgewandte Mühe in jedem Falle wenigstens dazu beitragen, die Kunstbeflissenen mehr und mehr für das eifrige Studium der Wissenschaft zu gewinnen, deren Strenge ihnen die Corrective gegen die Mängel der freien Auffassung an die Hand giebt.

Berlin, im November 1864.

Der Verfasser.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniß.

Seite

Vorwort V
Einleitung 1

Erste Abtheilung.
Luftperspective.

Optik 7

Erstes Kapitel. Das Licht.

a) Allgemeines 7
b) Stärke der Erleuchtung 9
c) Reflexion des Lichtes 13
d) Brechung oder Refraction des Lichtes 21
e) Farbe 31
f) Interferenz und Inflexion (Beugung) des Lichtes 42
g) Polarisation des Lichtes 46

Zweites Kapitel. Das menschliche Auge.

a) Die Camera obscura 48
b) Das Auge 51
c) Bedingungen des deutlichen Sehens 59
d) Das Sehen mit beiden Augen 65
e) Beurtheilung der Entfernung und Größe der Objecte 70

Zweite Abtheilung.

Linearperſpective.

Seite

Erſtes Kapitel. Allgemeine Erklärungen, Annahmen und Benennungen . . 77

Erſter Abſchnitt.

Conſtructionen auf der lothrechten ebenen Bildfläche.

A. Conſtruction der Perſpectiven von lothrechten und horizontalen Objecten.

a. Geradlinige geometriſche Figuren und Körper, welche von ebenen lothrechten und horizontalen Flächen begrenzt ſind.

Zweites Kapitel. Perſpectiven lothrechter und horizontaler Linien . . . 101
Drittes Kapitel. Perſpectiven horizontaler und lothrechter Ebenen . . . 114
Viertes Kapitel. Perſpectiven gegebener Strecken auf horizontalen und lothrechten Linien. — Der Theilpunkt 121
Fünftes Kapitel. Hülfsconſtructionen.
A. Die Diſtanzpunkte außerhalb der Conſtructionsfläche 133
B. Der herabgeſchlagene Geſichtspunkt liegt außerhalb der Conſtructionsfläche 135
C. Die Perſpective des Verſchwindungspunktes liegt außerhalb der Conſtructionsfläche 140
D. Der Theilpunkt liegt außerhalb der Conſtructionsfläche 154
Sechstes Kapitel. Beiſpiele 157
Siebentes Kapitel. Nachträgliche Ermittelung der zur Conſtruction erforderlichen Hülfspunkte u. dgl. aus dieſer ſelbſt . . 201

b. Krummlinige geometriſche Figuren und Körper, welche von krummen Flächen begrenzt ſind.

Achtes Kapitel. Perſpectiven krummer Linien 210
Neuntes Kapitel. Beiſpiele. Perſpectiven von Körpern, welche von krummen Flächen begrenzt ſind 219

B. Conſtruction der Perſpectiven von ſchiefen Objecten.

Zehntes Kapitel. Perſpectiven ſchiefer Linien und Ebenen 249
a) Lothrecht-ſchiefe Ebenen 251
b) Andere einfach-ſchiefe Ebenen 253
c) Doppelt-ſchiefe Ebenen 261
Elftes Kapitel. Beiſpiele 268
d) Ebenen, welche ſchief zu ſchiefen Ebenen ſind 272
e) Schnittlinien ſchiefer Ebenen 274

Zweiter Abſchnitt.

Zwölftes Kapitel. Conſtructionen auf der horizontalen ebenen Bildfläche . . . 294

Dritter Abſchnitt.

Seite

Dreizehntes Kapitel. Conſtructionen auf der ſchiefen ebenen Bildfläche. . . . 296

Vierter Abſchnitt.

Conſtructionen auf der gekrümmten Bildfläche.

Vierzehntes Kapitel. Das Panorama 299
Funfzehntes Kapitel. Das Kuppelbild 307

Fünfter Abſchnitt.

Conſtruction der Perſpectiven der Schattengrenzen.

Sechzehntes Kapitel. Allgemeines 308
Siebzehntes Kapitel. Conſtructionen 317
Achtzehntes Kapitel. Die künſtliche Flamme 322
Neunzehntes Kapitel. Sonnen- und Mondlicht 335
a) Die Sonne im Horizonte 336
b) Die Sonne im Zenithe 336
c) Die Sonne in der verlängerten Bildebene 337
d) Die Sonne hinter der Bildebene 344
e) Die Sonne vor der Bildebene 350
Zwanzigſtes Kapitel. Atmoſphäriſches Licht 356
Einundzwanzigſtes Kapitel. Conſtruction der Schattenperſpectiven auf der horizontalen ebenen Bildfläche 364
Zweiundzwanzigſtes Kapitel. Conſtruction der Schattenperſpectiven auf der ſchiefen ebenen Bildfläche 366
Dreiundzwanzigſtes Kapitel. Conſtruction der Schattenperſpectiven auf der cylindriſch gekrümmten (Panorama-) Bildfläche 367
Vierundzwanzigſtes Kapitel. Hülfsconſtructionen 370

Sechster Abſchnitt.

Conſtruction der Perſpectiven der Spiegelbilder.

Fünfundzwanzigſtes Kapitel. A. Ebene Spiegel 374
Sechsundzwanzigſtes Kapitel. Conſtruction der Spiegelbilder der Schatten 393
Siebenundzwanzigſtes Kapitel. B. Gekrümmte Spiegel 393
Achtundzwanzigſtes Kapitel. a) Convexe Spiegel 396
Neunundzwanzigſtes Kapitel. b) Concave Spiegel 413
Dreißigſtes Kapitel. Anleitung zur Berichtigung der Perſpective in einer Skizze und zur Verwendung der letzteren bei der Conſtruction der Perſpective im ausgeführten Bilde ſelbſt 423
Tabelle der Winkel-Tangenten 431
Regiſter zur erſten Abtheilung 433
Regiſter zur zweiten Abtheilung 434

Einleitung.

Der dem Menſchen inwohnende Trieb, ſinnlich Wahrgenommenes, Empfundenes oder Gedachtes Anderen mitzutheilen, findet verſchiedene Mittel, ſich zu äußern. Entweder dienen ihm hierzu Sprache, oder Töne, oder Geberden, oder bildliche Darſtellungen. Geſchieht die Anwendung dieſer Mittel auf eine wahre und zugleich ſchöne Weiſe, ſo iſt ſie Kunſt, und gehört je nach der Art der Mittel dem Gebiete der Poeſie, oder der Muſik, oder der Schauſpielkunſt, oder dem der ſogenannten bildenden Künſte an.

Um der Aufgabe dieſer Blätter nahe zu bleiben, ſehen wir von einem Eingehen auf das Weſen der Kunſt im Allgemeinen ab und faſſen nur die letztgenannten Künſte, welche die Malerei, die Sculptur und die Architektur in ſich begreifen, ins Auge. Es leuchtet ein, daß dieſe ihre Typen ausſchließlich dem ſinnlich Wahrnehmbaren entlehnenden Künſte vor allen anderen der Beſtimmtheit und Gediegenheit des Ausdruckes bedürfen, da ihre Erzeugniſſe nicht allein vor den Sinnen des Beſchauers ruhend verweilen und nur allmählich auf ſeine Vorſtellung wirken, ſondern auch, was weſentlich die Schöpfungen der Malerei und Sculptur betrifft, die Aufgabe haben, eine ganze Reihe von Momenten in einen einzigen ausführlich beſchreibend zuſammenzufaſſen.

Obgleich den beiden anderen Künſten nahe verwandt, nimmt doch die Architektur eine etwas geſonderte Stellung ein, weil ſie nicht beſchreibend, ſondern erfindend und conſtruirend verfährt. Jene beiden haben die Darſtellung des Schönen mit den ihnen eigenthümlichen Mitteln zum Zweck, dieſe bedient ſich des Schönen, um einen materiellen Zweck in ſchöner Form zu verwirklichen.

Von den beiden obengenannten Erforderniſſen eines Kunſtwerkes, der Schönheit und der Wahrheit — womit hier die abſolute äußerliche, nicht die poetiſche Wahrheit gemeint iſt — läßt ſich die erſtere nicht lehren, kaum definiren. Obgleich dem Eindrucke des Schönen Jeder mehr oder weniger zugänglich iſt, ſo können das Weſen und die Bedingungen der Schönheit doch nur nach einer durch Anſchauen und Vergleichen edler Vorbilder ſelbſtvollbrachten Läuterung des Gefühls erkannt werden.

Das andere Erforderniß, die Wahrheit, läßt ſich definiren und lehren. Die Wahrheit eines Werkes der bildenden Kunſt iſt die Uebereinſtimmung ſeines Eindruckes auf die menſchliche Empfindung mit dem Eindrucke des natürlichen Vorbildes ſelbſt.

Um die Bedingungen dieſer Uebereinſtimmung erfüllen zu können, reicht nicht die techniſche Befähigung allein des Künſtlers aus; es muß ihr vielmehr die Vertrautheit mit gewiſſen Zweigen des Wiſſens, ohne welche ſie nie den erſchöpfenden Ausdruck zu finden vermag, zur Seite ſtehen. Als die vornehmlichſten unter dieſen ſind folgende hervorzuheben:

1) Anſchauen, Beobachten und Vergleichen der natürlichen Gegenſtände haben zur Erkenntniß gewiſſer Normen und Geſetze in ihrer Bildung geführt, welche verſchiedenen Wiſſenſchaften als Grundlage dienen. Mit dieſen muß ſich der ſelbſtändig ſchaffende Künſtler wenigſtens theilweiſe bekannt gemacht haben, wenn er zuvörderſt die Beſchaffenheit und die Formen ſeiner Vorbilder ſelbſt verſtehen und in ſeine Vorſtellung überhaupt richtig aufnehmen will. Dahin gehört z. B. die Kenntniß des Baues des menſchlichen Körpers, der Anatomie der Thiere, der Botanik u. ſ. w.

2) Da ferner jeder natürliche Gegenſtand anders erſcheint, als er iſt, bedarf es für den Künſtler ſowohl des Verſtändniſſes

der aus der räumlichen Beziehung ſeines Auges zu ſeinem Vorbilde hervorgehenden ſcheinbaren Veränderungen des letzteren, als auch der Kenntniß derjenigen Veränderungen, welche das Licht in der Erſcheinung der natürlichen Vorbilder theils wirklich, theils vermöge ſeiner Einwirkung auf das Auge nur ſcheinbar hervorbringt; alſo überhaupt der Geſetze der ſinnlichen Wahrnehmung mittels des Auges.

Die Wiſſenſchaft, welche dieſes Verſtändniß darbietet, iſt die Optik; der Theil jedoch ihrer Geſetze, welcher ſpeciell auf die bildliche Darſtellung anwendbar iſt, wird unter Künſtlern gewöhnlich mit dem Namen der Luftperſpective bezeichnet, würde jedoch paſſender Lichtperſpective heißen.

3) Endlich iſt es erforderlich, daß der Künſtler die Regeln kenne, deren Befolgung die bildliche Darſtellung der vollen körperlichen Form auf einer Fläche dem Auge natürlich erſcheinen läßt. Dieſe Regeln lehrt die Linearperſpective; zur Unterſcheidung von der Luftperſpective ſo genannt, weil ſie, ein Zweig der darſtellenden Geometrie, ſich weſentlich auf die mathematiſche Conſtruction durch gerade Linien ſtützt und darauf abzielt, die ſcheinbaren Umriſſe der Objecte und ihrer Theile vermittelſt Linien auf der Fläche des Bildes zu bezeichnen.

Die Belehrung in den unter 2) und 3) erwähnten, dem Künſtler unentbehrlichen Wiſſenszweigen iſt als Aufgabe der beiden Abtheilungen des vorliegenden Werkes ins Auge gefaßt.

Erſte Abtheilung.

Luftperſpective.

Optik.

Unter den Sinnen, durch welche wir von dem Vorhandensein §. 1.
und der Beschaffenheit des außer uns Befindlichen eine Vorstellung bekommen, ist der Gesichtssinn, in dem Auge verkörpert, der am meisten thätige insofern, als er uns im wachenden Zustande auch ohne unsere besondere Willensthätigkeit ununterbrochen Eindrücke von der Außenwelt zuführt. Nächst dem Tastsinn ist er zugleich der zuverlässigste; durch ihn pflegen wir die Richtigkeit der mittels anderer Sinne gemachten Wahrnehmungen gewissermaßen zu controliren.

Wie alle anderen Sinne, um thätig zu sein, eine unmittelbare oder mittelbare körperliche Berührung mit dem Wahrgenommenen erfordern, so besteht auch für den Gesichtssinn keine andere als körperliche Vermittelung zwischen ihm und dem Wahrgenommenen. Sie wird hergestellt durch das Licht. Ohne dasselbe ist das Sehen unmöglich.

Erstes Kapitel.

Das Licht.

a) Allgemeines.

Um die Erscheinung des Lichtes zu erklären, nimmt man an, §. 2.
daß der Weltenraum und mehr oder weniger alle Körper von einem überaus feinen, unwägbaren, elastischen Mittel, dem Aether, erfüllt seien, und daß ein leuchtender Körper, als Ursache des Lichtes, den Aether in eine Bewegung versetze, welche sich durch ihn nach

allen Richtungen hin fortpflanzt. Diese Bewegung, nächst der des elektrischen Stromes die schnellste, besteht in außerordentlich feinen, wellenartigen Schwingungen, welche in Ebenen geschehen, die rechtwinklig zur Fortpflanzungsrichtung sind.

§. 3. Selbstleuchtende Körper sind: die Sonne, die Fixsterne, glühende, elektrische, phosphorescirende und durch Insolation, d. h. dadurch leuchtend gewordene Körper, daß sie dem Sonnenlicht eine Zeit lang ausgesetzt gewesen; außerdem faulende Stoffe aus dem Thier- und Pflanzenreiche und verschiedene Insekten.

Einen leuchtenden Körper denkt man sich als aus unendlich vielen leuchtenden Punkten zusammengesetzt. Ein leuchtender Punkt entsendet sein Licht geradlinig nach allen Richtungen. Jede einzelne dieser Richtungen kann als ein Lichtstrahl aufgefaßt werden.

Solche Körper, welche nicht die Eigenschaft haben, selbst zu leuchten, sondern nur dann erhellt erscheinen, wenn sie dem Lichte selbstleuchtender Körper ausgesetzt sind, nennt man dunkle Körper. Je nach dem Verhalten des Lichtes bei der Berührung mit ihnen unterscheidet man unter ihnen durchsichtige und undurchsichtige Körper, und nimmt an, daß die ersteren dem in ihnen vorhandenen Lichtäther die Schwingungen gestatten, während die undurchsichtigen Körper diese Schwingungen ganz oder doch zum größeren Theile verhindern.

Durchsichtige Körper sind: die Luft, das Wasser, krystallisirte Körper, Glas u. m. a. Bis zur Vollkommenheit besitzt jedoch kein Körper die Eigenschaft, das Licht hindurchzulassen; in zu großem Volumen wird er für dasselbe undurchdringlich, sowie andererseits als undurchsichtig bekannte Körper, z. B. einige Metalle, in sehr geringem Volumen, etwa zu Blättchen geschlagen, das Licht theilweise hindurchlassen.

§. 4. Trifft Licht auf die Oberfläche eines Körpers, so hindert dieser, da seine Masse den Schwingungen des Aethers hinderlich ist, die Fortsetzung der ursprünglichen Lebhaftigkeit und Richtung des Lichtes, und nur ein Theil desselben pflanzt sich in dem Innern des Körpers in veränderter Richtung und in minder schnellen und minder großen Schwingungen fort (Lichtbrechung, Refraction). Ein anderer Theil

folgt dem weiter unten ausgeführten Geſetze, welchem die Wellen flüſſiger Körper folgen, die in ihrer Bewegung auf ein feſteres Hinderniß treffen: ſie werden von dem Körper aufgehalten und zurückgeworfen (Reflexion). Von der Oberfläche des hemmenden Körpers iſt ein Theil erleuchtet und leuchtet nunmehr ſelbſt, weshalb man ihn das Licht des Körpers nennt. Der Theil der Oberfläche, welcher dem Lichte abgewendet iſt, bleibt unerleuchtet, er befindet ſich im Schatten. Ebenſo heißt der Raum hinter dem Körper, welchen keine Lichtſtrahlen erreichen können, weil die dahin gerichteten von dem Körper aufgefangen werden, der Schatten, genauer der Schlagſchatten. Tritt ein Theil eines andern von demſelben Lichte beleuchteten Körpers in dieſen Raum, ſo wird auf dieſem Theile der Schlagſchatten im Gegenſatze zu den beleuchteten Theilen dieſes Körpers ſichtbar, und wird die Erſcheinung der Dunkelheit auf dem letzteren der Schlagſchatten des erſten Körpers genannt.

Ausführlicheres hierüber enthält der fünfte Abſchnitt der zweiten Abtheilung.

b) Stärke der Erleuchtung.

§. 5. Die Stärke der wirklichen Erleuchtung eines Körpers hängt ab

1) von der Lichtſtärke des leuchtenden Körpers;
2) von der Entfernung vom leuchtenden Körper;
3) von dem Winkel, unter welchem die erleuchtete Körperfläche gegen die Lichtſtrahlen geneigt iſt;
4) von der Beſchaffenheit und dem Volumen der Körper, welche das Licht durchdringen muß, z. B. Luft oder Dünſte, um den erleuchteten Körper zu erreichen.

Die Stärke der ſcheinbaren Erleuchtung, d. h. der Grad von Helligkeit, welchen das menſchliche Auge wahrnimmt, hängt außerdem noch ab von der Beſchaffenheit der erleuchteten Körperfläche, von dem Winkel, unter welchem das Auge die Fläche ſieht, von der Entfernung der Fläche vom Auge, von der Stärke der Erleuchtung, in welcher andere in der Nähe befindliche Körper erſcheinen,

und von noch anderen Umſtänden, welche erſt weiter unten Erwähnung finden können.

Zur Erläuterung der obengenannten Bedingungen der Stärke der wirklichen Erleuchtung iſt anzuführen:

§. 6. Zu 1. In je größere Schwingungen ein leuchtender Körper die Aethertheilchen zu verſetzen vermag, deſto ſtärker iſt ſowohl ſein Licht, als auch die erhellende Wirkung auf einen von dieſem Lichte getroffenen Körper.

§. 7. Zu 2. Indem ſich die Lichtſchwingungen von einem zum andern Aethertheilchen fortpflanzen, vertheilt ſich dieſelbe urſprüngliche Kraft auf immer mehr Theile, muß alſo für jedes einzelne entferntere Theilchen entſprechend geringer werden. In gleichem Maße nimmt auch die erhellende Kraft ab. Dieſe Abnahme findet nach folgendem Geſetze ſtatt: „Die Stärke der Erleuchtung nimmt in demſelben Verhältniſſe ab, in welchem das Quadrat der Entfernung zunimmt.“

Die Richtigkeit dieſes Geſetzes läßt ſich am einfachſten beweiſen, wenn man allein die Lichtquantität ins Auge faßt; nämlich:

Von allen von dem leuchtenden Punkte L (Fig. 1) ausgehenden Lichtſtrahlen empfängt eine 3 Ellen entfernte und 9 Quadratfuß große Fläche C nur die innerhalb der Strahlenpyramide d e f g L liegenden Strahlen. Eine gleiche Strahlenmenge empfangen aber auch ſowohl die nur 2 Ellen entfernte und 4 Quadratfuß große Fläche B, als die 1 Elle entfernte und 1 Quadratfuß große Fläche A. Es muß daher die

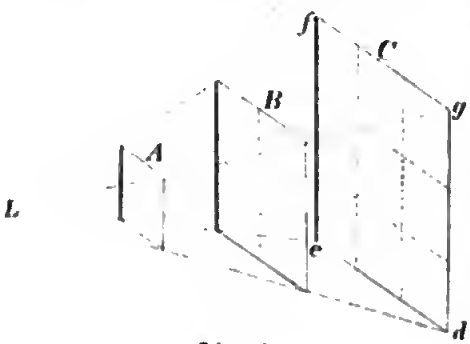

Fig. 1.

dreifach entfernte Fläche C = 9 mal ſchwächer, die zweifach entfernte Fläche B = 4 mal ſchwächer erleuchtet ſein als die einfach entfernte Fläche A, da dieſelbe Lichtquantität bei C ſich auf eine 9 mal größere, bei B auf eine 4 mal größere Fläche, als A iſt, vertheilt.

§. 8. Zu 3. Je mehr ſich die Winkel, unter welchen Lichtſtrahlen eine Körperfläche treffen, dem rechten Winkel

nähern, in deſto höherem Grade iſt die Fläche erleuchtet. Iſt L in Fig. 2 ein leuchtender Punkt, A B eine ebene Fläche, welche von dem von L ausgehenden Lichte erleuchtet iſt, und nimmt man der Einfachheit wegen von dieſem Lichte nur 7 gleichweit von einander entfernte Strahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, von denen der mittelſte die Fläche rechtwinklig trifft, in Betracht, ſo liegen die Wirkungspunkte E, C und F der Strahlen 3, 4 und 5, welche die Flächen unter nahezu rechten Winkeln treffen, offenbar näher an einander, als die Wirkungspunkte E, D, A und F, G und B der Strahlen 3, 2, 1, 5, 6 und 7, welche die Fläche unter kleineren Winkeln treffen, und muß deshalb der kleinere Raum zwiſchen E und F mehr erleuchtet ſein, als die ebenfalls von nur je drei Strahlen getroffenen größeren Räume zwiſchen E und A und zwiſchen F und B. Hiernach muß denn auch die Stärke der Erleuchtung bei C am größten ſein und von hier aus nach A und nach B hin allmählich abnehmen.

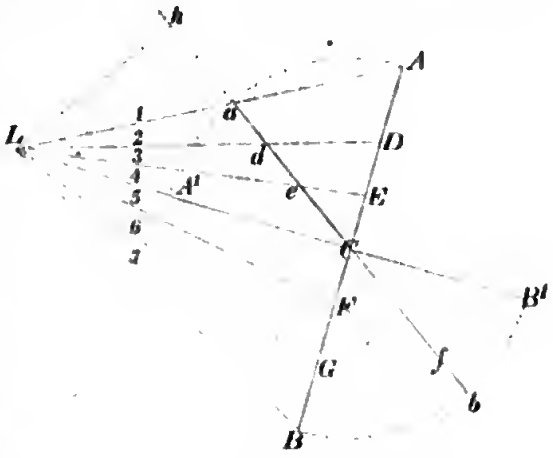

Fig. 2.

In der Lehre von der perſpectiviſchen Conſtruction der Beleuchtung und der Schatten nennt man den rechtwinklig einfallenden Strahl L C den Hauptſtrahl, und ſeinen Wirkungspunkt C den Fußpunkt des Lichtes.

Wird die Fläche um C gedreht, bis ſie in die Lage a b kommt, ſo wird ſie nur von dem kleineren Strahlenbüſchel a L b erleuchtet, welches aus etwas mehr als 5 Strahlen beſteht. Sie muß deshalb, und da vollends dieſe Strahlen unter kleinen Winkeln einfallen, im ganzen weniger erleuchtet ſein, als in der Lage A B. Theilweiſe wieder aufgehoben wird dieſe Abnahme der Erleuchtung dadurch, daß der Theil C a der Lichtquelle näher gekommen iſt, als irgendein Theil der Fläche in der Lage A B, und zugleich dadurch, daß die

Wirkungspunkte a, d und e näher bei einander liegen, als in A B. Dafür iſt aber auch die andere Hälfte C b der Lichtquelle weiter entrückt.

Will man den Fußpunkt des Lichtes für die Fläche in der Lage a b beſtimmen, ſo verlängert man die Fläche über a hinaus und fällt von L aus eine Normale L h auf ſie, wonach h dieſer Fußpunkt iſt.

Gar nicht erleuchtet wird die Fläche, ſobald ſie um C in die Lage A^1 B^1 gedreht iſt, in welcher ſie mit dem Hauptſtrahle zuſammenfällt. Sie empfängt in dieſer Lage nur Streiflicht.

§. 9. Auffallender iſt die Verſchiedenheit der Erleuchtungsgrade auf einer gekrümmten Fläche. Tritt in Fig. 3 eine Kugelfläche an die Stelle der ebenen Fläche, ſo wird wieder im Punkte C, auf deſſen Tangente der Hauptſtrahl normal ſteht, die ſtärkſte Erleuchtung ſein. Nach F, G und B und nach E, D und A hin wird die Erleuchtung ſchneller abnehmen, als dies auf der ebenen Fläche geſchah, weil die Winkel, unter welchen hier die Lichtſtrahlen einfallen, nicht allein kleiner ſind, ſondern auch die Wirkungspunkte der Strahlen verhältnißmäßig entfernter von der Lichtquelle und zugleich entfernter von einander liegen. — Die Punkte B und A liegen im Streiflicht und bezeichnen die Grenze, bis zu welcher die Kugelfläche erleuchtet iſt. An dieſer Grenze fängt der Schatten der Kugel und zugleich ihr im Raume einen abgekürzten Kegel bildender Schlagſchatten an.

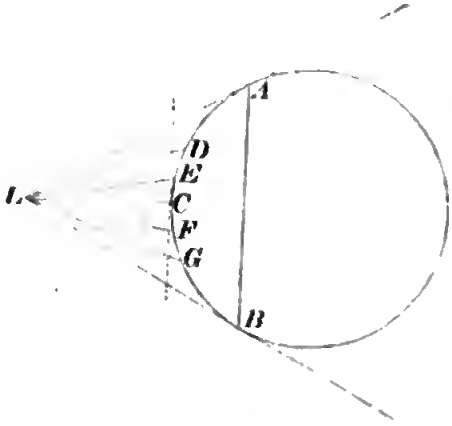

Fig. 3.

Die Stelle der ſtärkſten Erleuchtung an einem Objecte pflegt man ſchlechthin das höchſte Licht deſſelben zu nennen.

§. 10. Zu 4. Licht, welches nicht ſchon durch andere Körper hindurchgegangen wäre, iſt nur oberhalb der Erdatmoſphäre, allenfalls unter dem Recipienten der Luftpumpe denkbar. In der Nähe der Erdoberfläche wird die wirkliche Erleuchtung ſtets durch das Vorhandenſein irgendeines die Lebhaftigkeit der Aetherſchwingungen

hemmenden Körpers, wie Luft und Dünste, gemindert sein, und zwar je nach dem Maße, in welchem dieser Körper dicht und die Strecke lang ist, welche das Licht in demselben zu durchlaufen hat.

c) Reflexion des Lichtes.

Wenn Licht auf die Oberfläche eines Körpers trifft, so wird, wie schon oben (§. 4) angeführt ist, je nach der Beschaffenheit des Körpers ein größerer oder geringerer Theil des Lichtes von der Oberfläche zurückgestoßen (reflectirt), und zwar nach dem unten folgenden Gesetze. §. 11.

Ist L in Fig. 4 ein leuchtender Punkt, von dessen Lichte man der Einfachheit wegen nur einen auf die vollkommen ebene Oberfläche O F eines Körpers schief einfallenden Strahl L r in Betracht nimmt, so nennt man zuvörderst eine auf der Oberfläche in dem Punkte r normale Linie e r das Einfallsloth, den Punkt r den reflectirenden Punkt, den Winkel L r e, welchen der einfallende Strahl mit dem Einfallslothe bildet, den Einfallswinkel, den Winkel L r F, welchen der Strahl mit der Oberfläche bildet, den Neigungswinkel, und den zurückgestoßenen Strahl r A den reflectirten oder Ausfallstrahl.

Fig. 4.

1) Die Zurückstoßung erfolgt nun an dem reflectirenden Punkte (r);

2) der Winkel O r A, welchen der reflectirte Strahl (r A) mit der Oberfläche bildet, ist gleich dem Neigungswinkel F r L des einfallenden Strahles; es ist deshalb auch der Winkel (A r e), welchen der reflectirte Strahl mit dem Einfallslothe bildet, der Reflexionswinkel, gleich dem Einfallswinkel (L r e);

3) der reflectirte Strahl liegt in einer durch den einfallenden Strahl und das Einfallsloth denkbaren, auf der Oberfläche also normalen Ebene (Reflexionsebene).

§. 12. Iſt die Oberfläche des Körpers gut polirt, ſo geſchieht die Reflexion regelmäßig und die Lichtſtrahlen werden mit geringerem Verluſt an Stärke reflectirt, als bei der unregelmäßigen Reflexion von einer matten Oberfläche.

§. 13. Befindet ſich in der Richtung reflectirter Strahlen ein Auge, ſo erwecken jene in demſelben ebenſo wohl die Thätigkeit des Sehens, wie vom leuchtenden Körper direct in daſſelbe gelangende Strahlen.

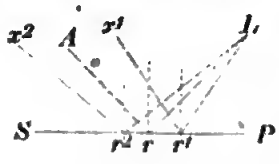

Fig. 5.

Iſt nun die gerade Linie S P in Fig. 5 der Durchſchnitt einer gut polirten ebenen Fläche eines Körpers, etwa einer Metallplatte, mit der Zeichnungsebene, iſt L ein leuchtender Punkt innerhalb letzterer, ſo werden ſämmtliche auf S P fallende Lichtſtrahlen dem obigen Geſetze nach derart reflectirt, daß z. B. der Strahl L r¹ nach der Richtung r¹ x¹, der Strahl L r nach der Richtung r A, der Strahl L r² nach der Richtung r² x² zurückgeſtoßen wird u. ſ. f. In ein in der Richtung r A befindliches Auge A gelangt jedoch nur der eine bei r gebrochene Strahl L r A, und das Auge macht in der Richtung nach r hin faſt dieſelbe Wahrnehmung, als wenn es den leuchtenden Punkt L ſelbſt ſähe. Es wird daraus entnehmen, daß die Lichterſcheinung in der Richtung nach r hin ein Spiegelbild des Punktes L und daß die Metallplatte ein Spiegel ſei.

§. 14. Weil, wie geſagt, außer dem Strahle L r kein anderer nach A, dem Orte des Auges, reflectirt wird, Körper ohne eigenes oder reflectirtes Licht aber nicht ſichtbar ſind, ſo iſt ferner außer dem hellen Punkte r die übrige Oberfläche der Metallplatte dem Auge nicht wahrnehmbar. Je vollkommener polirt die Oberfläche eines Körpers iſt, je vollkommener ſie reflectirt, deſto weniger iſt ſie ſelbſt dem Auge wahrnehmbar.

§. 15. Die mit einem Auge gemachte Wahrnehmung eines Spiegelbildes in einer gewiſſen Richtung reicht nicht hin, um eine richtige Vorſtellung von der Entfernung deſſelben vom Auge, von ſeinem ſcheinbaren Orte, zu erwecken; es bedarf hierzu, aus weiter unten zu entwickelnden Gründen, der Mitthätigkeit des zweiten Auges.

Obgleich in das zweite Auge A^1, Fig. 6, ein anderer durch Reflexion abgelenkter Strahl $L r^1 A^1$ gelangt, als der in das erste Auge A reflectirte Strahl $L r A$, so nimmt der Träger der beiden Augen doch nur ein Spiegelbild des leuchtenden Punktes L wahr; und zwar liegt seine Wahrnehmung sowohl in der Richtung $A r$, als in der Richtung $A^1 r^1$, also im Schnittpunkte l der beiden Richtungen.

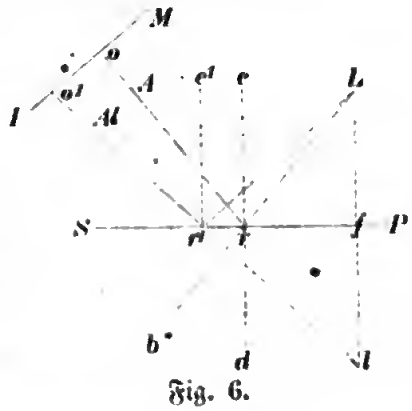

Fig. 6.

§. 16.

Vergleicht man nun den Ort des Spiegelbildpunktes l mit der Lage der Spiegelfläche S P und dem Orte des leuchtenden Punktes L selber, so ergiebt sich Folgendes:

1) Die Strecke l r (Rückwärtsverlängerung des reflectirten Strahles) ist gleich der Länge des Strahles L r, und der Winkel l r P ist gleich dem Winkel L r P, da die Dreiecke l r' r und L r' r wegen Gleichheit einer Seite und der anliegenden Winkel einander gleich sind. Seite r' r nämlich ist sich selbst gleich; Winkel l r' r ist gleich dem Winkel L r' r, weil jener gleich seinem Scheitelwinkel $A^1 r^1 S$, und dieser gleich dem Neigungswinkel $L r^1 r$ ist; Winkel l r r' ist gleich dem Winkel L r r', weil die einzelnen Theile jenes, nämlich die Winkel l r d und d r b und b r S den einzelnen Theilen dieses, A r e und e r L und S r A (gleich f r L) gleich sind, weshalb auch ihre Summen gleich sein müssen.

2) Die Dreiecke l r f und L r f sind einander gleich wegen Gleichheit zweier Seiten und der von diesen eingeschlossenen Winkel. Nämlich Seite r f ist sich selbst gleich; Seite l r ist gleich der Seite L r, weil sie entsprechende Seiten der vorher als gleich erwiesenen Dreiecke l r' r und L r' r sind; Winkel l r f ist gleich dem Winkel L r f, weil sie Nebenwinkel der in den gleichen Dreiecken l r' r und L r' r entsprechend liegenden Winkel l r r' und L r r' sind.

3) Die Strecke l f des verlängerten Hauptstrahles ist gleich dem Strahle L f selbst, weil sie beide entsprechend liegende Seiten der gleichen Dreiecke l r f und L r f sind.

§. 17. Aus dieſen drei Sätzen ſind folgende für die Conſtruction der Perſpectiven der Spiegelbilder wichtigen Regeln abzuleiten:

aus 1: Die Rückwärtsverlängerung des reflectirten Strahles bis zum Spiegelbilde iſt gleich der Länge des einfallenden Strahles, und bildet mit der Spiegelfläche denſelben Winkel, welchen der einfallende Strahl mit ihr bildet;

aus 2: Das Spiegelbild liegt im Schnittpunkte des verlängerten Hauptſtrahles mit der Rückwärtsverlängerung des reflectirten Strahles;

aus 3: Das Spiegelbild liegt in dem verlängerten Hauptſtrahle ſo weit hinter der Spiegelfläche, wie das Object ſelbſt vor derſelben.

§. 18. Die Reflexion aller auf eine Spiegelfläche einfallenden Strahlen eines leuchtenden Punktes geſchieht in Richtungen, welche ſämmtlich durch den Spiegelbildpunkt gehen, ſodaß dieſer dem leuchtenden Punkte ähnlich zu leuchten ſcheint. Fängt man die reflectirten Strahlen auf einem nicht ſpiegelnden Schirme auf, ſo wird auf dieſem eine Lichterſcheinung von einer der des Spiegels ähnlichen, nur größeren Geſtalt ſichtbar — eine Lichterſcheinung, welche in der Folge der Kürze wegen das Schirmbild, zur Unterſcheidung von dem im Spiegel ſelbſt wahrnehmbaren ſogenannten ſubjectiven (Spiegel-) Bilde des Punktes, heißen möge. Hat z. B. die ſpiegelnde Fläche nur die Ausdehnung der Strecke $r^1 r$ (Fig. 6), und iſt ein Schirm wie die Linie I M gerichtet, ſo wird das ganze auf den Spiegel $r^1 r$ einfallende Strahlenbüſchel $r^1 L r$ ſo reflectirt, daß es auf dem Schirme den Raum zwiſchen o^1 und o erleuchtet, wie wenn dahin ein Büſchel $o^1 l o$ directer Strahlen aus dem Punkte l gelangte.

§. 19. Da die Richtung des reflectirten Lichtes der des einfallenden Lichtes entgegengeſetzt iſt, ſieht man häufig das Spiegelbild eines Objectes, ohne daß dieſes ſelbſt ſichtbar iſt.

§. 20. Das von einer ſpiegelnden Fläche nach einer andern ebenſolchen reflectirte Licht wird von dieſer wieder reflectirt, ſodaß ſich auf ihr ein Spiegelbild von dem Spiegelbilde jener zeigt. Dadurch kann,

je nach der Stellung der ſpiegelnden Flächen zu einander, die Zahl der einem einzelnen Objecte entſprechenden Spiegelbilder unendlich groß werden. Nimmt man der Einfachheit wegen nur zwei, etwa lothrechte, einander in einer Linie ſchneidende Spiegelflächen in Betracht, ſo iſt, wenn man die Zahl der Grade des Winkels, welchen die Spiegel mit einander bilden, in 360° dividirt, die Zahl der einem Objecte entſprechenden Spiegelbilder gleich dem Quotienten minus 1.

Bilden z. B., wie in Fig. 7, die beiden Spiegel L I und S I mit einander den Winkel von 90°, ſo zeigen ſich einem etwa in O befindlichen Auge außer den Bildern l I und s I der Grundlinien der Spiegel drei Bilder von dem einen Objecte E, und zwar ſcheinbar an den Orten e, e^2 und e^1. Es gelangen in dieſem Falle von allen von dem Objecte ausgehenden Strahlen die beiden E ε O und E ε^1 O durch je einmalige Reflexion, der Strahl E ε^0 ε^2 O aber durch zweimalige Reflexion in das Auge.

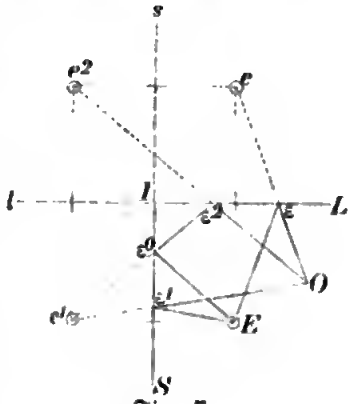

Fig. 7.

§. 21. Inwiefern aber das Zutreffen obiger Rechnung von dem Orte des Auges und dem des Objectes zwiſchen den Spiegeln abhängig iſt, iſt aus Fig. 8 zu erſehen, wo die Spiegel den Winkel von 120° mit einander bilden, und wo, außer dem überall, nur nicht von einem Punkte der Linie G I aus ſichtbaren einen Spiegelbilde I P der beiden Spiegel-Grundlinien, dennoch

einem Auge an dem Orte O^1 nur ein Bild e des Objectes E vermittelſt des einmal bei

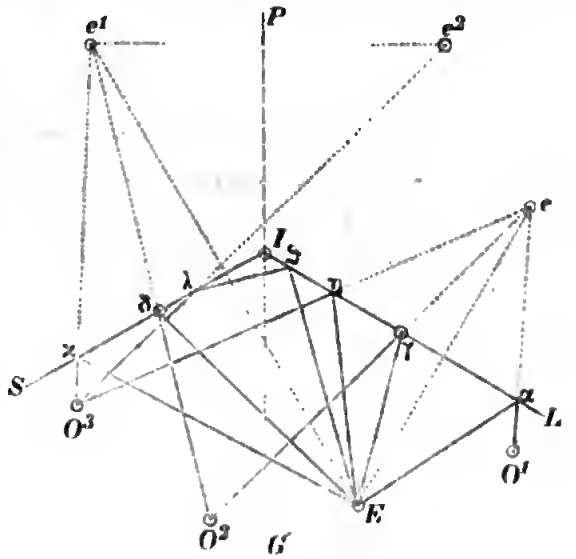

Fig. 8.

α reflectirten Strahles $E\alpha O^1$ und kein anderes Bild ſichtbar wird, während

ein Auge am Orte O^2 zwei Bilder e und e^1 vermittelſt der je einmal bei γ und δ reflectirten beiden Strahlen $E\gamma O^2$ und $E\delta O^2$,

ein Auge am Orte O^3 aber drei Bilder e, e^1 und e^2 vermittelſt der beiden je einmal bei η und $\varkappa$ reflectirten Strahlen $E\eta O^3$ und $E\varkappa O^3$, und des dritten zweimal, bei ϑ und λ, reflectirten Strahles $E\vartheta\lambda O^3$ ſieht.

§. 22. Sind die beiden Spiegelflächen einander parallel geſtellt, wie K S und L G in Fig. 9, ſo zeigen ſich einem an einem beliebigen Orte zwiſchen den Spiegeln befindlichen Auge O der Theorie nach

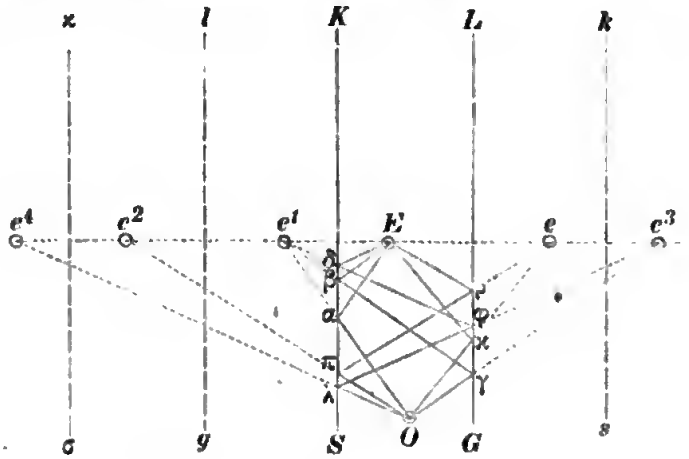

Fig. 9.

unendlich viele Bilder von dem einen Objecte E. Die Bilder e und e^1 ſieht es vermittelſt der je einmal reflectirten Strahlen $E\varkappa O$ und $E\alpha O$, die Bilder e^2 und e^3 vermittelſt der je zweimal reflectirten Strahlen $E\varrho\pi O$ und $E\beta\gamma O$, das Bild e^4 vermittelſt des dreimal reflectirten Strahles $E\delta\varphi\lambda O$ u. ſ. f. Da bei jeder Reflexion aber ein Lichtverluſt eintritt, ſo werden die ſcheinbar entfernteren Bilder immer undeutlicher und endlich vollends durch das Spiegelbild des Beobachters ſelbſt verdeckt.

§. 23. Glasſpiegel ſind zu Beobachtungen der Spiegelbilder ungeeignet, da ihre vordere und hintere Fläche zugleich reflectiren und dadurch an ſich doppelte, ſich theilweiſe deckende Bilder entſtehen.

Der an Körpern mit polirter oder von Natur glatter Ober- §. 24.
fläche wahrnehmbare ſogenannte Glanz iſt nichts anderes als das, häufig unvollkommene, Spiegelbild des leuchtenden Körpers.

Die Erörterung der zwar nach denſelben Geſetzen erfolgenden, §. 25.
jedoch complicirteren Reflexionserſcheinungen auf gekrümmten ſpiegelnden Flächen wird in der Lehre der perſpectiviſchen Conſtruction der Spiegelbilder angemeſſeneren Platz finden. Vorläufig genügt es, darauf hinzuweiſen, daß die zweite der in §. 17 für ebene Spiegel hervorgehobenen Regeln auch für gekrümmte Spiegel gilt.

Iſt die Oberfläche eines Körpers nicht polirt oder von Natur §. 26.
ſpiegelnd, ſo geſchieht die Zurückſtoßung der Lichtſtrahlen an jedem einzelnen Punkte der Oberfläche an ſich regelmäßig, nach dem §. 11 gegebenen Reflexionsgeſetze; da aber wegen der in der Fläche befindlichen Erhabenheiten und Vertiefungen die Lage der reflectirenden Punkte neben einander eine unregelmäßige iſt, ſo werden auch die Strahlen in allen Richtungen unregelmäßig durch einander reflectirt.

Es mag ſich daher ein Auge gegenüber der reflectirenden Fläche befinden, wo es wolle, es werden die kleinen Erhabenheiten und Vertiefungen der Fläche immer irgendeinen Punkt haben, an welchem ein Lichtſtrahl in der Richtung nach dem Auge reflectirt wird, wie dies Fig. 10 veranſchaulicht,

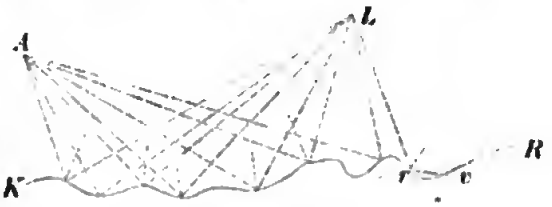

Fig. 10.

worin die krumme Linie zwiſchen den Punkten K und R die rauhe Oberfläche eines Körpers, L den leuchtenden Punkt und A den Ort des Auges vorſtellt.

Demzufolge iſt eine dem Licht ausgeſetzte nicht polirte Oberfläche eines Körpers nicht allein ſichtbar, ſondern auch in ihrer ganzen Ausdehnung und von allen Seiten ſichtbar.

Sind die Erhabenheiten einer ſolchen Oberfläche an ſich glatt, §. 27.
wie z. B. die einer Schneefläche, ſo bringt jede ein kleines ſubjectives Spiegelbild des leuchtenden Körpers hervor, und die ganze Fläche glänzt.

Uebrigens ist die Figur geeignet, das flatternde, sich unter Umständen vom Horizonte bis fast zu den Füßen des Beschauers hinziehende Spiegelbild der Sonne oder des Mondes zu erklären, welches man auf ausgedehnten Wasserflächen wahrnehmen kann, wenn dieselben vom Winde bewegt sind. Es ist dann von jeder Welle ein kleiner Flächentheil so gerichtet, daß er ein, meist unvollkommenes, Spiegelbild der Lichtquelle in das Auge reflectirt.

Ebenso ist der Glanz des Erdbodens in Landschaften nach dem Regen, der Glanz bethauter Wiesenflächen und Blättergruppen zu erklären als der Gesammteindruck der auf den Oberflächen der einzelnen Wasserpfützen, Thautropfen u. s. w. sich gestaltenden unregelmäßigen Spiegelbilder des leuchtenden Himmels auf das Auge.

§. 28. Sind die Erhabenheiten einer unvollkommen polirten Oberfläche nur gering, wie z. B. an polirtem Holze oder geglättetem Papier, so zeigt die Fläche annähernd die Eigenschaft eines Spiegels, und bringt ein um so weniger unvollkommenes subjectives Spiegelbild des leuchtenden Körpers hervor, je schiefer die Strahlen auf sie einfallen und demgemäß reflectirt werden; denn es werden in diesem Falle nur die Gipfel der Erhabenheiten vom Lichte getroffen und letzteres wird demnach gleichartiger reflectirt.

§. 29. Außer dem mit jeder Berührung mit einem Körper zusammenhängenden Verluste an Lebhaftigkeit seiner Schwingungen überhaupt erleidet das Licht bei unregelmäßiger Reflexion auch noch einen scheinbaren Mengeverlust insofern, als durch die Erhabenheiten einer nicht polirten Fläche ein großer Theil der Strahlen längs der Fläche oder seitwärts zu anderen Erhabenheiten hin reflectirt wird, wie dies in Fig. 10 der Strahl L r v zeigt.

§. 30. Das Schirmbild einer nicht polirten Fläche ist, weil diese das Licht in allen Richtungen durch einander reflectirt, sehr ausgedehnt und nicht begrenzt. Alle nicht hinter der Fläche und nicht mit ihr in einer Ebene befindlichen Gegenstände zeigen Spuren von dem von ihr reflectirten Lichte (Reflexlicht, Reflexe), am deutlichsten jedoch die Gegenstände an dem Orte, nach welchem die regelmäßige Reflexion gerichtet ist.

§. 31. Dem Umstande, daß das Licht von allen Körpern mehr oder weniger

zurückgeſtoßen wird und, auf andere reflectirt, von dort wieder zurückgeſtoßen, ins Auge gelangt, namentlich der unregelmäßigen Reflexion iſt es zuzuſchreiben, daß die nicht von directem Lichte erleuchteten oder in Schlagſchatten befindlichen Theile der Körper nicht ganz unerleuchtet, d. h. ſchwarz erſcheinen, vielmehr unterſcheidbar ſind.

d) Brechung oder Refraction des Lichtes.

§. 32. Daß der in einen Körper eindringende Theil des Lichtes innerhalb deſſelben fortgepflanzt wird, erklärt man durch die Annahme, daß zwiſchen den Maſſentheilchen der Körper Aether vorhanden ſei.

Da ein Licht einlaſſender Körper demnach gewiſſermaßen ſelbſt als Fortpflanzungsmittel der Lichtſchwingungen angeſehen werden kann, pflegt man ihn ſchlechthin ein Mittel oder Medium zu nennen.

Man nimmt ferner an, daß die Maſſentheilchen der Körper die Elaſticität des in letzteren enthaltenen Lichtäthers modificiren und dieſer deshalb die Lichtſchwingungen langſamer fortpflanze als der Aether im leeren Raume. Man erklärt hiermit, und zugleich geſtützt auf die Geſetze der Wellenbewegung, welchen auch die Lichtſchwingungen unterliegen, die Erſcheinung, daß normal auf die Oberfläche eines Körpers treffende Strahlen in dieſen, ohne die urſprüngliche Richtung zu ändern, geradlinig eindringen, daß jedoch nicht normal auf die Oberfläche treffende Strahlen eine an der Oberfläche ſtattfindende Ablenkung von der urſprünglichen Richtung, eine Brechung erleiden.

§. 33. Stellt z. B. in Fig. 11 die Linie K P die Oberfläche eines Körpers vor, eines Mittels wie etwa Waſſer, die Linie L b einen durch den leeren Raum gehenden, auf die Oberfläche ſchief einfallenden Lichtſtrahl, welcher innerhalb des Körpers nach der Richtung b g gebrochen iſt, ſo heißt zuvörderſt der Winkel g b f, welchen der gebrochene Strahl b g mit dem Einfallslothe e f bildet, der Brechungswinkel, der Winkel g b a, welchen der gebrochene

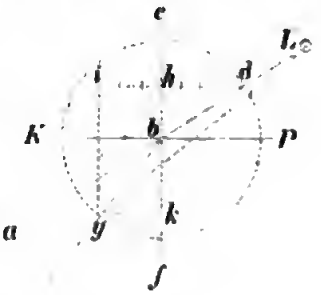

Fig. 11.

Strahl mit der geradlinigen Fortsetzung ba des einfallenden Strahles bildet, der Ablenkungswinkel, der Punkt b der brechende Punkt.

Die Brechung geschieht nun nach folgendem Gesetze:

1) Sie geschieht an der Grenzfläche (KP) der beiden Mittel (leerer Raum und Wasser) im Treffpunkte des einfallenden Strahles.

2) Der gebrochene Strahl liegt mit dem einfallenden Strahle und dem Einfallslothe in Einer, zur Oberfläche demnach normalen, Ebene.

3) Der Brechungswinkel ist kleiner als der Einfallswinkel, wenn der Lichtstrahl aus einem dünneren Mittel in ein dichteres Mittel übergeht; im entgegengesetzten Falle größer.

Dieser letzte sehr allgemein aufzufassende Satz findet jedoch mannichfache Modificationen, da sogar manche als dichter bekannte Körper, wie z. B. Wasser, das Licht nicht so stark brechen wie andere als dünner bekannte, wie z. B. Spiritus. Im Allgemeinen brechen die brennbaren durchsichtigen Körper das Licht stärker.

§. 34. Unter denselben zwei Mitteln besteht jedoch immer dasselbe Verhältniß zwischen dem Sinus des Einfallswinkels und dem Sinus des Brechungswinkels: ein Verhältniß, welches der Brechungsexponent der beiden Mittel genannt wird. Für je zwei Mittel, wie z. B. für Luft und Wasser, kann dasselbe veranschaulicht werden, wenn man, sobald der einfallende Strahl, Lb in Fig. 11, gegeben ist, um den brechenden Punkt b mit beliebigem Radius einen Kreis schlägt, das Einfallsloth zieht, vom Schnittpunkte d des einfallenden Strahles mit dem Kreise eine Normale dh auf das Einfallsloth fällt und dieselbe, da der Brechungsexponent für Luft zu Wasser annähernd gleich 4:3 ist, in 4 gleiche Theile theilt, 3 dieser Theile auf die Verlängerung der Normalen von h aus in hi aufträgt und von i aus eine Normale durch die Wasserfläche zieht. Legt man dann durch den Punkt g, in welchem sie den Kreis schneidet, wieder eine zum Einfallsloth normale Linie gk, so ist in hd und kg das Verhältniß wie 4:3 des

Sinus des Einfallswinkels zu dem des Brechungswinkels hergeſtellt, und b g iſt die Richtung des gebrochenen Lichtſtrahles.

Ein im Punkte g befindliches Auge würde hiernach den leuch- §. 35.
tenden Punkt L nicht in der Richtung nach L hin, ſondern in der nach b hin wahrnehmen, ſowie andererſeits, befände ſich das Auge im Punkte L, und im Punkte g ein leuchtender Gegenſtand, die von dieſem verurſachte Lichterſcheinung dem Auge nicht in der Richtung nach g hin, ſondern in der nach b hin wahrnehmbar ſein würde.

Eine die Brechung des Lichtes deutlich veranſchaulichende Beobachtung läßt ſich leicht anſtellen, wenn man eine gerade, lange Nadel N L (Fig. 12) in ein mit Waſſer gefülltes cylindriſches Glas derart ſchief ſtellt, daß ſie einerſeits in L auf der Peripherie des Bodens aufſteht, andererſeits an den obern Rand des Glaſes lehnt. Hält man nun das Auge O in der Nähe des Punktes N, aber in der Verlängerung der Nadel, ſodaß dieſe ſelbſt von ihrer Grundfläche bei N gedeckt erſcheint, ſo gelangt von allen von dem Punkte L ausgehenden Lichtſtrahlen wenigſtens einer, etwa der an der Waſſeroberfläche (als Grenzfläche zwiſchen den beiden Mitteln Waſſer und Luft, deren Brechungsexponent annähernd 3:4 iſt) gebrochene Strahl L b O in das Auge, und erſcheint dieſem der Punkt L nicht in der Richtung O L, ſondern in der Richtung O b liegend. Ebenſo werden die von den zwiſchen A und L liegenden Punkten ausgehenden Lichtſtrahlen an der Grenzfläche gebrochen; z. B. der des Punktes D ſo, daß ſein gebrochener Strahl D c O in einer Richtung in das Auge gelangt, welche dieſem den Punkt D an dem Orte d liegend erſcheinen läßt. Demnach erſcheint dem Auge das ganze im Waſſer befindliche Stück der Nadel in der Lage A l, während doch bei der angenommenen Stellung des Auges die ganze Länge der Nadel ſelbſt von ihrer Grundfläche bei N verdeckt iſt.

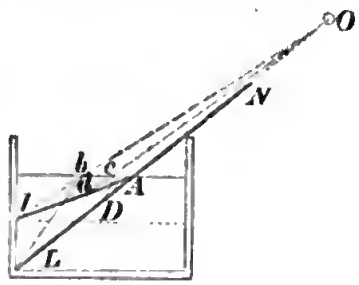

Fig. 12.

Da hiernach der Punkt L, welcher auf dem Boden des Gefäßes ruht, bis l gehoben erſcheint, ſo erſcheint auch der Boden ſelbſt des Gefäßes gehoben.

Es ist hiermit zugleich erklärt, aus welchem Grunde klare Gewässer, deren Boden überhaupt sichtbar ist, weniger tief erscheinen, als sie wirklich sind.

§. 36. Es folgt aus dem Gesagten von selbst, daß Lichtstrahlen, welche, aus einem Mittel kommend, ein anderes durchdringen und dann wieder in das erste Mittel treten, an beiden Grenzflächen der Mittel nach dem entsprechenden Brechungsexponenten gebrochen, eine bedeutende Ablenkung von der geraden Linie erfahren, sodaß einem Auge, in welches der mehrmals gebrochene Strahl endlich gelangt, die Lichtquelle gänzlich von der Stelle gerückt erscheinen muß. Es kann ihm deshalb auch, wenn die Lichtquelle zugleich selbst vermöge der directen Strahlen sichtbar ist, dieselbe doppelt, unter Umständen auch häufiger vervielfältigt erscheinen.

Ist z. B. P R I in Fig. 13 der zur Achse normale Durchschnitt eines dreiseitigen Glasprismas, ist L ein leuchtender Punkt in Luft,

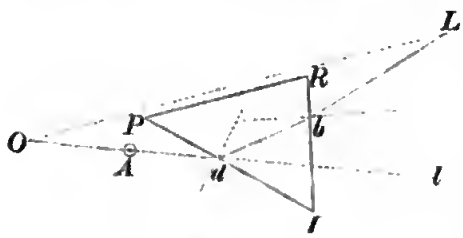

Fig. 13.

und ist in A das Auge, so gelangt in dasselbe nach zweimaliger Brechung der von L in der Richtung L b ausgehende Strahl, indem er an der Fläche R I, dem Brechungsexponenten für Luft zu Glas (3 : 2) gemäß, in die Richtung b d und an der Fläche I P, dem Brechungsexponenten für Glas zu Luft (2 : 3) gemäß, in die Richtung d A, d. h. in das Auge gebrochen wird. Diesem scheint demnach der Ort der Lichtquelle nicht in L, sondern in der Richtung nach l zu liegen. Befände sich das Auge aber in O, so würde es, außer dieser Lichterscheinung in der Richtung nach l, den leuchtenden Punkt L zugleich direct sehen können.

Die mit solcher Brechung der Strahlen weißen Lichtes stets verbundenen Farbenerscheinungen werden weiter unten erörtert werden.

Der Winkel P I R, welchen die beiden brechenden Flächen P I und R I des Prismas mit einander bilden, wird der brechende Winkel, die Kante I die brechende Kante des Prismas genannt.

Geht jedoch ein Strahl durch ein Mittel, deſſen brechende Flächen §. 37.
eben und parallel ſind, ſo tritt der an dieſen zweimal gebrochene Strahl parallel dem einfallenden Strahle aus. Iſt z. B. in Fig. 14 das Rechteck S C H E der zur Achſe normale Durchſchnitt eines vierſeitigen Glasprismas mit parallelen gegenüberſtehenden Flächen, und iſt L b ein von L aus durch Luft gehender Lichtſtrahl, ſo wird derſelbe an der Fläche H E dem Brechungsexponenten 3 : 2 gemäß in die Richtung b d gebrochen. Der gebrochene Strahl b d wird aber an der Fläche S C beim Uebergange aus Glas in Luft dem Brechungsexponenten 2 : 3 gemäß wieder in die Richtung d A gebrochen, welche mit dem einfallenden Strahle L b parallel iſt, da die Einfallslothe parallel und der erſte Brechungswinkel β dem zweiten Einfallswinkel γ, und der erſte Einfallswinkel α dem zweiten Brechungswinkel δ gleich iſt.

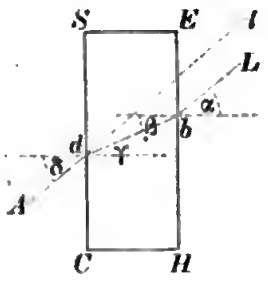

Fig. 14.

Befindet ſich in der Richtung d A, etwa in A, ein Auge, ſo nimmt daſſelbe ſonach den leuchtenden Punkt zwar in einer zum einfallenden Strahle L b parallelen Richtung, nach l hin, jedoch von der Stelle gerückt wahr, ein Vorgang, der alltäglich bei dem Durchblicke durch dicke Fenſterſcheiben zu beobachten iſt.

Es läßt ſich hiernach auch leicht erweiſen, daß der austretende Lichtſtrahl dem einfallenden auch parallel iſt, wenn das Licht durch mehr als zwei an einander grenzende Mittel von verſchiedenem Brechungsvermögen, aber mit unter einander parallelen ebenen Oberflächen, gegangen iſt.

Nach denſelben Geſetzen findet der Durchgang der Lichtſtrahlen §. 38.
durch Mittel mit gekrümmten Oberflächen ſtatt, z. B. durch ſogenannte Glaslinſen. Zu verſchiedenen optiſchen Zwecken werden dieſe bald auf beiden Seiten convex (biconvex), bald auf einer Seite eben und auf der andern convex (planconvex), bald auf einer Seite convex und auf der andern concav (convexconcav) u. ſ. w. angefertigt. Ohne auf die Erſcheinungen, welche die Lichtbrechung durch dieſe verſchiedenartig begrenzten Mittel bietet, näher einzugehen, ſei hier

nur die Lichtbrechung durch eine auf beiden Seiten convexe Glaslinse in Betracht genommen:

Iſt A B in Fig. 15 eine auf beiden Seiten convexe Glaslinſe, ſo heißen zunächſt die Mittelpunkte c und c^1 der kugelartigen Krüm-

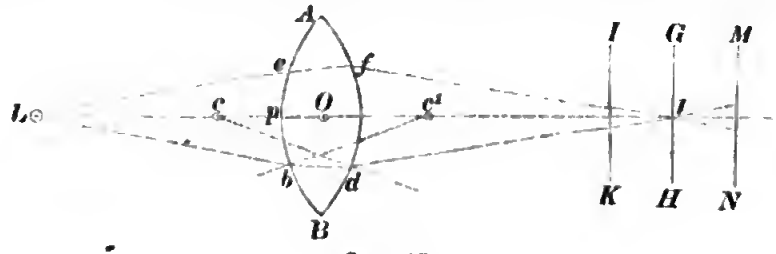

Fig. 15.

mungen der Oberflächen die Krümmungs-Mittelpunkte, eine Linie durch dieſe die Achſe der Linſe, der Punkt O der Achſe in der Mitte zwiſchen beiden Krümmungen der optiſche Mittelpunkt.

Befindet ſich nun in einiger Entfernung von der Linſe in deren Achſe ein leuchtender Punkt L, ſo geht der mit der Achſe der Linſe zuſammenfallende Strahl deſſelben, L p, als normal auf die Oberfläche fallend, geradlinig hindurch. Ein anderer Strahl L b wird im Punkte b, wozu der Radius c^1 b das Einfallsloth iſt, dem Brechungsexponenten für Luft zu Glas gemäß in die Richtung b d, und im Punkte d, wozu c d das Einfallsloth iſt, dem Brechungsexponenten für Glas zu Luft gemäß in die Richtung d l gebrochen, ſodaß er in l den Achſenſtrahl ſchneidet. Ebenſo wird ein dritter Strahl L e, deſſen Punkt e ebenſo weit von p entfernt iſt wie b, erſt in die Richtung e f und dann in die Richtung f l gebrochen. Faßt man nun das Ziel der zweimaligen Brechung aller innerhalb des Lichtbüſchels e L b liegenden Strahlen ins Auge, ſo ergiebt ſich, daß dieſe alle ſich nach der Brechung im Punkte l oder doch in deſſen nächſter Nähe vereinigen oder vielmehr durchſchneiden.

§. 39. Fängt man das Strahlenbüſchel nach der Brechung auf einem Schirme G H, welcher durch den Punkt l geſtellt wird, auf, ſo tritt hier als ſogenanntes objectives Bild eine dem leuchtenden Punkte L ähnliche Lichterſcheinung auf, während, wenn man den Schirm der Linſe nähert oder von ihr entfernt, alſo in I K oder M N ſtellt,

ſich eine kreisrunde Lichterſcheinung zeigt, deren Größe mit der Entfernung vom Punkte l zugleich zunimmt.

Setzt man an die Stelle des leuchtenden Punktes L einen körperlichen, leuchtenden Gegenſtand, wie etwa eine Kerzenflamme, ſo zeigt ſich auf dem Schirme, wenn er durch Punkt l ſteht, ein verkleinertes, umgekehrtes objectives Bild der Flamme und auch der Kerze, während, wenn der Schirm ſich der Linſe nähert oder von ihr entfernt, das Bild ſich vergrößert, aber zugleich immer mehr an Deutlichkeit verliert, je mehr der Schirm ſich nach jeder Seite vom Punkte l entfernt.

Die Begrenzung der Lichterſcheinung auf dem Schirme iſt beſtimmter, wenn man durch eine Vorrichtung, etwa einen vor der Linſe angebrachten rund ausgeſchnittenen Schirm dafür ſorgt, daß nur ein kleines Lichtbüſchel in der Nähe der Achſe durch die Linſe geht und die nahe am Rande der Linſe durchgehenden ſogenannten Randſtrahlen ausgeſchloſſen werden, weil dieſe nach zweimaliger Brechung zu weit vom Vereinigungspunkte der anderen Strahlen vorbeigehen.

§. 40. Je mehr der leuchtende Punkt ſich der Linſe nähert, deſto mehr entfernt ſich ſein durch Brechung entſtandenes Bild davon; je weiter der leuchtende Punkt von der Linſe rückt, deſto mehr nähert ſich derſelben ſein Bild; und wenn er in unendliche Ferne rückt, ſodaß ſeine Strahlen als parallel kommend angeſehen werden können, wie die der Sonne, ſo vereinigen ſich die gebrochenen Strahlen in einem Punkte der Achſe, welcher der Brennpunkt der Linſe genannt wird. Die Entfernung deſſelben vom optiſchen Mittelpunkte heißt die Brennweite der Linſe. Befindet ſich umgekehrt der leuchtende Punkt im Brennpunkte, ſo treten ſeine Strahlen nach der zweimaligen Brechung parallel aus; befindet er ſich zwiſchen dem Brennpunkte und der Linſe, ſo treten ſie divergirend aus. Treffen convergirende Strahlen die Linſe, ſo vereinigen ſie ſich nach der Brechung in einem Punkte, welcher der Linſe näher liegt als der Brennpunkt.

§. 41. Eine mehrmalige Brechung hat auch das Licht erfahren, welches von nicht im Zenith ſtehenden Himmelskörpern zu uns gelangt, und

zwar eine deſto ſtärkere Brechung, je näher dieſelben dem Horizonte ſtehen, da ihre Strahlen alsdann durch die tieferen und darum dichteren Schichten der Erdatmoſphäre gehen. Wenn z. B. die Sonne in der That unter dem Horizonte des Beobachters ſteht, ſo, daß der oberſte Punkt ihrer Scheibe eben den Horizont berührt, ſo iſt die Brechung ihrer Strahlen ſo ſtark, daß ſie völlig über dem Horizonte zu ſtehen ſcheint.

Da ein an der oberen Grenze der Erdatmoſphäre zuerſt gebrochener Strahl, je mehr er ſich der Erdoberfläche nähert, in den allmählich dichter werdenden Luftſchichten, deren Oberflächen zudem zwar als parallel aber nicht als eben zu denken ſind, allmählich immer ſtärker gebrochen wird, ſo iſt ſeine Bahn in der Luft nicht eine gerade Linie, wie im Weltraume jenſeit unſerer Atmoſphäre, ſondern eine Curve, und der leuchtende Körper, von welchem er ausgegangen, erſcheint in der Richtung der letzten in unſer Auge tretenden Strahlenſtrecke, alſo gehoben.

§. 42. Eine Ablenkung von der geradlinigen Bahn iſt jedoch nicht allein bei dem Lichte der Himmelskörper nachweisbar, es können vielmehr in beſonderen Fällen, bei eigenthümlichen Dichtigkeitsverhältniſſen der unterſten Luftſchichten an der Erdoberfläche, auch irdiſche Objecte, welche unter dem Horizonte des Beobachters ſind, dieſem über dem Horizonte wahrnehmbar werden; von andern wieder, welche ſelbſt direct ſichtbar ſind, können zugleich Spiegelbilder über oder unter ihnen ſichtbar werden — Erſcheinungen, welche unter den Namen der Fata Morgana und der Luftſpiegelungen bekannt ſind, bei deren Auftreten jedoch noch ein anderes hiernächſt zu erörterndes optiſches Geſetz, das der totalen Reflexion, mitwirkt.

Im Allgemeinen iſt jedoch die Ablenkung der Lichtſtrahlen von der geraden Linie, in der Nähe der Erdoberfläche, wenn es ſich nicht um Wahrnehmungen in großer Entfernung, wie bei trigonometriſchen Berghöhenmeſſungen, handelt, ſo unerheblich, daß für die gewöhnliche Beobachtung irdiſcher Objecte der Lichtſtrahl in Luft als geradlinig angeſehen werden darf.

§. 43. Unterſucht man, wenn man das in §. 34 gezeigte Verfahren bei der Conſtruction des einem gegebenen Einfallswinkel entſprechenden

Brechungswinkels ins Auge faßt, vermittelſt mathematiſcher Conſtruction, wie groß der Brechungswinkel zu dem größtmöglichen Einfallswinkel, nämlich dem rechten Winkel ſein müſſe, ſo findet man damit auch die Grenze der natürlichen Brechungserſcheinungen ſelbſt.

Handelt es ſich z. B. um die Brechung eines aus Luft in Glas gehenden Lichtſtrahles und man nähme in Fig. 16 den größtmöglichen, alſo 90° betragenden Einfallswinkel an, ſodaß der Strahl L b mit der Glasoberfläche K R zuſammenfiele, ſo müßte man dem gezeigten Verfahren gemäß um den brechenden Punkt b einen Kreis mit beliebigem Radius, etwa mit L b ſelbſt, ſchlagen, dem Brechungsexponenten für Luft und Glas gemäß L b in drei gleiche Theile theilen, b i gleich zweien dieſer Theile machen und durch i eine zur Glasoberfläche normale Linie ziehen, um in g den Punkt zu erhalten, nach welchem der gebrochene Strahl des größten Einfallswinkels gerichtet iſt. Wenn nun, nach §. 32, ein normal einfallender Strahl e b ſich geradlinig, alſo in der Richtung b f fortpflanzt, ſo iſt es unzweifelhaft, daß alle zwiſchen L b und e b im Punkte b unter irgendeinem Winkel einfallenden Strahlen ſo gebrochen werden, daß ihre gebrochenen Strahlen zwiſchen b g und b f hindurchgehen.

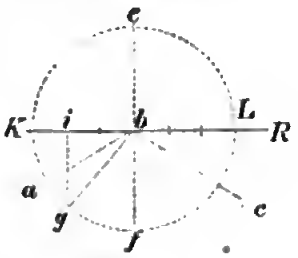

Fig. 16.

Wäre aber g b als ein bei b aus Glas in Luft tretender Strahl, deſſen Einfallswinkel alſo g b f ſein würde, gegeben, und man ſollte ſeinen Brechungswinkel conſtruiren, ſo müßte man das obige Verfahren umgekehrt anwenden und würde finden, daß g b in die Richtung b L, alſo die Trennungsfläche entlang, gebrochen wird und daß demnach auch die Richtungen der gebrochenen Strahlen aller im Punkte b innerhalb des Winkels g b f einfallenden Strahlen innerhalb des Winkels L b e liegen.

Alle im Punkte b, aber unter einem größeren als dem Winkel §. 44.
g b f, alſo innerhalb des Winkels g b K einfallenden Strahlen, wie z. B. a b, unterliegen dem Geſetze der ſogenannten totalen oder innern Reflexion; ſie werden nämlich vom Punkte b aus in das Glas zurückreflectirt und zwar mit einem geringeren Lichtverluſte, als

Strahlen erleiden, die von einem Metallspiegel innerhalb Luft reflectirt werden; ja der längs der Trennungsfläche gebrochene Strahl b L ist um vieles intensiver als der einfallende Strahl g b selbst. Es erklärt sich hierdurch der auffallend lebhafte Glanz geschliffener Edelsteine und Gläser nach gewissen Richtungen hin.

Sowohl für die Richtung als für die Schwingungsgeschwindigkeit der so reflectirten Strahlen ist in dem Gesetze der Wellenbewegung eine genügende Erklärung zu finden.

Indem der Strahl b g die Grenze des Einfallswinkels f b g bezeichnet, über welche hinaus Lichtstrahlen nicht mehr aus dem dichteren Mittel Glas in das dünnere Mittel Luft treten, sondern nur reflectirt werden können, heißt der Winkel f b g der Grenzwinkel für die Brechung aus Glas in Luft. Er beträgt annähernd 41°, während der Grenzwinkel für die Brechung aus Wasser in Luft annähernd $48\frac{1}{2}$°, der für (den überhaupt stark brechenden) Diamant in Luft ungefähr 24° beträgt.

§. 45. Das Gesetz der totalen Reflexion hat man bei Anfertigung eines Instrumentes für zeichnende Künstler, nämlich der Camera lucida benutzt. Dieselbe besteht wesentlich aus einem auf einem Stativ befestigten vierseitigen Glasprisma, welches in Fig. 17 im Querschnitt a b c d gegeben ist. Dasselbe hat an der Kante b einen rechten Winkel, bei d den Winkel von 135°, bei a und bei c den Winkel von $67\frac{1}{2}$°. Fällt auf das Prisma ein zur Fläche b c normaler Lichtstrahl L s ein, so pflanzt sich derselbe im Glase in gerader Linie bis r fort. Hier kann er nicht gebrochen aus dem Glase treten, weil er mit dem Einfallslothe daselbst den Einfallswinkel e r s von $67\frac{1}{2}$° bildet und der Grenzwinkel für die Brechung aus Glas in Luft nur 41° beträgt; der Strahl wird also in die Richtung r t total reflectirt, dann in t aus demselben Grunde in die Richtung t f total reflectirt, und tritt

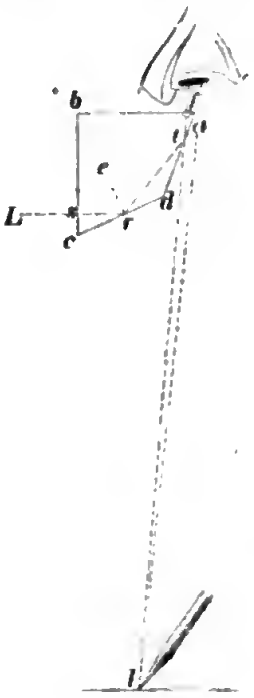

Fig. 17.

endlich in f faſt normal zur Fläche a b aus dem Glaſe in Luft. Befindet ſich nun in der Richtung t f des austretenden Strahles ein Auge, ſo nimmt dieſes die Lichterſcheinung in der Richtung f l wahr. Wird das Auge zugleich ſo gehalten, daß es neben der Kante a des Prismas vorbeiblicken kann, ſo vermag es die Spitze eines Zeichenſtiftes auf einer unterliegenden Papierfläche dergeſtalt zu lenken, daß der Beobachter den Ort ſeiner Wahrnehmung auf dem Papiere markiren kann. Indem auf dieſelbe Art das Licht anderer neben L liegenden, demſelben Objecte wie L angehörigen Punkte gebrochen und total reflectirt wird, iſt man im Stande, auf das Papier ein ziemlich richtiges perſpectiviſches Bild von dem in L befindlichen Objecte zu zeichnen.

Eine dem Geſetze der Brechung und der Reflexion zugleich folgende Erſcheinung iſt die des Regenbogens. Da jedoch die Berührung der Farbenerſcheinungen bei einer Erklärung deſſelben unvermeidlich iſt, ſo muß dieſe hiernächſt in den von der Farbe handelnden Paragraphen ihren Platz finden. §. 46.

e) Farbe.

Da es bis hierher nur darauf ankam, das Verhalten des Lichtes bei der Berührung mit Körpern in Bezug auf ſeine Bahn zu betrachten, konnte ein Lichtſtrahl ſchlechthin als eine einzelne Richtung der von einem leuchtenden Punkte nach allen Richtungen ſich verbreitenden Aetherſchwingungen, wie eine mathematiſche gerade Linie angeſehen werden. In den nunmehr folgenden Erörterungen beſonderer Eigenſchaften des Lichtes muß dem Weſen deſſelben gemäß ein Lichtſtrahl als ein aus mehreren Theilen zuſammengeſetztes Ganzes, als ein feines Strahlenbündel aufgefaßt werden, ſchon weil ein einzelner Strahl von der Feinheit einer mathematiſchen Linie wohl zu denken, aber nicht zur Erſcheinung zu bringen iſt. Nichtsdeſtoweniger ſind die Grenzen eines einzelnen Lichtſtrahles in dieſer Bedeutung, mag derſelbe von der Sonne oder von irdiſchen leuchtenden Körpern herrühren, als parallel anzuſehen. §. 47.

Das von der Sonne kommende Licht iſt weiß oder vielmehr farblos, jedoch, wie ſchon angedeutet, zuſammengeſetzt aus un- §. 48.

zähligen farbigen Strahlentheilen, welche ſelbſt in dem allerfeinſten Sonnenſtrahle ſämmtlich vorhanden ſind. Es laſſen ſich dieſe farbigen Strahlentheile dadurch leicht zur Anſchauung bringen, daß man einen durch eine feine kreisrunde Oeffnung in ein übrigens verfinſtertes Zimmer dringenden Sonnenſtrahl durch ein gläſernes dreiſeitiges Prisma gehen läßt und in einiger Entfernung auf einem weißen Schirme auffängt.

Iſt z. B. P in Fig. 18 das Prisma, durch welches ein bei der Oeffnung L eindringender Lichtſtrahl geht, ſo iſt, da hier die brechende Kante des Prismas nach unten gerichtet iſt, die Lichterſcheinung auf dem Schirme S M nach oben gerückt. Dieſe Lichterſcheinung, das ſogenannte Spectrum, iſt aber nicht rund, wie ſie, wenn das Prisma nicht wäre, bei l ſein würde, ſondern, bei einer der Oeffnung bei L gleichen Breite, in die Länge gezogen, und zwar oben und unten von Bogen, an den Seiten von geraden Linien begrenzt, wie dies in der Fig. 18 die Nebenfigur $r^1 v^1$ zeigt. Außerdem iſt ſie nicht weiß, ſondern aus den ſogenannten prismatiſchen Farben zuſammengeſetzt, welche, in einander übergehend, ſich in folgender Ordnung von r nach v hin folgen: roth, orange, gelb, grün, hellblau, dunkelblau, violett.

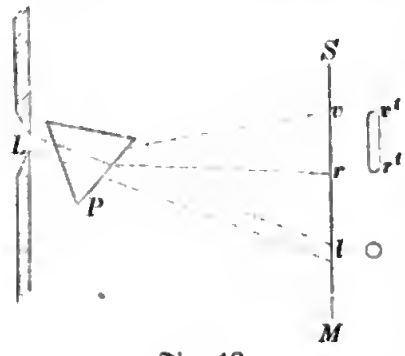

Fig. 18.

§. 49. Aus der Größe des Spectrums, verglichen mit dem Durchmeſſer der Oeffnung bei L iſt erſichtlich, daß die Theile des Lichtſtrahles in divergirende Richtungen ausgebreitet ſind, daß der Lichtſtrahl zerlegt, diſpergirt (Diſperſion: Farbenzerſtreuung) iſt. Die verſchiedene Anordnung der Farben im Spectrum beweiſt, daß die Theile des Strahles von ungleicher Brechbarkeit ſind und zwar, daß die rothen Theile weniger brechbar, die gelben mehr, noch mehr die blauen, am ſtärkſten brechbar die violetten Strahlentheile ſind: eine Erſcheinung, die mit der für die verſchiedenen Farben beſtehenden Verſchiedenheit der Wellenlängen und Schwingungsgeſchwindigkeiten im Zuſammenhange ſteht. Es haben

nämlich die rothen Farbenſtrahlen längere Wellen und kleinere Vibrationsgeſchwindigkeit, die violetten Strahlen halb ſo lange Wellen und doppelte Geſchwindigkeit. Die größere Vibrationsgeſchwindigkeit erfordert geringere Wellenlänge, damit die Fortpflanzungsgeſchwindigkeit beider Farben gleich ſei. Die zwiſchen roth und violett liegenden Farben bilden zwiſchen beiden einen Uebergang hinſichtlich der Wellenlängen und Vibrationsgeſchwindigkeiten, ohne daß jedoch eine dem Uebergange der Farben entſprechende gleichmäßige Abſtufung beſteht.

§. 50. Da man im Allgemeinen die Farben orange, grün und violett als Miſchfarben aus roth und gelb, gelb und blau, blau und roth anſieht, ſo pflegt man die Farben roth, gelb und blau des Spectrums Hauptfarben zu nennen. Es entſtehen jene Miſchfarben des Spectrums jedoch keineswegs aus Vermiſchung der benachbarten Hauptfarben und ſie können auch nicht in dieſe zerlegt werden. Denn durchlöchert man den Schirm z. B. an der Stelle, an welcher ſich die grüne Farbe im Spectrum zeigt, und läßt dieſe grünen Strahlen abermals durch ein hinter die Oeffnung gehaltenes Prisma gehen, ſo werden ſie hierdurch zwar von neuem gebrochen, keineswegs aber in gelb und blau zerlegt, ſie bleiben vielmehr grün.

§. 51. Läßt man die bei dem (§. 49) mit dem Prisma angeſtellten Verſuche in divergirende Richtungen ausgebreiteten Farbenſtrahlen durch eine Glaslinſe (oder auch ein dem erſten Prisma paralleles anderes Prisma mit demſelben brechenden Winkel, deſſen brechende Kante jedoch entgegengeſetzte Lage hat) gehen und fängt ſie in der Entfernung des Brennpunktes der Linſe wiederum auf einem weißen Schirme auf, ſo zeigen ſich auf dieſem ſämmtliche farbigen Strahlen wieder zu einer weißen Lichterſcheinung vereinigt, ſo, als wenn dieſe von directem, ungebrochenem Lichte herrührte. Schließt man aber von dieſem zweiten Durchgange eine oder mehrere Farben aus, ſo ergiebt die Vereinigung der übrigen nicht weißes Licht, ſondern die complementäre Farbe (ſ. §. 52) der ausgeſchloſſenen Farben. Es iſt hiernach zur Erſcheinung weißen Lichtes die Vereinigung aller prismatiſchen Farben erforderlich.

§. 52. Wenn man nur die drei ſogenannten Hauptfarben in Betracht

nimmt und die anderen ſchlechthin als Miſchfarben anſieht, ſo wird nach dem Vorigen jede Hauptfarbe durch die Zumiſchung der beiden anderen zu weiß ergänzt, alſo roth durch die Zumiſchung von gelb und blau, d. i. grün; gelb durch die Zumiſchung von blau und roth, d. i. violett; blau durch die Zumiſchung von roth und gelb, d. i. orange. Man nennt deshalb grün, violett und orange die complementären Farben von roth, gelb und blau, und dieſe umgekehrt die complementären Farben von jenen.

§. 53. Unterſucht man die Zuſammenſetzung des farbigen Spectrums genauer, ſo ergiebt ſich, daß daſſelbe aus einer unzählbaren Menge kreisförmiger, der Größe der Lichtöffnung entſprechender, verſchiedenfarbiger Sonnenbildchen (Spectra) zuſammengeſetzt iſt, die eine der verſchiedenen Brechbarkeit der Farbenſtrahlen entſprechende Anordnung im Spectrum haben, in einander eingreifen und ſich vermiſchen. Betrachtet man nämlich das längliche Geſammtſpectrum durch ein einfarbiges, z. B. rothes Glas, welches (ſ. §. 61) nur die vom Spectrum reflectirten rothen Strahlen durchläßt, ſo ſieht man nur ein kreisrundes rothes Spectrum.

§. 54. Stellt man den das Spectrum auffangenden Schirm ſehr nahe an das brechende Prisma, ſo erſcheint die Mitte des ſo früh aufgefangenen Spectrums weiß und, wenn die brechende Kante des Prismas nach unten gerichtet iſt, oben von einem violetten, unten von einem rothen Rande begrenzt. Es liegen in dieſem Falle die den einzelnen Farbenſtrahlen entſprechenden kleineren Spectra ſo nahe bei einander, daß ſie ſich größtentheils decken und zu weiß vermiſchen, während nur die am oberen und unteren Rande vereinzelt bleibenden ſich unvermiſcht zeigen.

Hieraus läßt ſich das Auftreten farbiger Ränder an den Grenzen heller Körper erklären, welche man wahrnimmt, wenn man letztere durch ein Prisma betrachtet. Die farbigen Säume an dunklen Körpern, oben roth und unten violett, wenn die brechende Kante des Prismas nach unten gerichtet iſt, rühren nicht von dieſen Körpern ſelbſt, ſondern von ihrer helleren Umgebung her.

§. 55. Wegen der verſchiedenen Brechbarkeit der das Licht bildenden Farbenſtrahlen hat auch jede einfache Glaslinſe für die verſchiedenen

Farben verschiedene, wenn auch nahe bei einander liegende Brennpunkte, und zwar liegt der Brennpunkt für die weniger brechbaren rothen Strahlen entfernter als der für die violetten Strahlen. Das von einer gewöhnlichen Linse erzeugte und auf einem weißen Schirme aufgefangene Bild der Sonne ist deshalb in der Mitte weiß, aber mit einem farbigen Rande versehen.

Um diesem die Reinheit und Schärfe der von einer Linse erzeugten Bilder störenden Umstande einigermaßen abzuhelfen, pflegt man in optischen Instrumenten eine biconvexe und eine convexconcave Linse von Glasarten (Crownglas und Flintglas) zu combiniren, welche ungefähr gleiche brechende, aber verschiedene zerstreuende Kraft haben.

Unter brechender Kraft oder Brechungsvermögen versteht man die Fähigkeit eines Mittels, das Licht von der geradlinigen Bahn abzulenken; unter zerstreuender Kraft oder Zerstreuungsvermögen die Kraft eines Mittels, die das Licht bildenden Farbenstrahlen unter einem größeren oder kleineren Winkel auszubreiten. Solche zusammengesetzten, das Auftreten farbiger Ränder an den durch sie erzeugten Bildern möglichst ausschließenden Linsen nennt man achromatische Linsen. Fügt man zwei Prismen von den genannten Glasarten zusammen und zwar so, daß ihre brechenden Kanten entgegengesetzte Lage haben, so erfährt das durch ein so combinirtes achromatisches Prisma gehende Licht zwar eine Brechung, jedoch keine Farbenzerstreuung.

Die Vollkommenheit der Erscheinung des prismatischen Spec- §. 56.
trums kann man dadurch steigern, daß man das mittels eines Metallspiegels durch einen, etwa verticalen, Spalt in ein übrigens verfinstertes Zimmer reflectirte Sonnenlicht durch ein dem Spalte paralleles Prisma und eine hinter diesem aufgestellte achromatische Linse von großer Brennweite gehen läßt und in einiger Entfernung auf einem weißen Schirme auffängt. Das Spectrum auf dem Schirme ist unter diesen Umständen sehr farbenrein und zeigt eine große Menge zu seiner Längenausdehnung normaler, unregelmäßig vertheilter feiner dunkler Streifen, die sogenannten Fraunhofer'schen Linien.

Ihretwegen, auch mit künſtlichem irdiſchen Lichte angeſtellte Beobachtungen haben ergeben, daß jeder metalliſche Stoff, wenn er innerhalb einer Flamme glüht, in dem Spectrum derſelben einen oder mehrere gewiſſe farbige Streifen verurſacht; daß letztere aber dunkel, gewiſſermaßen verlöſcht werden, wenn man durch die Flamme die Strahlen einer andern intenſiveren Flamme leitet. Jene dunklen Streifen im Sonnenſpectrum verſucht man nun durch die Annahme zu erklären, daß ſich in der Sonnenatmoſphäre Stoffe der erwähnten Art in glühendem, dunſtförmigem Zuſtande befinden, und daß die Farben der Streifen, welche dieſelben an ſich im Sonnenſpectrum verurſachen würden, durch den Durchgang des intenſiveren Lichtes des Sonnenkörpers durch ſeine Atmoſphäre verlöſcht, zu dunklen Streifen umgewandelt werden.

Die Fraunhofer'ſchen Linien ſind auch ſubjectiv durch ein achromatiſches Fernrohr wahrzunehmen, wenn man daſſelbe dicht hinter das Prisma hält und ſo weit ausgezogen hat, daß, wenn man das Prisma beſeitigte, man den Spalt deutlich ſehen kann.

§. 57. Eine die prismatiſchen Farben in großer Pracht zeigende Naturerſcheinung iſt der Regenbogen. Derſelbe wird im niederfallenden Regen ſichtbar, wenn der Beobachter ſich zwiſchen der Sonne und der in Regen niederfallenden Wolke befindet und die Sonne weniger als 42° über dem Horizonte ſteht. Er iſt ein kreisförmiger Bogen von $2^1/_4$° Breite, deſſen Mittelpunkt in einer von der Sonne durch das Auge des Beobachters gezogenen geraden Linie liegt. Er iſt demnach im Horizonte gelegen, wenn auch die Sonne im Horizonte ſteht, unter dem Horizonte, wenn die Sonne über demſelben ſteht. Der Regenbogen zeigt die prismatiſchen Farben in der in §. 48 angegebenen Reihenfolge, jedoch ſo, daß roth nach außen, violett nach innen gelegen iſt. Erſcheint noch ein zweiter ſogenannter Nebenbogen, ſo liegt dieſer außerhalb des Hauptbogens und zeigt die prismatiſchen Farben ſchwächer als dieſer und in umgekehrter Ordnung.

Der Ort, an welchem dieſe Naturerſcheinung ſich dem Beſchauer zeigt, weiſt darauf hin, daß ſie durch Reflexion entſteht; ihre Farbe aber, daß ſie zugleich durch Diſperſion des Sonnenlichtes entſteht. Dieſe findet durch Brechung an den Oberflächen der einzelnen

Tropfen ſtatt, und der Weg, welchen das Licht hierbei zurücklegt, iſt folgender:

Iſt z. B. s z b in Fig. 19 der ſtark vergrößerte Schnitt einer durch die Sonne und das Auge des Beobachters gedachten, etwa lothrechten Ebene mit einem der augenblicklich oberſten Tropfen, welche den Regenbogen erzeugen — wobei die gedachte Ebene offenbar zugleich durch die von der Sonne durch das Auge nach dem Mittelpunkte des Regenbogens denkbare gerade Linie (gewiſſermaßen Regenbogenachſe) geht — und iſt ferner S s ein in derſelben Ebene einfallender Sonnenſtrahl, ſo wird dieſer im Punkte s in die Richtung s z gebrochen; in z tritt er zum Theil aus, zum Theil wird er in die Richtung z b reflectirt; in b wird er wieder zum Theil reflectirt, zum Theil tritt er gebrochen und in das Farbenbüſchel v b r, in welchem die violetten Strahlen in b v, die rothen in b r liegen, diſpergirt aus. Befindet ſich nun in der Richtung b r das Auge des Beſchauers, ſo empfängt dieſes die rothen Strahlen, während die anderen darüber hinweggehen. Indem auf dieſelbe Weiſe die augenblicklich tiefer befindlichen Tropfen das Licht ebenfalls in Farben diſpergiren, müſſen von den unter dem Tropfen s z b zunächſt folgenden anderen Tropfen im ſelben Augenblicke die orangefarbigen, von noch tieferen die gelben u. ſ. w., von den tiefſten reflectirenden Tropfen die violetten Farbenſtrahlen in daſſelbe Auge gelangen. Was nun hier als in einer durch die Sonne, das Auge und die Regenbogenachſe gehenden lothrechten Ebene vorgehend gezeigt worden, geht auch in allen anderen durch die genannten drei Stücke denkbaren ſchiefen Ebenen vor, ſodaß ſich hiermit auch der Bogen, in welchem die Farben erſcheinen, erklärt.

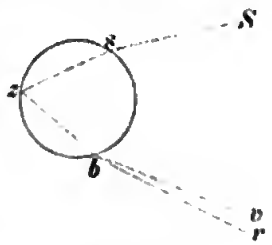

Fig. 19.

Die Erklärung der ſcheinbaren Breite des Regenbogens und die Begründung des Umſtandes, daß dieſe Naturerſcheinung nur bis zu einer gewiſſen Sonnenhöhe ſichtbar werden kann, machen das Betreten des Gebietes der höheren Mathematik nothwendig, wovon hier füglich Abſtand genommen werden muß.

Dem Vorigen ähnlich kommen die Farben des Nebenbogens zur

Erſcheinung. Iſt s z f b in Fig. 20 ein dem obigen gleicher Durchſchnitt eines der augenblicklich oberſten Tropfen des Nebenbogens, ſo macht der Sonnenſtrahl S s durch den Tropfen den Weg s z f b, wobei er zweimal, bei z und bei f, reflectirt wird; bei b tritt er in das Farbenbüſchel r b v, in welchem die rothen Strahlen in b r, die violetten in b v liegen, zerſtreut aus. Wird nun das Auge an demſelben Orte, wie oben, angenommen, ſo gelangen in daſſelbe von dieſem Tropfen die violetten Strahlen, während die anderen Farben darüber hinweggehen. Von den zunächſt tiefer folgenden Tropfen gelangen der Reihe nach die Farben dunkelblau, hellblau, grün u. ſ. w. in das Auge.

Fig. 20.

§. 58. In Bezug auf die bildliche Darſtellung iſt zu bemerken, daß, weil der Regenbogen eine durchaus ſubjective Erſcheinung iſt, derſelbe für jeden Beobachter an einem andern Orte am Himmel ſichtbar wird, und daß derſelbe in bildlichen Darſtellungen deshalb auch nicht objectiv, als Gegenſtand der Wahrnehmung für gewiſſe ſelbſt dargeſtellte Beobachter vorgeführt werden darf, ſondern nur ſo, daß er dem Beſchauer der Darſtellung ſelbſt als ein Kreisbogen erſcheine, d. h., wenn ſein Mittelpunkt mit dem Hauptpunkte der Darſtellung zuſammenfällt, als ein Kreisbogen, andernfalls als ein dem Kreiſe ſehr ähnlicher Kegelſchnitt.

Die im Waſſerſtaube der Waſſerfälle und Springbrunnen wahrnehmbaren Farbenbogen ſind dem Regenbogen völlig gleiche Erſcheinungen.

§. 59. Da die durchſichtigen Körper die das weiße Licht zuſammenſetzenden Farbenſtrahlen, wegen deren Verſchiedenheit hinſichtlich der Wellenlängen und Vibrationsgeſchwindigkeiten, nicht alle in gleichem Verhältniſſe brechen und durchlaſſen können, *ſo iſt mit jeder Brechung eine Farbenzerſtreuung* verbunden, und urſprünglich weißes Licht iſt nach dem Durchgange durch weiße oder farbloſe durchſichtige Körper gefärbt, wenn auch nur in geringem Grade. Als farbloſe durchſichtige Körper, welche das weiße Licht faſt in der ihm eigenen Miſchung, alſo kaum gefärbt, durchzu-

laſſen vermögen, gelten Waſſer und farbloſes, ſogenanntes weißes Glas.

Andere ebenfalls farbloſe durchſichtige Körper haben dieſe Eigen- §. 60.
ſchaft nicht, wie z. B. der Waſſerdampf (welcher ſonſt alle Farbenſtrahlen des weißen Lichtes in gleichem Verhältniſſe durchläßt) *während des Uebergangs in den dunſtförmigen Zuſtand oder während der Rückkehr aus demſelben.* Indem er hierbei die anderen Farben meiſt abſorbirt, läßt er vorzugsweiſe die rothen und gelben Strahlen durch. So entſtehen die Erſcheinungen der *Abend- und Morgenröthe*, welche zu Tageszeiten auftreten, an welchen der in der Atmoſphäre ſchwebende Waſſerdampf ſich in dem gedachten Uebergangszuſtande befindet und die ſchwachen Farben nicht durch das grelle Sonnenlicht verdunkelt werden.

Haben durchſichtige Körper eine gewiſſe Farbe, ſo laſſen ſie be- §. 61.
ſonders die Strahlen ihrer Farbe durch und abſorbiren oder modificiren wenigſtens die anderen. Deshalb ſcheinen Objecte, welche man durch ein farbiges Glas betrachtet, von der Farbe dieſes Glaſes zu ſein.

Die letzterwähnte Modificirung wird merklich an den von weitentfernten Objecten her in das Auge reflectirten Farben. Die helle gelblich weiße Farbe der Spitzen ſehr entfernter Schneeberge vermag wegen ihrer Lichtſtärke die blaue Luftmaſſe ſo weit zu durchdringen, daß ſie dem Auge noch ziemlich erkennbar, wenngleich durch blau modificirt, iſt. Sind jene Spitzen durch die Morgen- oder Abendröthe gefärbt, ſo erſcheinen ſie violettlich. Die dunkleren, weniger lichtſtarken Farben jener Berge aber und der Schattenmaſſen derſelben gelangen kaum merklich verſchieden von der Farbe der Luft in das Auge.

Da bis hierher nur von den mit der *Lichtbrechung* zuſam- §. 62.
menhängenden Farbenerſcheinungen die Rede geweſen, bleibt noch übrig, die bei der *Lichtreflexion* auftretenden anzuführen:

Wegen der mit jeder Reflexion verbundenen Störung der Vibrationsgeſchwindigkeiten der das weiße oder vielmehr farbloſe Licht bildenden einzelnen Farbenſtrahlen *iſt das farbloſe Licht auch nach der Reflexion* etwas geſchwächt und *durch* die dabei ſtatt-

findende Abſorption gewiſſer Farbenſtrahlen gefärbt, was ſelbſt bei der regelmäßigen Reflexion durch gut ſpiegelnde Körper wahrnehmbar iſt.

Mehr noch wird die Abſorption merklich bei der Reflexion farbigen Lichtes. Die auf der Oberfläche ſelbſt der klarſten Gewäſſer ſich geſtaltenden Spiegelbilder ziemlich hell- und reinfarbiger Objecte und des Himmels laſſen deutlich eine Verdunkelung und Trübung der dieſen eigenen Farben erkennen. Die dunklen Farben der Objecte und die Schatten derſelben erſcheinen bei der Spiegelung nicht ſowohl dunkler, als ſtumpfer. Trübe Gewäſſer miſchen, wie farbige Spiegel überhaupt, den Farben der Spiegelbilder die ihrige bei.

§. 63. Hat ein Körper die Eigenſchaft, die das farbloſe Licht bildenden Farbenſtrahlen alle in ziemlich gleichem Verhältniſſe zu reflectiren und zwar ſo, daß dabei zugleich die unerträgliche Ueberreizung, die Blendung, des Auges aufgehoben iſt, ſo nennt man ihn weiß, und das von ihm reflectirte Licht iſt mittels des Prismas in die ſieben prismatiſchen Farben zerlegbar; abſorbirt ein Körper aber einen ſo großen Theil der Farbenſtrahlen, daß der reflectirte Reſt kaum einen Eindruck im Auge hervorbringt, ſo nennt man ihn ſchwarz, mit welcher Bezeichnung man den Begriff der Abweſenheit des Lichtes überhaupt verbindet. Unter grau verſteht man die Vermittelung zwiſchen weiß und ſchwarz, gewiſſermaßen nur eine Trübung.

Weder grau, noch weiß oder ſchwarz haben Anſpruch auf den Namen einer Farbe, denn grau iſt ſtets eine trübe Nüance irgendeiner der prismatiſchen Farben, und weiß und ſchwarz ſind Extreme der Helligkeit und Dunkelheit aller Farben zugleich.

§. 64. Reflectirt ein Körper vorzugsweiſe Lichtwellen von einer gewiſſen Geſchwindigkeit, z. B. der der rothen Farbenſtrahlen, ſo ruft deren Eintreten in das Auge die Vorſtellung der entſprechenden Farbe, hier alſo des Rothen hervor, und man legt dem Körper die wahrgenommene Farbe als eine Eigenſchaft bei. Die blaue Farbe der Luft (des Himmels) läßt annehmen, daß die Lufttheilchen von den das weiße Licht zuſammenſetzenden Farbenſtrahlen vorzugsweiſe die blauen zu reflectiren vermögen. Es geſchieht dies um ſo

vollkommener und ist darum die blaue Farbe der Luft um so reiner, je freier diese von Dünsten, Rauch- und Staubtheilchen ist, wie etwa nach dem Regen. Bei den Erscheinungen der Morgen- und Abendröthe ist die Luft von Wasserdampf (s. §. 60) erfüllt.

Farbestoffe oder Pigmente sind solche Körper, welche eine bestimmte Farbe fast vollständig absorbiren und daher die complementäre Farbe sehr rein und gesättigt reflectiren und, auf andere Körper übertragen, diesen die Eigenschaft mittheilen, wie sie selbst zu reflectiren.

§. 65. Da kein Körper von gewisser Farbe alle anderen Farbenstrahlen gänzlich zu absorbiren vermag und jeder Körper die Vibrationsgeschwindigkeit selbst der von ihm vorzugsweise reflectirten Farbe stört, so sind die reflectirten Farben niemals einfach und völlig rein, wie die des prismatischen Sonnenspectrums, sondern stets gemischt und getrübt.

§. 66. Wird ein Körper nicht von farblosem, sondern von einfarbigem Lichte getroffen, so reflectirt er vorzugsweise dieses, und zwar ziemlich rein, wenn er selbst weiß oder farblos ist. Schneeflächen und Wolken z. B. erscheinen im rothen Abendlichte geröthet. Hat der Körper aber eine bestimmte Farbe, so reflectirt er eine Mischung seiner Farbe mit der des Lichtes. Im gelben Kerzenlichte z. B. zeigen blaue Körper eine grünlichblaue Farbe.

§. 67. Bei Beobachtungen dieser Art hat man sich davor zu hüten, einem Körper unbedingt eine Farbe zuzuschreiben, welche, im Auge möglicherweise durch den Contrast mit anderen Farbenwahrnehmungen hervorgerufen, als sogenannte physiologische Farbe subjectiv zur Wahrnehmung kommt. (S. hierüber §. 108.)

Außer den beiden bisher behandelten, bei der Berührung des Lichtes mit Körpern auftretenden Erscheinungen, der Reflexion und der Brechung, giebt es noch andere Erscheinungen, deren Kenntniß für das Verständniß des Wesens des Lichtes von Wichtigkeit ist, und welche daher, wenn auch nur in Kürze, Erwähnung finden müssen. Es sind dies die durch Interferenz, durch Inflexion und durch Polarisation des Lichtes hervorgerufenen Erscheinungen.

f) Interferenz und Inflexion (Beugung) des Lichtes.

§. 68. Wie Eingangs geſagt, pflanzt ſich das Licht durch wellenartige Schwingungen (Vibration) des Aethers fort, in welche denſelben ein leuchtender Körper verſetzt und welche ein Aethertheilchen dem andern mittheilt. Es iſt dies nicht ſo zu verſtehen, als rückten hierbei die einzelnen Aethertheilchen in der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes mit vor; es bewegen ſich dieſelben vielmehr jedes innerhalb einer zur Fortpflanzungsrichtung normalen Ebene *in allen Richtungen um jene* hin und her.

Bezeichnet z. B. in Fig. 21 die krumme Linie ABCDE....G für einen beſtimmten Moment die Orte A, B, C, D, E u. ſ. w. gewiſſer von der Seite A her erſchütterten Aethertheilchen — wobei für den Augenblick von dem Schwingen derſelben *in allen Richtungen* abgeſehen iſt — ſo ſchwingt das Theilchen A in der Ebene $a\,a^1$, das Theilchen B in der Ebene B b u. ſ. w.; die gerade Linie A G würde die Fortpflanzungsrichtung und die Länge A C die Länge einer Welle bedeuten. Da die Mittheilung der Bewegung eines Aethertheilchens an das andere Zeit erfordert, ſo beginnen die dem leuchtenden Körper ferneren Theilchen C, D und E der Reihe nach ſpäter zu ſchwingen, als die ihm näheren A und B, ſodaß, wenn z. B. B eben den Raum b^1 B durchlaufen hat, um in B nach b umzuwenden, etwa C erſt anfängt, ſich nach c zu bewegen u. ſ. f.

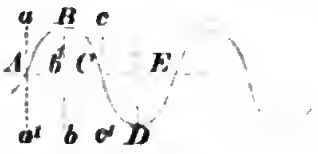

Fig. 21.

§. 69. Von *einem* leuchtenden Körper ausgehende Lichtſtrahlen können wegen ihrer Divergenz an ſich keinerlei Einfluß auf einander ausüben; wohl aber, wenn durch äußere Einwirkung die Richtung eines Theiles derſelben ſo geändert wird, daß ſie ſich ſchneiden können. Zwei ſolcher von einer Lichtquelle ausgehenden, etwa vermittelſt zweier beinahe in *einer* Ebene liegenden Spiegel nach *einem* Punkt reflectirten, nahezu parallelen Strahlen haben, in ihrem Schnittpunkte angekommen, offenbar verſchieden lange Wege durchlaufen. Faßt man nun die Richtung ihrer Vibrationen im Schnittpunkte für

ienen beſtimmten Moment ins Auge, ſo ſind hier unter den vielen möglichen Fällen zwei beſonders wichtig:

Sind z. B. in Fig. 22 die beiden im Punkte e ſich ſchneidenden Linien a b und c d die beiden Lichtſtrahlen, für welche die augenblickliche Lage der ihnen zugehörigen vibrirenden Aethertheilchen durch die geſchlängelten Linien angedeutet ſein möge, ſo bewegen ſich hier die Aethertheilchen beider Strahlen durch den Punkt e hindurch augenblicklich nach einer Richtung.

Fig. 22.

Fig. 23.

Hat aber der eine der beiden Strahlen eine Verzögerung von einer gewiſſen Größe, nämlich einer halben Wellenlänge oder einer ungeraden Zahl halber Wellenlängen erfahren, ſodaß, wie Fig. 23 zeigt, die Wellen entgegengeſetzte Lage haben, ſo bewegen ſich die den beiden Strahlen entſprechenden Aethertheilchen durch den Punkt e hindurch in einem gegebenen Momente in entgegengeſetzter Richtung.

Die Gleichheit der Richtung der Vibrationen im Schnittpunkte hat, der Theorie der Wellenbewegung gemäß, eine Verſtärkung der Vibrationen und alſo auch der Erleuchtung des Schnittpunktortes, die Entgegengeſetztheit der Richtung eine Schwächung oder Aufhebung der Vibrationen, alſo auch der Erleuchtung, zur Folge.

Die von einer derartigen Einwirkung der Lichtſtrahlen auf einander herrührenden Erſcheinungen nennt man Interferenz-Erſcheinungen.

§. 70. Dieſe Erſcheinungen kommen beſonders bei ſtattfindender Beugung des Lichtes zur Wahrnehmung. Der Theorie der Wellenbewegung gemäß erleidet nämlich das Licht beim Vorübergange an ſcharfen Kanten und beim Durchgange durch ſchmale Oeffnungen eine Störung der geradlinigen Fortpflanzungsrichtung, eine Beugung (Inflexion) inſofern, als die in der Oeffnung befindlichen und

erſchütterten Aethertheilchen hier als Mittelpunkte neuer ſich ſeitlich verbreitenden Wellenſyſteme auftreten. Indem ſich hierbei mehr gebeugte Strahlen mit weniger gebeugten ſchneiden, interferiren ſie.

§. 71. Objectiv beobachten kann man dieſe Erſcheinung, wenn man einfarbiges Licht, alſo etwa durch rothes Glas gegangenes Sonnenlicht, durch einen ſchmalen Spalt in ein übrigens verfinſtertes Zimmer eintreten und in einiger Entfernung, etwa 6—9 Fuß weit von dem Spalte, durch einen, dieſem parallelen, zweiten ſehr feinen Spalt eines am beſten metallenen Schirmes gehen läßt und in einiger Entfernung hinter dieſem auf einem weißen Schirme auffängt. Es zeigt ſich hier alsdann nicht allein ein heller, dem Spalte paralleler rother Lichtſtreifen, ſondern nach den beiden Seiten deſſelben hin außerdem noch mehrere durch dunkle Streifen getrennte, an Helligkeit allmählich abnehmende rothe Lichtſtreifen. Für die verſchiedenen Farben haben dieſe hellen und dunklen Streifen verſchiedene Breite; im rothen Lichte ſind ſie am breiteſten, im violetten Lichte am ſchmälſten. Dieſer Umſtand erklärt es, daß, wenn man ſtatt einfarbigen Lichtes das ſogenannte weiße Sonnenlicht durch den Spalt gehen läßt, ſich keine dunklen Streifen, ſondern neben dem mittleren ſehr hellen Lichtſtreifen prismatiſch gefärbte Säume zeigen; denn hier fallen die hellen Streifen der verſchiedenen, das weiße Licht zuſammenſetzenden Farben ſo dicht neben einander, daß ſie die dunklen aufheben.

§. 72. Bequemer noch kann man eine durch Inflexion hervorgerufene Interferenz-Erſcheinung ſubjectiv beobachten, wenn man durch ein ſehr feines, durch ein Stanniolblättchen geſtochenes kreisrundes Loch nach dem in einer kleinen Thermometerkugel geſpiegelten Bilde der Sonne blickt. Es entſteht dann auf der Netzhaut des Auges eine der vorigen analoge Lichterſcheinung. Man nimmt hier nämlich, weil die das Licht durchlaſſende Oeffnung kreisrund iſt, einen hellen kreisrunden, von concentriſchen Farbenringen umgebenen Fleck wahr.

§. 73. Am leichteſten und einfachſten beobachtet man die Inflexions-Erſcheinung durch die Augenwimpern, indem man durch dieſelben nach einer Flamme blickt.

Auf der Inflexion des Lichtes beruht auch das Farbenſpiel der Perlmutter, der Flügeldecken mancher Inſekten u. dgl. m., kurz ſolcher Körper, deren Oberflächen durch ſehr feine Furchen durchzogen ſind.

Durch Interferenz ſind die Farbenerſcheinungen zu erklären, §. 74.
welche Körper von ſehr geringer Dicke, dünne Schichten, hervorbringen, z. B. Seifenblaſen, dünne Fiſchſchuppen, eine dünne Schicht auf Waſſer ſchwimmenden Oeles u. dgl. m. Es iſt hier nämlich Interferenz folgendermaßen nachweisbar: Stellen z. B. in Fig. 24 die Linien C D und E F die Oberflächen eines der in Rede ſtehenden, hier ſtark vergrößerten Körpers vor, ſo wird ein auf denſelben einfallendes Lichtſtrahlenbündel L r bei r zum Theil in die Richtung r A reflectirt, zum Theil dringt es, in die Richtung r b gebrochen in den Körper ein. Der eingedrungene Theil r b tritt bei b zum Theil gebrochen aus, zum Theil wird er in die Richtung b s reflectirt. Der Theil b s wird in s abermals theils reflectirt, theils tritt er, in die Richtung s A gebrochen und, wegen der Dünne des Körpers, mit dem bei s einfach reflectirten Strahle s A faſt zuſammenfallend, aus. Wegen der Verzögerung — ſie beträgt jedesmal eine halbe Wellenlänge, wenn das Licht an der Grenze eines dichteren Mittels durch ein dünneres geſpiegelt wird — welche er im Vergleich mit dem einfach reflectirten Strahle s A erfahren, interferirt er mit dieſem, und wegen der den verſchiedenen Farbenſtrahlen entſprechenden verſchiedenen Wellenlängen verſtärken ſich hierbei einige der Farben, andere ſchwächen ſich, und befindet ſich in der Richtung nach A hin ein Auge, ſo kommen in demſelben die verſtärkten Farben vor den anderen zur Wahrnehmung. Eine geringe Aenderung in der Dicke der Schicht verurſacht demgemäß auch andere Farbenerſcheinungen.

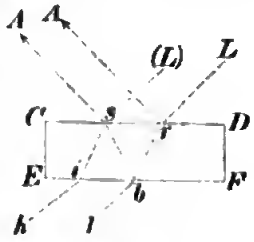

Fig. 24.

Ebenſo ſind die ſogenannten Newton'ſchen Farbenringe zu §. 75.
erklären, welche ſichtbar werden, wenn man eine Glaslinſe von geringer Krümmung auf eine ebene Glasplatte drückt. Hier verurſacht die zwiſchen beiden Gläſern vorhandene dünne Luftſchicht, welche

von allmählich abnehmender Dicke iſt, die Interferenz der nahezu parallel in das Auge gelangenden, theils von ihrer oberen, theils von ihrer unteren Grenzfläche reflectirten Strahlen.

§. 76. Außer den reflectirten Strahlen interferiren auch, nur ſchwächer wahrnehmbar, die von dünnen Schichten durchgelaſſenen Strahlen (b l und i h in Fig. 24) und zeigen dann die complementären Farben zu denen der interferirten reflectirten Strahlen.

g) Polariſation des Lichtes.

§. 77. Dem in §. 4 Geſagten gemäß wird ein auf eine Glastafel einfallender Lichtſtrahl von dieſer zum Theil reflectirt, zum Theil durchgelaſſen, gewiſſermaßen alſo in zwei Theile geſpalten. Beträgt der Neigungswinkel des einfallenden Strahles gerade 35½°, ſo bekommt ſowohl der durchgelaſſene als der reflectirte Theil — dieſer jedoch in vollkommenerem Grade — eine hiernächſt zu erörternde Eigenſchaft, welche der einfallende Strahl ſelbſt nicht hat und wegen welcher man die beiden Strahlentheile polariſirt nennt.

Läßt man nämlich zunächſt den reflectirten Theil auf eine zweite Glastafel fallen, welche der erſten reflectirenden Glastafel parallel iſt, ſo wird er von derſelben wiederum reflectirt; dreht man ſie aber ſo um den reflectirenden Punkt, daß ſie fortwährend denſelben Winkel mit dem reflectirten (polariſirten) Strahle bildet, ſo wird dieſer, wenn die Drehung 90° oder 270° beträgt, von ihr nicht wieder reflectirt, wohl aber, wenn die Drehung 180° beträgt. Fig. 25, in welcher L r den unter 35½° (Neigungswinkel) einfallenden, r p den polariſirten Strahl vorſtellt, veranſchaulicht die Stellung der zweiten Glastafel in dem Falle, daß ſie nicht gedreht iſt, Fig. 26 die Stellung derſelben in dem Falle, daß ſie um 90° gedreht iſt.

Fig. 25.

Fig. 26.

§. 78. Während alſo ein von der Lichtquelle direct einfallender Strahl von einer Glastafel, wie dieſelbe auch bei fortwährend

gleichem Neigungswinkel um den reflectirenden Punkt gedreht wird, ſtets mit gleicher Intenſität reflectirt wird, iſt die abermalige Reflexion eines unter den oben angegebenen Umſtänden *reflectirten* (polariſirten) Strahles in zwei Fällen gänzlich aufgehoben. Man erklärt dieſe Erſcheinung durch die Annahme, daß durch einen polariſirten Strahl die Aethertheilchen nicht wie durch den direct einfallenden Strahl *nach allen Seiten* um die Fortpflanzungsrichtung ſchwingen, ſondern — wie in Fig. 27, wo *L r* den auf die Glastafel *A B C* einfallenden Strahl vorſtellt, angedeutet iſt — *in einer Ebene* (*E F G H*), welche normal zu der Reflexionsebene (zugleich Polariſationsebene) des einfallenden Strahles iſt, und daß auch dieſe Schwingungen aufgehoben werden, wenn ſie auf eine Glastafel ſtoßen, deren Reflexionsebene für den polariſirten Strahl mit der Polariſationsebene einen rechten Winkel bildet. Dieſe Erklärung entſpricht auch zugleich der Erſcheinung, daß polariſirte Strahlen, wenn ihre Polariſationsebenen mit einander einen rechten Winkel bilden, mit einander nicht interferiren; ſie erzeugen vielmehr unter Umſtänden circular- oder elliptiſch-polariſirtes Licht.

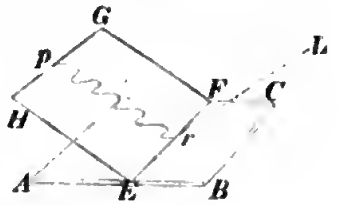

Fig. 27.

§. 79. Läßt man einen Lichtſtrahl unter einem andern Winkel als $35\frac{1}{2}°$ auf eine Glastafel fallen, ſo wird er unvollſtändig polariſirt, d. h. er wird bei der unter den oben angeführten Umſtänden ausgeführten Drehung der zweiten reflectirenden Glastafel nicht gänzlich aufgehoben.

Für andere reflectirende Stoffe als Glas iſt die Größe des Polariſationswinkels eine andere. Metalle vermögen das Licht überhaupt nur unvollſtändig zu polariſiren.

§. 80. Außer an dem reflectirten Theile des unter $35\frac{1}{2}°$ auf die Glastafel einfallenden Strahles iſt auch an dem durchgelaſſenen Theile deſſelben eine, jedoch nur unvollſtändig erfolgte Polariſation nachweisbar. Es läßt ſich dieſe vervollkommnen, wenn man den durchgelaſſenen Strahl durch mehrere parallele Glasplatten gehen läßt. Die Schwingungen des durchgelaſſenen polariſirten Strahles geſchehen in einer Ebene, welche normal zu der der Schwingungen des reflectirten polariſirten Strahles iſt.

Ein Eingehen auf die im polariſirten Lichte auftretenden, an ſich äußerſt intereſſanten Farbenerſcheinungen würde, da ſie für die künſtleriſche Wahrnehmung nie in Betracht kommen, zu weit von der Aufgabe dieſer Blätter abführen, und muß deshalb dem Intereſſe des Einzelnen überlaſſen bleiben.

Zweites Kapitel.

Das menſchliche Auge.

a) Die Camera obſcura.

§. 81. Um das Verſtändniß der Einrichtung des menſchlichen Auges zu erleichtern, iſt es zweckmäßig, zuvor einen Apparat zu betrachten, welcher die Erſcheinungen, mit welchen die Thätigkeit des Auges, insbeſondere des Augapfels, in Zuſammenhang ſteht, in größerer Einfachheit vorführt. Dieſer Apparat iſt die ſogenannte Camera obſcura.

Im Allgemeinen kann man jeden hohlen Körper, in deſſen Inneres durch eine beſondere Oeffnung Licht dringen kann, als eine Camera obſcura in roheſter Verfaſſung anſehen.

§. 82. Läßt man das Licht eines leuchtenden Punktes, z. B. einer ſehr kleinen Flamme, durch eine kleine Oeffnung in das Innere eines etwa würfelförmigen Kaſtens dringen, ſo wird von allen von dem Punkte ausgehenden Lichtſtrahlen nur ein kleines Bündel von einem der Begrenzungsfigur der Oeffnung entſprechenden Querdurchſchnitte eingelaſſen. Iſt die Oeffnung rund, ſo iſt das Strahlenbündel kegelförmig, iſt die Oeffnung eckig, ſo iſt das Bündel pyramidenförmig; in jedem Falle erleuchtet daſſelbe auf der der Oeffnung gegenüberſtehenden Wand eine der Oeffnung ähnlich begrenzte Stelle. So erleuchtet die in ein Zimmer ſcheinende Sonne auf dem Fußboden oder auf einer der Wände eine der Figur des Fenſters entſprechend begrenzte Stelle.

§. 83. Läßt man das Licht eines leuchtenden Körpers von gewiſſen Dimenſionen durch die Oeffnung dringen, ſo erleuchtet

jeder Punkt des Körpers eine der Figur der Oeffnung ähnlich begrenzte Stelle; da jedoch dieſe hellen Stellen in einer ſolchen Ordnung neben einander liegen, wie die leuchtenden Punkte des Körpers ſelbſt, und ſie ſich zudem größtentheils decken, ſo wird der Einfluß der Figur der Oeffnung faſt aufgehoben und es entſteht, wenn die Oeffnung nicht zu groß iſt, auf der ihr gegenüberſtehenden Wand ein mehr oder weniger ſcharf begrenztes, jedoch ziemlich deutliches, umgekehrt ſtehendes Bild des leuchtenden Körpers.

Iſt z. B. in Fig. 28 der Stab S B ein ſolcher vor der kleinen kreisrunden Oeffnung O des Kaſtens C M E R befindlicher Körper, und man nimmt von allen leuchtenden Punkten deſſelben der Einfachheit wegen nur die vier Punkte S, T, A und B in Betracht, ſo vermag von allem von dem Punkte S ausgehenden Lichte nur ein kleines Strahlenbündel durch die Oeffnung O zu dringen und auf der Wand M E eine kreisrunde Stelle s, natürlich mit der dem Punkte S eigenen Lichtfarbe, zu erleuchten. Auf gleiche Weiſe werden die Stellen t, a und b von dem von den entſprechenden Punkten T, A und B ausgehenden Lichte, und ebenſo auch alle anderen zwiſchen s und b liegenden Stellen erleuchtet. Da in der Oeffnung O die Strahlenbündel ſich kreuzen, ſo muß das aus der Summe der erleuchteten Stellen auf der Wand M E entſtehende Bild ein umgekehrtes ſein. Iſt die Wand M E der Oeffnung ſo nahe wie der Stab ſelbſt, ſo muß das Bild ſo groß wie dieſer ſein; iſt die Wand der Oeffnung näher, ſo muß das Bild kleiner, im entgegengeſetzten Falle größer ſein.

Fig. 28.

Hiernach iſt es auch zu erklären, daß, wenn die Sonne durch ſehr kleine Lichtungen des Laubes der Bäume ſcheint, die auf dem Boden erleuchteten Stellen ſtets kreisrund, nämlich Bilder der Sonne ſind.

Stellt man die der Oeffnung gegenüberſtehende Wand aus einem das Licht einigermaßen durchlaſſenden Stoffe, etwa aus mattem Glaſe oder geöltem Papiere her, ſo wird das hierauf fallende Bild einem außerhalb des Kaſtens befindlichen Auge ſichtbar.

§. 84. Alle in einem Apparate von dieſer einfachen Einrichtung entſtehenden Bilder leiden jedoch an dem Uebelſtande, daß, wegen der Kleinheit der Oeffnung, ihre Lichtſtärke ſehr gering iſt und, wegen der Ausbreitung der von den einzelnen Punkten eines Objectes her eindringenden Strahlenbüſchel, die Umriſſe unbeſtimmt ſind. Es wird dem dadurch abgeholfen, daß man, wie in Fig. 29, die Oeffnung O vergrößert und darin einen eine Sammellinſe enthaltenden, an den Grundflächen offenen Cylinder K I anbringt, welcher je nach der Entfernung der zu beobachtenden Objecte ſo weit ausgezogen oder eingeſchoben werden kann, daß der Vereinigungspunkt der durch die Linſe nunmehr convergirend eindringenden Strahlen genau auf die Wand M E fällt. Aus der Figur iſt leicht zu erkennen, daß durch die größere Oeffnung O ein größeres Strahlenbüſchel von irgendeinem Punkte S des Stabes S B her eindringen kann, und daß die Grenzen dieſes Büſchels nicht wie in Fig. 28 ſich innerhalb des Kaſtens erweitern, ſondern durch die brechende Kraft der Linſe zu einem Punkte s auf der Wand M E vereinigt werden. Es muß daher das Bild jedes einzelnen Punktes eines Objectes und deshalb auch das von dieſem ſelber an Lichtſtärke und Beſtimmtheit der Begrenzung gewinnen.

Fig. 29.

§. 85. Der in dieſem Apparate gewöhnlich noch angebrachte, gegen die die Oeffnung enthaltende Wand unter 45° geneigte Spiegel, M R in Fig. 29, durch welchen je nach ſeiner Lage das Bild (in der Figur σβ) nach einer beliebigen Wand des Kaſtens (in der Figur nach der Wand C M) reflectirt wird, dient dazu, die umgekehrte Stellung des Bildes aufzuheben, und vermittelt zugleich eine bequemere Art der Betrachtung deſſelben.

Fügt man an Stelle der Wand, auf welche das Bild fällt, matt geſchliffenes Glas oder durchſichtiges Papier ein, und zeichnet darauf die Umriſſe des Bildes nach, ſo erhält man eine richtige perſpectiviſche Darſtellung des Objectes, ſoweit nicht darin durch die Krümmung der Glaslinſe eine Abweichung verurſacht iſt.

Der Kaſten, in welchem die Daguerreotypbilder aufgenommen werden, iſt ebenfalls eine Camera obſcura, deren Bilder auf chemiſchem Wege fixirt werden.

Eine Camera obſcura in höchſter Vollendung iſt der menſchliche Augapfel. Die nächſten Paragraphen werden zeigen, inwiefern derſelbe der Camera obſcura, wenn man den letztgedachten Spiegel hieraus entfernt, ähnlich eingerichtet iſt und wie einfach ſich die Entſtehung der Bilder im Auge durch die Camera obſcura erklärt.

b) Das Auge.

§. 86. In den Augenhöhlen des Kopfes, welche zwei Pyramiden zu vergleichen ſind, deren Grundflächen an der Geſichtsfläche liegen und deren Spitzen, ſich einander nähernd, nach dem Hinterkopfe gerichtet ſind, liegen die Augäpfel, innerhalb der Augenhöhlen umgeben von weichem, Fett enthaltendem Zellgewebe, nach vorn geſchützt durch die Augenlider. Sie ſind durch Muskeln nach allen Seiten um ihre Mittelpunkte drehbar.

§. 87. Der Augapfel iſt faſt kugelförmig und hat ungefähr 1 Zoll Durchmeſſer. Er iſt außen — ſ. Fig. 30, welche den Horizontaldurchſchnitt des linken Augapfels in natürlicher Größe darſtellt — bis auf eine kleine Ausdehnung von einer undurchſichtigen, harten, weißen Haut, s (Sclerotica), dem „Weißen im Auge", umkleidet. Sie geht nach vorn in die etwa ein Sechstel des Umfanges des Augapfels einnehmende farbloſe und durchſichtige Hornhaut (Cornea) c über, die, wie ein Segment einer kleineren Kugel, nach außen gewölbt vortritt. Hinter der Hornhaut iſt die Regenbogenhaut (Iris) i, deren bläuliche, grünlichgraue oder braune, in ſeltenen Fällen röthliche Farbe durch die Hornhaut hindurch ſichtbar iſt, faſt eben ausgeſpannt. Ziemlich in ihrer Mitte, jedoch der Naſe etwas näher, iſt eine kreisrunde Oeffnung P, das Sehloch oder die Pupille, durch welche das Licht in das Innere des Augapfels eingelaſſen wird und welche ſelbſt ſchwarz erſcheint. Hinter der Iris liegt in einer eigenen, mit ihren

Fig. 30.

Rändern an der inneren Bedeckung des Augapfels befeſtigten, häutigen Kapſel die völlig durchſichtige und farbloſe Kryſtalllinſe (Lens crystallina) L. Dieſelbe iſt biconvex, jedoch nach vorn minder ſtark gewölbt, als nach hinten.

Die innere Oberfläche des Augapfels bis in die Nähe der Kryſtalllinſe wird durch die Netzhaut (Retina) r gebildet, eine feine, weiche, röthliche Haut, welche als eine im Innern des Augapfels ſich ausbreitende Fortſetzung des aus dem Gehirn kommenden, die weiße und die ſogleich zu erwähnende Aderhaut hinterwärts, der Naſe etwas näher, durchbohrenden Sehnerven (Nervus opticus) n zu betrachten iſt. Zwiſchen der weißen Haut und der Netzhaut liegt die Aderhaut (Choroidea) a, gebildet durch ein Gewebe von Blutgefäßen. Sie iſt von einem ſchwarzen, ſchleimartigen Farbeſtoffe überzogen, deſſen Dunkelheit jede Reflexion innerhalb des Augapfels aufhebt. Eine der Kryſtalllinſe ſich nähernde Fortſetzung dieſer Haut bildet den Strahlenkörper (Corpus ciliare) p, welcher den Rand der Kryſtalllinſe ringartig umgiebt.

Der Raum zwiſchen der Kryſtalllinſe und der Hornhaut iſt ausgefüllt durch die vollkommen durchſichtige wäſſerige Feuchtigkeit (Humor aqueus) h, ſodaß davon die Iris auf ihren beiden Flächen umgeben iſt. Den inneren Raum des Augapfels zwiſchen der Kryſtalllinſe und der Netzhautfläche füllt der kugelförmige, nur vorn von der Kryſtalllinſe etwas ausgehöhlte Glaskörper (Corpus vitreum) g aus, beſtehend aus einer gallertartigen, völlig durchſichtigen Feuchtigkeit, der Glasfeuchtigkeit (Humor vitreus), welche von einer zarten durchſichtigen Haut umſchloſſen iſt.

§. 88. Die Functionen der angeführten Organe ſind folgende:

Die Hornhaut, die wäſſerige Feuchtigkeit, die Kryſtalllinſe und der Glaskörper haben die Beſtimmung, das durch die Hornhaut eindringende Licht allmählich ſo zu brechen, daß das etwa von einem Punkte herrührende, divergirend in das Auge tretende Lichtſtrahlenbüſchel auf der Netzhaut wieder zu einem Punkte, als dem Bilde des außerhalb befindlichen Punktes, vereinigt werde. In Verbindung miteinander wirken die vier genannten Organe wie Eine achromatiſche Sammellinſe, ähnlich der Linſe in der Camera obſcura.

Die Hornhaut hat das Vermögen, ſich, je nach der Entfernung des zu ſehenden Gegenſtandes und der demnach nöthigen ſtärkeren oder ſchwächeren Brechung der von ihm ausgehenden Strahlen, gewölbter oder flacher zu geſtalten. Den hierbei eintretenden Veränderungen des Raumes hinter der Hornhaut folgt die denſelben ausfüllende wäſſerige Feuchtigkeit und unterſtützt durch dieſe ihre eigene Geſtaltveränderung die Thätigkeit der Hornhaut.

Der Strahlenkörper ſcheint das Vermögen zu beſitzen, die brechenden Medien des Auges hinſichtlich ihrer Stellung und Form und dabei die Tiefe des Augapfels von der Hornhaut bis zur Netzhaut zu verändern, ſodaß er das Brechungsvermögen der Medien verſtärken oder vermindern kann.

Durch die Oeffnung der Iris, die Pupille, dringt das durch die Hornhaut und die wäſſerige Feuchtigkeit ſchon gebrochene Licht in das Innere des Augapfels. Indem die Iris dieſe Oeffnung zu vergrößern oder zu verkleinern vermag, dient ſie, je nachdem das eindringende Licht zu ſchwach oder zu ſtark iſt, um ein deutliches Sehen zuzulaſſen, dazu, ein größeres oder kleineres Lichtbüſchel in das Auge einzulaſſen. Zugleich fängt ſie, da der Durchmeſſer der Pupille gewöhnlich kleiner iſt als der der Kryſtalllinſe, vor dieſer die Randſtrahlen (ſ. §. 39) auf. Das der Hornhaut, dem Strahlenkörper und der Iris beiwohnende Vermögen, ihre Geſtalt zu verändern, um das Auge für gewiſſe Umſtände *einzurichten*, nennt man das *Einrichtungsvermögen* des Auges. §. 89.

Die Netzhaut vertritt im Auge die der Oeffnung gegenüberliegende Wand der Camera obſcura. Auf ihr entſtehen, wie in dieſem Apparate, von allen vor dem Auge befindlichen Objecten vollkommen treue Bilder (*natürliche* oder *phyſiſche Bilder*, *Netzhautbilder*). Das Auftreten derſelben kann man auf der Netzhaut eines aufgeſchnittenen großen Thierauges, etwa dem eines Rindes, objectiv beobachten. Während jedoch die hier wie in der Camera obſcura auftretenden Bilder als objective Erſcheinungen für ein außerhalb befindliches Auge daſtehen, vertritt die Netzhaut in Verbindung mit dem Sehnerven, gewiſſermaßen durch Betaſtung des Bildes, dieſes Auge zugleich mit. Den verſchiedenartigen Reiz §. 90.

nämlich, welchen die verſchiedenen Schwingungen des auf die Netzhaut treffenden Lichtes hier verurſachen, pflanzt der Sehnerv in das Gehirn fort, und hier, im Centralorgan für den Verkehr mit der Außenwelt, entſteht dadurch eine hinſichtlich der räumlichen Ausdehnungen ſich auf Erfahrung gründende Vorſtellung (*ſcheinbares Bild*) von dem das Netzhautbild verurſachenden Objecte — ein Vorgang, welchen man *Sehen* nennt.

§. 91. Wie in der Camera obſcura iſt das auf die Netzhaut fallende Bild verkleinert und verkehrt. Daß man die natürlichen Gegenſtände dennoch nicht verkehrt, ſondern aufrecht *ſieht*, und an ihnen größere Dimenſionen wahrnimmt, als das phyſiſche Bild ſelbſt hat, erklärt ſich wohl daraus, daß die Bilder im Augapfel eben nicht, wie die in der Camera obſcura, von einem außerhalb deſſelben befindlichen Auge geſehen werden und daß auch die Empfindung auf der Netzhaut ebenſo wenig als die Körperlichkeit dieſer ſelbſt dem Sehenden zum Bewußtſein kommt. Hauptſächlich aber beruht die Uebereinſtimmung der Wahrnehmung mit der Wirklichkeit auf einem *Urtheil*, welches ſich auf die von früheſter Kindheit an durch den Taſtſinn ausgebildete *Erfahrung* ſtützt.

Auch hinſichtlich der Größe und Entfernung der Objecte geben Erfahrung und augenblickliches Vergleichen den Anhalt zu einem Urtheil darüber, ob ein Lichtreiz im Auge von einer gewiſſen Ausdehnung von einem ſehr kleinen nahen, oder ſehr entfernten großen Objecte herrühre. Ein Mehreres hierüber enthält §. 123.

§. 92. Die Erregbarkeit der Netzhaut iſt am größten um den Punkt herum, in welchem eine durch den Mittelpunkt der Pupille und den Mittelpunkt des Augapfels gedachte gerade Linie, die ſogenannte *Augenachſe*, ſie berührt. Wegen dieſer größeren Empfindlichkeit und weil an der gedachten Stelle das in das Auge gedrungene Licht die Netzhaut nahezu rechtwinklig trifft und darum das phyſiſche Bild weniger verzerrt projicirt, als an anderen Stellen der Netzhaut, wo das Licht ſchief einfällt, und endlich weil das Einrichtungsvermögen der Hornhaut, des Strahlenkörpers und der Iris hauptſächlich für das Bedürfniß dieſer empfindlichen Stelle thätig iſt: *richtet* der Sehende unwillkührlich die Augen ſo, daß deren Achſen genau auf

den zu ſehenden Punkt gerichtet ſind und demnach das Bild des Objectes, welchem der Punkt angehört, möglichſt auf die empfindlichere Stelle der Netzhaut jedes Auges fallen muß.

§. 93. Da nach dem Obigen die Hornhaut und die von der Thätigkeit des Strahlenkörpers mitabhängigen Medien einer Veränderung fähig ſind, ſodaß ſie von Punkten naher oder ferner Objecte mehr oder weniger ſtark divergirend eintretende Lichtbüſchel ſtets in dem Grade zu brechen vermögen, daß die Vereinigung der Strahlen zu Punkten gerade auf der Netzhaut ſtattfindet, iſt es erklärlich, daß ein normales Auge bis zu einem gewiſſen Grade nahe und ferne Objecte nach einander mit gleicher Deutlichkeit ſehen kann. Gleichzeitig oder in zu ſchneller Abwechſelung nahe und entfernte Objecte mit gleicher Deutlichkeit zu ſehen, iſt deshalb nicht möglich, weil der Einrichtungsproceß der einer Veränderung fähigen Organe jedesmal eine beſtimmte, wenn auch nur kurze Zeit erfordert.

§. 94. In nicht normalen Augen, wie in denen der Kurzſichtigen und der Fernſichtigen, iſt das Einrichtungsvermögen entweder von Natur oder durch Schwächung in dem Grade beſchränkt, daß die Vereinigung der von einem Punkte her eindringenden Lichtſtrahlen zu einem Punkte auf der Netzhaut nicht gelingt. Es entſtehen deshalb auf dieſer ebenſo unbeſtimmt begrenzte Bilder, wie in der Camera obſcura, wenn in dieſer die Linſe ſo weit ausgezogen oder ſo weit eingeſchoben iſt, daß ihr Brennpunkt, der Vereinigungspunkt aller gebrochenen Strahlen, nicht auf der das Bild auffangenden Wand, ſondern vor oder hinter dieſer liegt.

Iſt z. B. A in Fig. 31 ein normales Auge, L ein leuchtender Punkt, ſo findet, ſobald die betreffenden Organe ſich entſprechend eingerichtet haben, die Vereinigung der von L ausgehenden Strahlen zu einem Punkte genau auf der Netzhaut in l ſtatt. Iſt A aber ein kurzſichtiges Auge, wobei die Hornhaut ſtärker gekrümmt ſein müßte, ſo findet die Vereinigung der von einem Punkte L^1 ausgehenden Strahlen, trotz aller Anſtrengungen

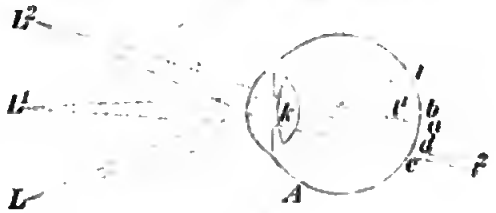

Fig. 31.

der mit Einrichtungsvermögen begabten Organe, etwa in l^1, also vor der Netzhaut ſtatt, und auf dieſer entſteht, wegen der ſchon in l^1 ſtattgehabten Kreuzung der gebrochenen Strahlen, ein ſogenannter Zerſtreuungskreis von dem Durchmeſſer ab, nämlich ein unbeſtimmtes Bild des Punktes L^1. Iſt aber A das Auge eines Fernſichtigen, wobei die Hornhaut weniger gekrümmt ſein müßte, und iſt L^2 der leuchtende Punkt, ſo geſchieht das Nämliche, mit dem Unterſchiede, daß der Vereinigungspunkt l^2 hier hinter der Netzhaut liegt.

§. 95. Um dieſen Schwächen des Sehorganes zu Hülfe zu kommen, müſſen demnach die für Kurzſichtige gebräuchlichen Brillen concav geſchliffene Gläſer, Zerſtreuungslinſen, haben, damit die in das zu ſtark brechende Auge gelangenden Strahlen ſchon ſtärker divergirend eintreten und ſonach erſt auf der Netzhaut vereinigt werden. Die Brillen für Fernſichtige müſſen hingegen mit convexen Gläſern, Sammellinſen, verſehen ſein, damit die Lichtſtrahlen bereits weniger divergirend eintreten und deshalb in kürzerer Entfernung, ſchon auf der Netzhaut, vereinigt werden.

§. 96. Das den brechenden Organen eines normalen Auges beiwohnende Einrichtungsvermögen iſt nicht unbeſchränkt. Befindet ſich ein Object in ſehr großer Nähe zum Auge, ſo divergiren die äußeren Strahlen der von den einzelnen Punkten des Objectes her in das Auge eingelaſſenen Lichtbüſchel, ſelbſt bei der ſtärkſten Verengerung der Pupille ſtärker, als es der Fall wäre, wenn das Object ſich in größerer Entfernung befände. Dieſe ſtarke Divergenz der Strahlen vermögen die brechenden Organe nur ſo lange zu überwinden, als das Object ſich nicht näher als 8—10 Zoll zum Auge (die richtige Sehweite) befindet; im andern Falle vermögen ſie die Vereinigung der Strahlen nicht auf der Netzhaut zu bewerkſtelligen, es entſtehen auf dieſer Zerſtreuungskreiſe und das Auge ſieht undeutlich. Augen, welche eine größere Annäherung des Objectes zulaſſen oder erfordern, ſind kurzſichtig.

§. 97. Ein Object in größerer Nähe, als die richtige Sehweite erfordert, kann jedoch einem normalen Auge deutlicher ſichtbar werden, wenn es durch eine kleine Oeffnung in einem dunklen Schirme, etwa einen

Nadelſtich in einem Kartenblatte, geſehen wird. In dieſem Falle dringen nur feine Lichtbüſchel, deren äußere Strahlen in ſo geringem Grade divergiren, in das Auge, daß ſie hierin hinreichend gebrochen werden können. Da jedoch ſolche Lichtbüſchel nur ſehr ſchmal ſind, iſt das Netzhautbild auch nur wenig hell und die Wahrnehmung unvollkommen. Am zweckmäßigſten hebt man die ſtarke Divergenz der Strahlen von einem Objecte in zu großer Nähe zum Auge dadurch auf, daß man eine Sammellinſe von kurzer Brennweite, eine Lupe, zwiſchen das Auge und das Object bringt, wonach die Strahlen ſchon inſoweit gebrochen in das Auge eintreten, daß die brechenden Organe die Brechung vervollſtändigen können. Zugleich tritt hierbei kein Lichtverluſt ein.

§. 98. Um die Stelle der Netzhaut leicht beſtimmen zu können, auf welche das phyſiſche Bild von irgendeinem außerhalb des Auges gegebenen leuchtenden Punkte fallen müſſe, hat man einen Punkt im Auge, den ſogenannten Kreuzungspunkt, ermittelt, welcher ſo gelegen iſt, daß eine von dem gegebenen leuchtenden Punkte aus durch ihn gezogene gerade Linie die Netzhaut gerade in dem Punkte trifft, auf welchen das phyſiſche Bild des leuchtenden Punktes fällt. Dieſer Kreuzungspunkt, in den Figuren 30 und 31 durch k bezeichnet, liegt in der Achſe der Kryſtalllinſe, dicht an der hintern Fläche derſelben.

§. 99. Iſt demnach ein gewiſſes Object außerhalb des Auges gegeben, ſo iſt es nicht ſchwer, die Ausdehnung des ihm entſprechenden Netzhautbildes zu beſtimmen. Iſt z. B. A in Fig. 32 das Auge,

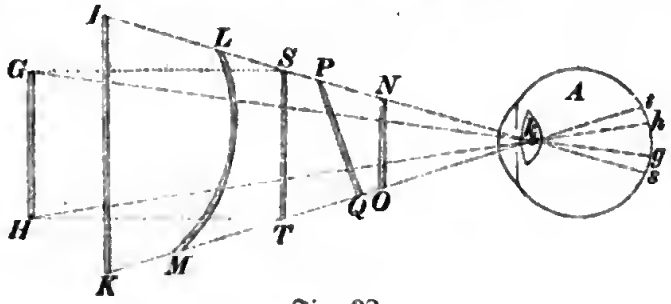

Fig. 32.

S T ein davor befindlicher lothrechter Stab, ſo iſt nach dem Vorigen t das phyſiſche Bild des Punktes T, s das Bild des Punktes S, und ſind die zwiſchen t und s gelegenen Punkte die Bilder der zwiſchen T und S gelegenen Punkte des Stabes.

Die Linien s S und t T, sowie überhaupt alle durch den Kreuzungspunkt k und irgendwelche Punkte des Objectes denkbaren geraden Linien nennt man hierbei **Gesichtslinien**, den Winkel S k T den **Gesichtswinkel** des Objectes.

§. 100. Es ergiebt der Anblick der Fig. 32 und bedarf keiner Erläuterung, daß die dort vorgeführten anderen Objecte, sowohl der entferntere gerade und lothrechte Stab I K, als der nähere gerade und lothrechte Stab N O, und der schiefstehende Stab P Q und auch der krumme Stab L M, sofern diese alle nur in Einer Ebene mit dem Stabe S T und dem Kreuzungspunkte k sich befinden, Netzhautbilder verursachen müssen, welche mit dem von S T verursachten Bild s t räumlich zusammenfallen. **Verschieden große und verschieden entfernte Objecte also verursachen, wenn sie gleich große Gesichtswinkel haben, gleich große Netzhautbilder** und das Auge würde an der Ausdehnung dieser allein nicht im Stande sein, einen Unterschied zwischen den Objecten wahrzunehmen, wenn es hierfür nicht in anderen weiter unten zu erwähnenden Umständen Anhalt fände.

§. 101. Nimmt man aber in Fig. 32 den Stab G H in Betracht, welcher dem Stabe S T an Größe gleicht, jedoch von dem Kreuzungspunkte k noch einmal so weit entfernt ist als jener, so bilden augenscheinlich die nach seinen Endpunkten gezogenen Gesichtslinien einen kleineren Gesichtswinkel G k H, und auch das Netzhautbild h g ist halb so groß als das des Stabes S T. **Von gleich großen Objecten in verschiedener Entfernung vom Auge verursachen also die näheren größere Netzhautbilder, als die entfernteren.**

§. 102. Da die Netzhaut die innere Oberfläche einer Kugel bildet, so sind die von geraden Linien, etwa von Kanten an Prismen, verursachten Netzhautbilder an sich offenbar Curven. Daß nun trotzdem in dem Gehirne die Vorstellung von einer geraden Linie entstehen kann, ist wohl damit zu erklären, daß eben nicht die Körperlichkeit der Netzhaut selbst zum Bewußtsein kommt, vielmehr das Gehirn seine Wahrnehmung aus der Gleichartigkeit der Richtung, in welcher die zu einer geraden Linie gehörenden und demnach in Einer Ebene

Digitized by Google

liegenden Geſichtslinien die Netzhaut treffen, zuſammenſtellt. Außerdem gründet ſich hierbei wohl die Wahrnehmung mit auf die vermittelſt des Taſtſinnes früh gemachte Erfahrung.

c) Bedingungen des deutlichen Sehens.

Schon in den §§. 93 und 94 iſt einer der Hauptbedingungen des deutlichen Sehens gedacht worden, daß nämlich das Bild eines Objectes genau auf die Netzhaut fallen müſſe. §. 103.

Eine fernere weſentliche Bedingung iſt, daß das Netzhautbild nicht zu klein ſei, was die Folge entweder von einer ſehr großen Entfernung des Objectes vom Auge, oder von der Kleinheit des Objectes ſelbſt iſt. §. 104.

Befindet ſich ein Object in ſehr großer Entfernung, ſo iſt das ihm entſprechende Netzhautbild ſo klein, daß es von den Bildern der Umgebung des Objectes nicht deutlich unterſchieden werden kann. Außerdem iſt das von einem ſolchen Objecte in das Auge gelangende Lichtbüſchel nur ſehr ſchmal und von geringer Intenſität. Die äußerſte Grenze der Sichtbarkeit entfernter Objecte bei mittlerer Helligkeit derſelben bildet für ein normales Auge der Geſichtswinkel von 30 Secunden. Iſt aber ein ſehr entferntes Object ſehr hell, ſo kann es bei noch viel kleinerem Geſichtswinkel einen merklichen Reiz auf der Netzhaut hervorbringen und ſichtbar werden, wie dies z. B. mit den Fixſternen der Fall iſt, deren Durchmeſſer, oder was hier daſſelbe bedeutet, deren Geſichtswinkel kleiner als 1 Secunde iſt.

Um ſehr entfernte Objecte mit einiger Deutlichkeit ſehen zu können, bedient man ſich des Fernrohres. Seine Einrichtung beruht im Weſentlichen darauf, daß durch entſprechende Anordnung gewöhnlich zweier biconvexen Linſen von ſehr entfernten Objecten größere Lichtbüſchel, als ſonſt durch die Größe der Pupille bedingt ſind, dem Auge zugeführt werden, und daß deren Strahlen dabei unter möglichſt großen Geſichtswinkeln in das Auge treten. Hierdurch wird das Netzhautbild, und ſcheinbar deshalb das Object, heller, größer und in ſeinen Theilen unterſcheidbar.

Iſt ein Object an ſich ſo klein, daß es ſelbſt in der richtigen Sehweite ein zu kleines Netzhautbild hervorbringt, um noch deutlich

geſehen werden zu können, ſo kann es ſichtbar gemacht werden, wenn man es, um zuvörderſt das Netzhautbild größer werden zu laſſen, dem Auge näher als in die richtige Sehweite bringt, und dann, um die nunmehr zu ſtarke Divergenz der Strahlen (§. 96) aufzuheben, zwiſchen Object und Auge eine Sammellinſe (Lupe — Mikroſkop) bringt. Es erſcheint dann das Object in der richtigen Sehweite, vergrößert und deutlich.

§. 105. Ein anderes weſentliches Erforderniß zum deutlichen Sehen iſt, daß daß Netzhautbild nicht zu hell oder zu wenig hell ſei. Daß bei zu geringer Helligkeit eines Objectes daſſelbe die Netzhaut auch nur in geringem Grade reizen kann und dadurch die Deutlichkeit der Wahrnehmung leiden muß, bedarf nach den oben über den Sehproceß gegebenen Erläuterungen keiner Erörterung. Wie groß übrigens die Empfindlichkeit der Netzhaut in dieſer Beziehung iſt, geht daraus hervor, daß ein geſundes Auge allenfalls im Sonnenlichte, aber auch in dem ungefähr 300000 mal ſchwächeren Lichte des Vollmondes zu leſen im Stande iſt.

Iſt das von einem Objecte herrührende Licht zu hell, wie etwa das directe oder durch Spiegel reflectirte Licht der Sonne, oder elektriſches Licht, ſo überreizt, blendet es die Netzhaut, und trotz der ſtärkſten Verengerung der Pupille iſt dem Auge die Intenſität und Menge des Lichtes zu unerträglich, als daß es die Geſtalt und Beſchaffenheit der Lichtquelle zu erkennen vermöchte; es iſt vielmehr gezwungen ſich abzuwenden. Die überreizte Netzhaut iſt auf eine kurze Zeit unfähig, ſchwächere Lichteindrücke wahrzunehmen und empfindet deshalb, wenn es auf mittelmäßig erleuchtete Objecte gerichtet wird, ohne von dieſen bis zum Wiedereintreten ihres gewöhnlichen Zuſtandes etwas zu erkennen, das Bild eines dunklen Fleckes, welcher, verſchiedene Farben nach einander annehmend, allmählich heller wird (Nachbild). Wird das Auge jedoch nach der Blendung ſogleich geſchloſſen oder auf dunkle Objecte gerichtet, ſo bewahrt die Netzhaut den Eindruck eines hellen Scheines, der, ebenfalls die Farben wechſelnd, ſich allmählich verliert.

Geblendet, jedoch ſchneller vorübergehend, wird das Auge ſchon, wenn es aus der Dunkelheit plötzlich auf nur mäßig hell erleuchtete

Objecte gerichtet wird. Es bedarf die Netzhaut, um deutlich zu ſehen, auch in dieſem Falle einer kurzen Zeit der Gewöhnung an den ſtärkeren Lichtreiz, wobei die Iris weſentlich behülflich iſt, durch Verengerung der Pupille die Menge des in das Auge dringenden Lichtes zu vermindern.

Ebenſo iſt die Netzhaut, wenn das Auge plötzlich von nur mäßig hellen Objecten auf dunkle Objecte gerichtet wird, augenblicklich unempfindlich für die ſchwächeren Lichteindrücke.

§. 106. Was aber von der Blendung der Netzhaut im Ganzen geſagt worden, betrifft auch einzelne Stellen derſelben, ſelbſt wenn das Licht nicht unerträglich hell iſt. Richtet man z. B. das Auge einige Zeit hindurch unverwandt nach einem Fenſter und blickt dann plötzlich auf ſehr dunkle Objecte, ſo währt im Auge ein mattes Bild des Fenſters der Art fort, daß die Lichtöffnungen hell, das Fenſterkreuz dunkel erſcheinen; blickt man hingegen plötzlich auf ſehr helle Objecte, ſo ſind im Nachbilde die Lichtöffnungen dunkel, das Fenſterkreuz aber hell.

§. 107. Die Empfindlichkeit der Netzhaut für Lichteindrücke iſt ſo groß, daß, wenn ſie von einem ſehr hell leuchtenden Objecte angeregt wird, nicht nur die von dem Lichte direct getroffene Stelle der Netzhaut, ſondern auch die dieſer Stelle zunächſtliegenden Theile mitgereizt werden, und das leuchtende Object deswegen als größer wahrgenommen wird, als es der Erfahrung oder dem Vergleiche nach mit anderen weniger leuchtenden Objecten erſcheinen dürfte. Beobachten kann man dieſe Erſcheinung, welche man mit dem Namen Irradiation bezeichnet, ſehr leicht. Richtet man das Auge z. B. nach dem Vollmonde und ſtellt ſich ſo, daß ein Theil der Mondſcheibe von einem dunklen Gegenſtande, etwa von einer Kante eines Gebäudes verdeckt wird, ſo entſteht im Auge der Eindruck, als ſchneide der ſichtbare Theil der Mondſcheibe in die dunkle Kante, dieſe ein wenig aushöhlend, ein. Ebenſo ſcheint die hinter dem Meereshorizonte auf- oder untergehende Sonne in denſelben ein wenig einzuſchneiden. Auf dem gleichen Grunde beruht die Erſcheinung, daß der äußere Bogen der ſchmalen Mondesſichel kurz vor oder nach dem Neumonde einer größeren Kreisperipherie anzugehören

scheint, als sie der dicht neben der Sichel matt erkennbare Mondkörper zeigt; ferner die im gewöhnlichen Leben häufig vorkommende Erscheinung, daß Personen, hell gekleidet, größer und stärker zu sein scheinen, als wenn sie dunkle Kleider tragen.

Es ist das Letztberührte ein für die Bildnißmaler insbesondere sehr beachtenswerther Umstand.

Würde aber die Frage aufgeworfen, ob bei der bildlichen Darstellung der von einem dunklen Gegenstande theilweise verdeckten Mondscheibe deren scheinbares Einschneiden in die Grenzen des letzteren, oder das Einschneiden der Sonne in den Meereshorizont wirklich dargestellt werden müsse, oder ob die Herbeiführung dieses Eindruckes der doch anzunehmenden ähnlichen Wirkung der hellen Farben im Bilde neben den dunklen zu überlassen sei, so wäre sie wohl dahin zu beantworten, daß bei der beschränkten Leuchtkraft der Farbestoffe, trotz allen Aufwandes von Contrasten, eine dem natürlichen Effect ähnliche Wirkung in zu geringem Grade zu erwarten ist, und daß der Maler deshalb, und um keines der Wirkungsmomente auf das Auge unbenutzt zu lassen, jenes Einschneiden, mit verschwommenen Umrissen, wie sie dem Auge der Natur gegenüber erscheinen, allerdings darzustellen habe.

Der Irradiations-Erscheinungen ist bei der Behandlung der Umrisse bildlicher Darstellungen dunkler Objecte auf hellen Gründen, und umgekehrt heller Objecte auf dunklen Gründen überhaupt stets zu gedenken.

§. 108. Wird das Auge eine kurze Zeit hindurch Lichteindrücken von einer bestimmten Farbe ausgesetzt, so wird die Empfindlichkeit der Netzhaut für diese Farbe vorübergehend abgestumpft. Blickt man z. B. unverwandt auf einen rothen Gegenstand, etwa ein kleines Blättchen rothes Papier, welches auf einer weißen Papierfläche liegt, und wird bei unveränderter Augenrichtung das rothe Blättchen plötzlich fortgezogen, so empfindet die Netzhaut, stellenweise abgestumpft für den Eindruck von rothem Lichte, von dem von dem weißen Papiere reflectirten Lichte augenblicklich alle anderen, nur nicht die rothen Farbenstrahlen, und, da die anderen Farbenstrahlen hauptsächlich blau und gelb, zusammenwirkend also grün sind, hat sie

genau an der Stelle, auf welche vorher das Roth wirkte, den Eindruck des Grünen. In gleicher Weise tritt nach jeder andern Farbe die entsprechende complementäre Farbe als farbiges Nachbild auf.

Farbenerscheinungen, welche wie diese aus einem in der Netzhaut selbst begründeten Zustande hervorgehen, nennt man subjective oder physiologische Farben.

Hierzu gehört auch das gleichzeitige Auftreten durch den Contrast hervorgerufener complementärer Farbenerscheinungen. Beleuchtet z. B. die untergehende Sonne Theile einer schneebedeckten Landschaft mit orangefarbigem Lichte, so erscheinen die Schatten nicht allzu breiter Objecte, selbst wenn der übrige Himmel bezogen ist, in lebhaftem Blau (farbige Schatten); oder, ist die Färbung der Wolken bei untergehender Sonne intensiv roth, so erscheinen die zwischen den Wolken sichtbaren Theile des Himmels grünlich. Betrachtet man ein lebhaft roth gefärbtes Zeug, welches mit kleinen schwarzen oder weißen Flecken gemustert ist, so erkennt man im ersten Augenblicke genau die Farblosigkeit der Flecken; bei längerem Verweilen des Auges jedoch nehmen dieselben scheinbar die zu roth complementäre Farbe grün an. Ebenso treten neben den anderen Farben jedesmal die entsprechenden complementären Farben auf. §. 109.

Neben diesen letzteren durch den Contrast hervorgerufenen subjectiven Erscheinungen sind auch diejenigen zu erwähnen, welche schon aus der Nebeneinanderstellung von hell und dunkel überhaupt entstehen. Sie erklären sich vornehmlich durch das §. 105 über die Blendung Gesagte. Legt man z. B. einen Streifen graues Papier quer über ein Blatt Papier, dessen eine Hälfte schwarz, die andere weiß ist, so erscheint der Theil des Streifens auf dem weißen Grunde viel dunkler als der Theil auf dem schwarzen Grunde; oder malt man eine Scala von schwarz zu weiß regelmäßig abgestufter grauer Töne unvermischt neben einander, so scheint jede Tonstufe nach der dunkleren Nachbarschaft zu heller, nach der helleren zu dunkler zu sein. §. 110.

Die subjectiven Farbenerscheinungen sind übrigens so complicirter Art, daß eine allseitig befriedigende Erklärung dafür bis jetzt nicht hat aufgestellt werden können. In Obigem ist die am meisten verbreitete Ansicht wiedergegeben worden.

§. 111. Ein letztes wichtiges Erforderniß zum deutlichen Sehen iſt, daß ſowohl das zu ſehende Object, als das Auge ſich möglichſt unbewegt verhalten, da ſonſt die Lichteindrücke zu ſchnell über die Netzhaut gleiten, als daß hier eine Verſchiedenheit ihrer einzelnen Theile wahrgenommen werden könnte. Die Vorſtellung vermag einem zu ſchnellen Wechſel der Bilder auf der Netzhaut nicht zu folgen; außerdem bedürfen die veränderlichen Organe des Auges einer gewiſſen Zeit, ſich einzurichten.

Die Nothwendigkeit möglichſter Unbewegtheit des Auges ſelbſt erweiſt ſich deutlich, wenn man bei Fahrten auf der Eiſenbahn die Landſchaft betrachtet. Namentlich ſind es hier die nächſten Objecte, welche wegen des plötzlichen Durchganges ihrer Bilder durch die Netzhaut, wegen der Flüchtigkeit ihrer Lichteindrücke undeutlich werden. Der Durchgang der an ſich ſchon kleineren Bilder entfernterer Objecte iſt minder plötzlich, das Auge kann ſeine Achſe unverwandt auf dieſelben richten und die Dauer der Lichteindrücke vergrößern; zudem haben die veränderlichen Organe Zeit, ſich einzurichten.

Was andererſeits das Erforderniß möglichſter Unbewegtheit der Objecte betrifft, ſo bedarf es nur des Hinweiſes auf naheliegende Erfahrungen: man kann die Speichen eines ſchnell rotirenden Rades nur ſehr undeutlich, eine im Fluge befindliche Flintenkugel gar nicht ſehen. Hat jedoch ein ſehr ſchnell bewegtes Object große Leuchtkraft, wie z. B. der elektriſche Funke, der Blitz, ſo wird es dadurch ſichtbar. Es iſt dieſe Wahrnehmung jedoch mehr ſubjectiver als objectiver Art, indem die durch das intenſive Licht des ſpringenden Funkens nach einander ſtark gereizten Netzhautſtellen noch nach dem Verſchwinden des Funkens ſelbſt den empfangenen Lichteindruck eine kurze Zeit hindurch bewahren, wie dies ſchon in den §§. 105 und 106 erwähnt iſt; es wird deshalb auch eigentlich nicht der Funke ſelbſt ſichtbar, ſondern die mit dem Namen Blitzſtrahl belegte Bahn deſſelben.

Die Sichtbarkeit ſchnell bewegter Objecte iſt alſo abhängig von der Schnelligkeit der Bewegung und von der Lichtſtärke der Objecte, und zwar müſſen beide in gleichem Maße wachſen.

Vermag das Auge die Bahn eines ſchnell bewegten Objectes zu §. 112.
überſehen und iſt die Bewegung vollends eine gleichmäßige, ſo währt, auch wenn das Object nur mittelmäßige Leuchtkraft hat, der dadurch hervorgerufene Lichteindruck auf der Netzhaut noch fort, nachdem das Object den Ort verändert hat. So erſcheint ein auf die Grundfläche eines Kreiſels gemalter Fleck bei der Drehung als ein Kreis.

Das Fortbeſtehen der von bewegten Objecten herrührenden §. 113.
Lichteindrücke auf der Netzhaut iſt beſonders deutlich durch den Buſolt'ſchen Farbenkreiſel nachzuweiſen. Die Scheibe deſſelben iſt mit den ſieben prismatiſchen Farben in der Ordnung, wie ſie das Sonnenſpectrum zeigt, und in einem der Intenſität der Farbeſtoffe entſprechenden Mengeverhältniſſe bemalt. Wird der Kreiſel in Bewegung geſetzt, ſo kann das Auge wegen der außerordentlich ſchnellen Rotation der Scheibe die einzelnen Farben nicht unterſcheiden; es wirken vielmehr die Eindrücke aller Farben ſo ſchnell nach einander und ſo oft wiederholt auf die einzelnen Punkte der Netzhaut, daß das Auge den Eindruck einer weißlich leuchtenden Fläche empfängt. Wäre es möglich, die Farben des Sonnenſpectrums in ihrer vollen Reinheit auf der Kreiſelſcheibe zu fixiren, ſo müßte dieſe während ihrer Rotation die ſämmtlichen Farben zu hellem weißen oder vielmehr farbloſen Lichte gemiſcht vorführen.

Auf das Fortbeſtehen der Lichteindrücke im Auge nach dem Verſchwinden ihrer Urſachen gründen ſich mancherlei unterhaltende optiſche Beobachtungen, wie z. B. die am Thaumatrop, an den ſtroboſkopiſchen Scheiben u. dgl. m., von deren Erörterung hier jedoch füglich Abſtand genommen werden darf.

d) Das Sehen mit beiden Augen.

Bei dem Sehen mit beiden Augen ſtellen ſich dieſe, wie ſchon §. 114.
in §. 92 angeführt iſt, unwillkührlich ſo, daß ihre Achſen genau nach dem zu ſehenden Punkte gerichtet ſind und jedes Auge ein Bild des Punktes auf der empfindlichſten Stelle der Netzhaut empfängt. Die beiden Sehnerven, welche als Zweige eines und deſſelben Sinnesnerven thätig ſind — denn ſchon vor ihrem Eintritt ins Gehirn kreuzen ſie ſich nicht allein, ſondern Fäden des einen gehen in den

andern über — übermitteln ihre gleichartigen Empfindungen dem Gehirn, welches die empfangenen Eindrücke zu der Vorstellung von einem Punkte zusammenstellt. So auch wird nur ein Object wahrgenommen, wenn selbst die beiden Bilder desselben nicht auf die empfindlichsten, sondern nur auf gleich- oder ähnlichgelegene Stellen der Netzhäute fallen. Wenngleich nämlich die beiden Augenachsen jedesmal nur nach einem Punkte gerichtet sein können und die Aufmerksamkeit des Sehenden sich demnach den das Auge anziehenden charakteristischen Stellen eines Objectes nur nach einander zuwenden kann, so lehrt doch die Erfahrung, daß man während des Sehens nach einem gewissen Punkte zugleich einige, wenn auch untergeordnete Augenthätigkeit anderen in der nächsten Nähe des fixirten Punktes belegenen Punkten zuzuwenden und diese mit einiger Sicherheit zu erkennen vermag. Die Bilder solcher nebenliegenden Punkte fallen selbstverständlich auch neben die empfindlichsten Stellen der Netzhäute.

§. 115. Sind also in Fig. 33 die Achsen der beiden Augen A und A' nach einem Punkte B gerichtet, so fallen die Bilder hiervon in den beiden Augen in die Punkte b und b', die empfindlichsten Stellen der Netzhäute, und der Sehende sieht einen Punkt B.

Ist C ein Punkt, welcher, während die Augen auf Punkt B gerichtet sind, gleichzeitig beobachtet wird, so fallen die Bilder davon

Fig. 33.

Fig. 34.

in c und c^1, nämlich in beiden Augen rechts von b und b^1, alſo auf ähnlich gelegene Stellen der Netzhäute, und der Sehende nimmt auch in dieſem Falle außer dem Punkte B nur einen Punkt C wahr.

Iſt C jedoch, wie in Fig. 34, vor oder hinter B gelegen, ſo §. 116.
fällt, wenn die Augenachſen auf B gerichtet ſind, in dem linken Auge A das Bild c des Punktes C rechts von b, das Bild c^1 in dem rechten Auge A^1 links von b^1. Die Bilder von C fallen alſo auf nicht gleich- oder ähnlichgelegene Stellen, und der Sehende nimmt den Punkt C doppelt wahr. Eine Beobachtung dieſer Art läßt ſich leicht dadurch anſtellen, daß man einen Finger der einen Hand in der richtigen Sehweite, einen Finger der andern Hand um etwa einen Fuß hinter jenem hält, und nun abwechſelnd bald den näheren, bald den entfernteren Finger fixirt, wobei in beiden Fällen der nicht fixirte Finger doppelt erſcheint.

Es leuchtet ein, daß wegen der räumlichen Ausdehnung aller §. 117.
Objecte die auf die beiden Netzhäute fallenden Bilder nur in den allerſeltenſten Fällen einander völlig gleich ſein können. Gerade aber dieſer Umſtand dient dazu, eine nur deſto vollkommenere Vorſtellung von den geſehenen Objecten in dem Gehirne hervorzurufen.

Sind z. B. A und A^1 in Fig. 35 die beiden Augen, iſt W U R F die Horizontalprojection eines Würfels, ſo empfängt jedes Auge ein verſchiedenes Bild des Würfels: im Auge A projicirt ſich die Fläche W R breit, im Auge A^1 ſchmal; dagegen projicirt ſich im Auge A^1 die Fläche R F breit, im Auge A aber wieder ſchmal. Aus der Combination der an Größe verſchiedenen Netzhautbilder entſteht hier die richtige Vorſtellung von der räumlichen Ausdehnung des Würfels.

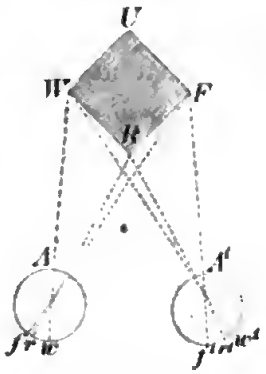

Fig. 35.

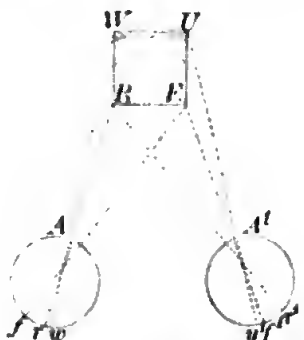

Fig. 36.

§. 118. Steht jedoch der Würfel wie in Fig. 36, wo zugleich seine Kanten kürzer sind, als der Abstand der Augenmittelpunkte von einander groß ist, so empfangen zwar beide Augen ein Bild von der Fläche R F, jedes aber zugleich ein Bild einer andern Seitenfläche; nämlich das Auge A empfängt das Bild der Fläche W R, das Auge A^1 das der Fläche U F. Es werden darum die Seitenflächen auch nur mit geringerer Deutlichkeit als die Vorderfläche erkannt werden.

§. 119. Der Eindruck eines Objectes, welchen die beiden an sich verschiedenen natürlichen Netzhautbilder hervorbringen, kann auch künstlich durch Betrachtung zweier zweckmäßig hergestellten und entsprechend vorgeführten Abbildungen eines Objectes erzielt werden, wie dies das sogenannte Stereoskop überraschend nachweist.

Dieser Apparat besteht in einem Kasten, an dessen offener Rückseite eine einfache Vorrichtung zur Aufnahme zweier ein und dasselbe Object darstellenden Abbildungen angebracht ist, während zwei in der Vorderfläche in dem gewöhnlichen Abstande der beiden Augen von einander angebrachte, mit Oculargläsern versehene Oeffnungen die Betrachtung jener beiden Bilder zulassen. Die Abbildungen sind am vollkommensten, wenn sie gleichzeitig nach einem und demselben Objecte und zwar so aufgenommene photographische Bilder sind, daß die Objectivcylinder des bei der Aufnahme angewandten Apparates den Winkel mit einander bildeten, welchen die Augenachsen bei der Betrachtung desselben Objectes aus angemessener Entfernung bilden würden. Bei näherer Untersuchung außerhalb des Kastens zeigen diese Abbildungen dieselbe Verschiedenheit, welche zwei Netzhautbilder haben würden: nämlich die mit dem links befindlichen Objectivcylinder aufgenommene Abbildung zeigt mehr Theile der linken Seite des dargestellten Objectes, die mit dem rechts befindlichen Cylinder aufgenommene Abbildung zeigt mehr Theile der rechten Seite, als die andere Abbildung.

Schiebt man nun diese gewöhnlich auf einer und derselben Bildfläche befindlichen beiden Abbildungen in den Kasten und beschaut sie durch die Oculargläser, so sieht das rechte Auge nur die rechts liegende, das linke Auge nur die links liegende Abbildung,

und es entſtehen hieraus Netzhautbilder, denen gleich, welche das natürliche Object ſelbſt hervorbringen würde, mit dem Unterſchiede allein, daß ſie nicht farbig ſind. Aus der unwillkührlichen Combination beider bildet ſich in dem Beſchauer die Vorſtellung von einem natürlichen Objecte.

§. 120. Die Wichtigkeit zweier ſich ergänzenden Netzhautbilder für die Vollkommenheit der Wahrnehmung wird beſonders verſtändlich in Fällen, wo man Theile eines Objectes unvermuthet je mit nur einem Auge erblickt. Blickt man z. B., wie Fig. 37 erläutern ſoll, mit beiden Augen A und A′ zugleich aus einem dunklen Raume durch eine Spalte SP, deren Breite geringer iſt als der Abſtand der Augenmittelpunkte von einander, nach einer hellen Fläche FL, ſo ſieht jedes Auge eine andere Stelle dieſer Fläche: das Auge A ſieht nämlich nur die Stelle de, das Auge A′ nur die Stelle bc. Die Stelle cd wird gar nicht geſehen oder erſcheint vielmehr ſo dunkel wie die Grenzen der Spalte SP. Man empfindet unter dieſen Umſtänden deutlich eine Beſchränktheit in der Wahrnehmung der Stellen bc und de.

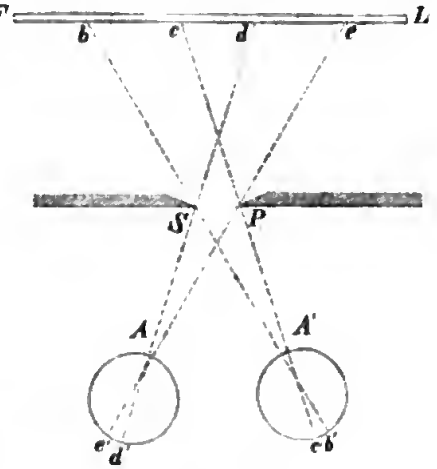

Fig. 37.

§. 121. Daſſelbe iſt der Fall, wenn man einen ſchmalen Körper, etwa einen Finger, in geringer Entfernung von den Augen ſenkrecht hält, und zu beiden Seiten neben ihm vorbei nach einer hellen Wand blickt. Man ſieht in dieſem Falle, dem in §. 116 Geſagten gemäß, nicht allein den Finger doppelt, ſondern es ſind auch die beiden Stellen der Wand minder deutlich wahrnehmbar, welche der Finger jedem einzelnen der beiden Augen deckt.

§. 122. Es wird hierbei nicht allein das Urtheil über die räumliche Ausdehnung der je von nur einem Auge geſehenen Stellen unſicher, ſondern auch die ſcheinbare Lichtſtärke der letzteren erleidet eine beträchtliche Verminderung. Inwieweit dies der Fall iſt, davon kann

man ſich durch eine einfache Beobachtung überzeugen. Blickt man nämlich mit beiden Augen nach einem Blatte weißen Papieres und bringt einen dunklen Schirm ſo vor das eine Auge, daß er dieſem einen Theil des Papieres verdeckt, und vergleicht dann die Leuchtkraft des beiden Augen zugleich ſichtbaren Theiles des Papieres mit der des mit nur einem Auge ſichtbaren Theiles, ſo erſcheint jene auffallend größer, als dieſe.

e) Beurtheilung der Entfernung und Größe der Objecte.

§. 123. Es erhellt ſchon aus §. 100, wonach Objecte verſchiedener Entfernung, Größe und Geſtalt, ſobald ſie nur unter demſelben Geſichtswinkel geſehen werden, gleich große Netzhautbilder verurſachen können, daß die Größe dieſer letzteren allein nicht genügenden Anhalt zur Beurtheilung der Entfernung und Größe der Objecte ſelbſt bietet. Da ferner die Netzhautbilder ſämmtlich auf eine Fläche, die Netzhautfläche, fallen, ſo können ſie ſelbſt eine Wahrnehmung der Ausdehnung der Objecte in die Tiefe des Geſichtsfeldes nicht direct begründen. Es iſt vielmehr, wenn man zunächſt nur das Vermögen eines Auges in Betracht nimmt, die Erfahrung und das augenblickliche Vergleichen mit bekannten Objecten, worauf ſich das Urtheil über Entfernung und Größe ſichtbarer Objecte ſtützt.

Erfahrungsmäßig erleidet nämlich ſowohl das von ſelbſtleuchtenden Körpern direct ausgehende, als das reflectirte Licht auf dem Wege durch die Luft in das Auge eine Schwächung. Außerdem iſt ein von entfernten Objecten her in das Auge gelangendes Lichtbüſchel ſchmäler, als ein von nahen Objecten herrührendes, und darum von ſchwächerer Leuchtkraft. Indem man nun die ſcheinbare Größe eines Objectes, oder, was daſſelbe bedeutet, die wirkliche Größe des ihm entſprechenden Netzhautbildes, mit ſeiner Helligkeit und Deutlichkeit in Beziehung bringt, bildet man aus dieſen Factoren das Urtheil; in den meiſten Fällen zuerſt über die Entfernung und hiernach über die wirkliche Größe des Objectes. Bei hinſichtlich ihrer Größe bekannten Objecten dient natürlich die ſcheinbare Größe zur Abſchätzung der Entfernung.

Wie trügeriſch indeſſen dieſes Urtheil iſt, ſobald man nur mit §. 124.
einem Auge ſieht, davon kann man ſich durch eine leicht anzuſtellende Beobachtung überzeugen. Hängt man nämlich in der Entfernung von ungefähr anderthalb Fuß vom Auge einen Ring an einem Faden auf und bemüht ſich, nachdem man das Auge in die Ebene des Ringes gebracht hat, mit dem Finger von der Seite her in die Ringöffnung zu treffen, ſo wird man faſt immer fehltreffen, während man augenblicklich ſeine Abſicht erreicht, ſobald man mit beiden Augen nach dem Ringe ſieht.

Dieſe größere Sicherheit des Urtheils über Entfernung und §. 125.
Größe der Objecte beim Sehen mit beiden Augen gründet ſich nicht allein auf die §. 117 beſprochene Verſchiedenheit der beiden Netzhautbilder und die aus der Combination beider hervorgehende Vollkommenheit der Vorſtellung, ſondern großentheils auch auf den Umſtand, daß der Sehende die Größe des Winkels, welchen die beiden Augenachſen beim Sehen nach einem Punkte mit einander bilden, unbewußt mit in Rechnung zieht. Dieſer Augenachſenwinkel beträgt, wenn der betrachtete Punkt 9 Zoll von der beide Augenmittelpunkte verbindenden geraden Linie entfernt (d. i. in der richtigen Sehweite) iſt, annähernd 16°, bei einer Entfernung von 1 Fuß = 12°, bei 2, 3, 6, 12 Fuß Entfernung beziehungsweiſe 6°, 4°, 2°, 1°, bei 100 Fuß Entfernung ungefähr 8 Minuten, bei $^1/_4$ Meile Entfernung ſchon nur 1 Minute.

Die Veränderlichkeit dieſes Winkels iſt hiernach merklicher bei dem Sehen nach mehreren verſchieden nahen Objecten, als bei dem Sehen nach mehreren verſchieden entfernten Objecten, zu welchen letzteren die beiden Augenachſen in nahezu paralleler Stellung bleiben. Es muß daher auch das Urtheil ſicherer bei der Schätzung der Entfernung naher Objecte, als der entfernter Objecte ſein. Offenbar ſtützt ſich eine Schätzung der Art auf Erfahrung und Uebung, und manche Perſonen beſitzen darin eine erſtaunliche Sicherheit, während junge, aller Uebung fremde Kinder nach weit entfernten leuchtenden Objecten, nach dem Monde, wie nach ganz in der Nähe befindlichen Objecten greifen.

Es verſteht ſich von ſelbſt, daß bei der Beurtheilung der Ent- §. 126.

fernung und Größe der Objecte, wenn man mit beiden Augen sieht, auch alle die Momente, welche ein Urtheil für ein einzelnes Auge begründen, nämlich Größe des Netzhautbildes, scheinbare Helligkeit des Objectes, Vergleichen desselben mit nebenstehenden Objecten, mit in Betracht kommen. Wie leicht aber trotz aller dieser Mittel das Urtheil beirrt werden kann, beweist die sich alltäglich wiederholende Erfahrung, daß die Größe der Sternbilder, der Sonne und des Mondes, sobald sich dieselben in der Nähe des Horizontes befinden, für bedeutender gehalten wird, als wenn jene Gestirne in der Nähe des Zenithes stehen. Da durch Winkelmessungen festgestellt ist, daß die sichtbaren Durchmesser der Gestirne bei Annäherung dieser an den Horizont unverändert dieselben sind, wie bei ihrer Nähe zum Zenithe, so sucht man jenen Irrthum folgendermaßen zu erklären:

Da der Himmel dem Auge nicht in halbkreisförmiger, sondern elliptischer Wölbung erscheint, so, als wenn seine dem Erdhorizonte nahen Theile dem Auge ferner wären, als seine dem Zenithe nahen Theile, so scheinen auch die in der Nähe des Horizontes sich auf dem Himmelsgewölbe projicirenden Gestirne entfernter zu sein, als wenn sie sich in der Nähe des Zenithes darauf projiciren. In diesem Irrthum wird das Auge bestärkt durch die mit dem schiefen Durchgange des Lichtes durch die Erdatmosphäre zusammenhängende größere Trübung desselben. Da man nun gewohnt ist, die Größe der Objecte, welche gleich große Netzhautbilder verursachen, nach ihrer scheinbaren Entfernung zu beurtheilen, so hält man die Gestirne in der Nähe des Horizontes, in ihrer scheinbar größeren Entfernung, für größer, als in ihrer scheinbar größeren Nähe, im Zenithe.

Will man die Sonnen- oder Mondscheibe bildlich darstellen — was wegen der geringen Leuchtkraft unserer Farbestoffe, deren künstlichste Verwendung den Eindruck der Lichtstärke jener Himmelskörper auch nicht annähernd zu erreichen vermag, ohne zwingende Gründe nie unternommen werden muß — so hat man sich also zu vergegenwärtigen, daß ihre scheinbare Größe stets von der Entfernung der Fläche vom Auge abhängig ist, auf welche man sie sich projicirt denkt.

Bei der perſpectiviſchen Darſtellung iſt die ſcheinbare Größe ihrer Durchmeſſer (Geſichtswinkel), welche, bei beiden ziemlich gleich, reichlich $\frac{1}{2}$ Grad beträgt, nach Anleitung des in der zweiten Abtheilung gezeigten Conſtructionsverfahrens leicht zu beſtimmen. Nichtsdeſtoweniger wird es ſich empfehlen, die dem Horizonte nahe Sonnen- oder Mondſcheibe von ein wenig größerem Durchmeſſer darzuſtellen, da eine derartige Benutzung des obenerwähnten Irrthums die ohnedies zu dürftige Wirkung der hellen Farbeſtoffe auf das Auge des Beſchauers einigermaßen zu unterſtützen geeignet iſt.

§. 127. Aus dem in dem vorhergehenden Paragraphen erklärten Grunde erſcheinen auch irdiſche Objecte von bekannter Größe, ſobald ſie unter Umſtänden geſehen werden, welche ſie entfernter erſcheinen laſſen, als ſie wirklich ſind, wie z. B. Bäume und Menſchen während eines Nebels, in befremdender Größe. Hinſichtlich der Entfernung der Objecte wird unter ſolchen Umſtänden auch das geübteſte Auge getäuſcht: Berge z. B. werden bei ſehr klarer Luft für näher, bei trüber Luft für entfernter gehalten, als ſie wirklich ſind.

Zweite Abtheilung.

Linearperſpective.

Erſtes Kapitel.

Allgemeine Erklärungen, Annahmen und Benennungen.

Die Linearperſpective lehrt das mathematiſche Conſtructions- §. 1.
verfahren bei der graphiſchen Darſtellung der ſcheinbaren Umriſſe der Objecte — d. h. der Grenzen, bis zu welchen die einen Objecte die anderen dem Auge verdecken — auf einer beliebigen Fläche, der Bildfläche; desgleichen der Grenzen, welche erhebliche Erleuchtungsverſchiedenheiten an den Oberflächen der Körper bezeichnen, namentlich der Schattengrenzen, und außerdem der Geſtaltung der Spiegelbilder der Objecte.

Als eine Methode des Projicirens, wobei die projicirenden Linien ſtrahlenartig nach einem Punkte, dem Auge, gerichtet ſind, iſt die Linearperſpective der orthographiſchen Projicirungsmethode nahe verwandt, inſofern bei dieſer jener eine Punkt nur als in unendlicher Entfernung liegend aufgefaßt wird, was Parallelität der projicirenden Linien bedingt. Auch ſtützen ſich die Conſtructionen der Linearperſpective großentheils auf das Verfahren bei dem orthographiſchen Projiciren; überall lehnen ſie ſich an die durch letzteres erzielten Definitionen.

Da man bei einer einzelnen bildlichen Darſtellung eines §. 2.
Objectes vorweg ſchon auf die Erreichung der Vollkommenheit des Eindruckes verzichten muß, welche auf der Verſchiedenheit des Netzhautbilder-Paares, dem natürlichen Objecte gegenüber, beruht, und welche überhaupt nur durch Doppelbilder, wie die ſtereoſkopiſchen

es ſind, erreichbar iſt, ſo bringt man beim perſpectiviſchen Projiciren die Objecte auch nur zu einem Projections-Mittelpunkte, dem Geſichtsſinn, in Beziehung. An die Stelle des Augenpaares ſetzt man Ein Auge, aber als mit der Vollkommenheit ſehend, wie dies ein Augenpaar vereint vermag. Man führt außerdem die Körperlichkeit des Einen Auges auf Einen Punkt, den Geſichtspunkt, etwa den in der Linſe liegenden Kreuzungspunkt (1. Abth., §. 98) zurück, und ſetzt dieſen überall als feſtſtehend, jedoch jede Aenderung der Sehrichtung zulaſſend, voraus.

§. 3. Die einfachſte und natürlichſte Art, die ſcheinbaren Umriſſe gegebener Objecte perſpectiviſch richtig graphiſch darzuſtellen, iſt die, daß man, das Auge in einem beſtimmten Punkte feſtſtellend, die ſcheinbaren Grenzen der Objecte auf einer zwiſchen dieſen und dem Auge aufgeſtellten durchſichtigen Fläche, etwa einer Glasfläche, gleichviel ob dieſelbe eben oder gekrümmt iſt, nachzeichnet. Es decken in dieſem Falle die gezeichneten Umriſſe dem Auge diejenigen des Objectes und ergeben von dieſem ein richtiges perſpectiviſches Bild.

§. 4. Da jedoch dieſe Art der Auffaſſung aus räumlichen Rückſichten in den ſeltenſten Fällen ausführbar iſt, häufig auch nicht in der Nähe befindliche, oder noch nicht vorhandene Objecte, wie etwa noch unausgeführte Bauwerke, perſpectiviſch dargeſtellt werden müſſen — weshalb auch die ſinnreichſten Inſtrumente, welche, wie der Diagraph von Gavard und außerdem die Camera obſcura und die Camera lucida, ein directes Nachzeichnen der Natur auf andere Art ermöglichen, nur ſelten anwendbar ſind — ſo iſt es erforderlich, das Product des directen Nachzeichnens der natürlichen Objecte auch durch mathematiſche Conſtruction erzielen zu können. Es iſt ſelbſtverſtändlich, daß es hierbei der genaueſten Kenntniß der räumlichen Ausdehnungen der darzuſtellenden Objecte bedarf, und daß von einem ſtrengen Eingehen auf unregelmäßige, geometriſchen Körpern nicht verwandte Formen Abſtand genommen werden muß.

§. 5. Erwägt man, wie das auf die in §. 3 angegebene Art, mittels Nachzeichnens der Umriſſe der Objecte auf einer durchſichtigen Fläche hervorgebrachte perſpectiviſche Bild zu Stande gekommen, ſo ergiebt ſich, daß mit der Spitze des Zeichenſtiftes ſtets die ſcheinbaren Umriſſe

der Objecte verfolgt und gedeckt wurden, daß die Spitze ſtets innerhalb der von dem Auge nach den einzelnen Punkten der Umriſſe der Objecte denkbaren Geſichtslinien, zugleich aber auch ſtets auf der Bildfläche verweilte. Es iſt hiermit der Grundſatz erklärt, daß das perſpectiviſche Bild oder die perſpectiviſche Projection, oder, kürzer geſagt, „die Perſpective" eines Objectes die Durchſchnittsfigur der aus dem Auge (als Projections-Mittelpunkt) nach ſämmtlichen Punkten des Objectes denkbaren Geſichtslinien (projicirenden Linien) mit der Bildfläche (Projectionsfläche) iſt. Zugleich iſt hierdurch der Weg für die Conſtruction angedeutet.

§. 6. Während bei einer orthographiſchen Projection die erwähnten Geſichtslinien (projicirenden Linien) als einander parallel aufgefaßt werden, weil das Auge in unendlicher Entfernung von den Objecten gedacht wird, bilden ſie bei der perſpectiviſchen Projection, wo das Auge in der Nähe angenommen wird, Kegel, deren gemeinſchaftliche Spitze im Auge liegt.

Inwiefern nun das perſpectiviſche Bild, als Durchſchnittsfigur ſolcher Kegel mit der Bildfläche, dem Netzhaut- oder ſcheinbaren Bilde ähnlich ſein könne, hängt von der Art der Bildfläche ab.

§. 7. Iſt nämlich die Bildfläche die innere Oberfläche einer Halbkugel, und iſt das Auge im Mittelpunkte dieſer angenommen, ſo projiciren die ſämmtlich durch den Kreuzungspunkt im Auge gehenden, ſich vor wie hinter demſelben ausbreitenden Geſichtslinien auf dieſer Bildfläche ein Bild unter denſelben Bedingungen, wie auf der kugelförmigen Netzhautfläche, und muß daher jenes Bild eine dem ſcheinbaren Bilde an ſich im mathematiſchen Sinne ähnliche Figur bilden. Bei allen anderen Geſtalten der Bildfläche iſt dies nicht der Fall. Bildet letztere nämlich die innere Oberfläche eines Cylinders, ſo findet eine Aehnlichkeit nur theilweiſe, und zwar nach den Ausdehnungen normal zur Achſenrichtung des Cylinders, ſtatt. Iſt die Bildfläche eben, wie ſie in den meiſten Fällen angenommen wird, ſo iſt das perſpectiviſche Bild dem Netzhautbilde im mathematiſchen Sinne unähnlich, und zwar etwas verzerrt, weil es die Durchſchnittsfigur des Geſichtslinienkegels mit einer Ebene

ist. Man darf daher beim Zeichnen nach der Natur auf der ebenen Bildfläche nicht einfach das, was man sieht, reproduciren wollen, sondern muß vielmehr der Umstände eingedenk sein, welche eine Verzerrung des perspectivischen Bildes bedingen. (S. §. 21.)

§. 8. Die halbkugelähnliche Gestalt der Bildfläche ist die seltenste und kommt nur in Kuppelbildern vor. Es können diese selbstverständlich nur von unten her und dabei fast immer nur so betrachtet werden, daß das Auge nicht mit dem Mittelpunkte der Kuppelkrümmung zusammenfällt, weshalb sie strenggenommen, um von dem entsprechenden Gesichtspunkte aus unverzerrt zu erscheinen, verzerrt ausgeführt werden müßten (s. §. 383). Doch vermeidet man gern diese Verzerrungen, welche bei einer Betrachtung aus der Nähe, etwa von einer der Kuppel näheren Galerie, widerlich auffallen würden, und pflegt deshalb die Darstellung so auszuführen, daß man die Ausdehnungen, welche dasselbe perspectivische Bild auf der ebenen Bildfläche haben würde, einfach in die Kuppelkrümmung einträgt.

§. 9. Häufiger vorkommend ist die cylindrische Gestalt der Bildfläche. Das Bild ist dann gewöhnlich auf der inneren Fläche eines auf der Grundfläche stehenden normalen Cylinders vorgeführt, und das Auge in der Achse des Cylinders angenommen. Es eignet sich diese Gestalt der Bildfläche besonders zu panoramatischen Darstellungen von Landschaften und Stadtansichten in großem Maßstabe. Mehreres hierüber enthält der vierte Abschnitt.

§. 10. Am häufigsten wird die ebene Bildfläche zur bildlichen Darstellung gewählt. Auf ihr kann ein beliebig abzuschließender Theil von Objecten aufgenommen und sie selbst demgemäß beliebig begrenzt werden; dabei läßt sie die unmittelbare Anwendung des Zirkels und Lineals zu. Ihre in den meisten Fällen lothrechte Stellung entspricht im Allgemeinen der der natürlichen Objecte; sie nimmt hierbei den geringsten Raum, gewöhnlich den Platz an Wänden, ein, sie ist einer gleichmäßigen Beleuchtung zugänglich und bequem zu betrachten.

§. 11. In nicht lothrechter, sondern horizontaler Stellung kommt die ebene Bildfläche in Deckengemälden vor, und sind Darstellungen

darauf nach denſelben Regeln zu behandeln, wie bei der lothrechten Stellung. (S. Abſchnitt 2.)

In ſchiefer, d. h. weder lothrechter noch horizontaler Stellung kommt die ebene Bildfläche am ſeltenſten, wohl nur bei bildlichen Darſtellungen auf ſchiefen Theilen von Plafonds, ſchiefen Wänden in Dachräumen, und auf den unteren beworfenen Flächen der verſchiedene Podeſte verbindenden Treppentheile vor. Die Darſtellung lothrechter und horizontaler, überhaupt aller dieſer Bildfläche nicht parallelen Objecte iſt hierbei unter Anwendung der für die Conſtruction der Perſpectiven ſchiefer Objecte geltenden Regeln auszuführen. (S. Abſchnitt 3.) §. 12.

In verſchiedene Stücke, in Gardine, Couliſſen und Soffiten zerlegt kommt die lothrechte ebene Bildfläche im Theater vor. Die Darſtellungen auf dieſen verſchiedenen Bildflächen müßten ſtrenggenommen für jede einzelne nach den für die eine lothrechte ebene Bildfläche geltenden Regeln unter Feſthaltung eines und deſſelben Geſichtspunktes ausgeführt werden. Da dieſer jedoch ſelbſtverſtändlich nur für einen Theaterplatz der richtige ſein und deshalb der größere Theil der Beſchauer, namentlich wenn nicht rein landſchaftliche, ſondern architektoniſche Objecte dargeſtellt ſind, den Eindruck der Naturwahrheit in keinem Falle haben kann, ſo ſucht man dieſem Uebelſtande, zu welchem ſich noch die auf dem ſteten Abbrechen der Grundlinien der Couliſſen beruhende Schwierigkeit geſellt, bei der Herſtellung der Decorationen durch mancherlei anderweitige Abweichungen von der Strenge der Anforderungen der Linearperſpective, ſo gut es überhaupt angeht, zu begegnen, und entzieht dabei nur ſorgfältig alle die Umſtände dem Auge des Zuſchauers, welche auf dieſe Verſtöße geradezu hinweiſen könnten. Die dabei dennoch erzielten Effecte der Bühnendecorationen kommen größtentheils auf Rechnung der darin meiſt mit Geſchick behandelten, mit der künſtlichen Beleuchtung in Einklang ſtehenden Luftperſpective. Da aber die Handhabung jener unumgänglichen Verſtöße füglich nicht Gegenſtand der Belehrung in einem Lehrbuche der Perſpective ſein kann, ſo wird hier auf dieſe Art bildlicher Darſtellung nicht weiter einzugehen ſein. §. 13.

§. 14. Im Folgenden wird zunächſt überall eine ebene Bildfläche, und zwar in lothrechter Stellung, vorausgeſetzt.

Wenn nun hierbei häufiger der an ſich daſſelbe bedeutende Ausdruck Bildebene vorkommt, ſo iſt derſelbe zwar in den meiſten Fällen, jedoch nicht als unbedingt eins mit der Bezeichnung „ebene Bildfläche" aufzufaſſen, unter welcher zunächſt die körperliche Fläche, auf welcher die Darſtellung ſelbſt dem Beſchauer vorgeführt iſt, verſtanden wird. Die Bildebene iſt vielmehr eine nur in der Vorſtellung vorhandene, mit der körperlichen Bildfläche zwar meiſt zuſammenfallende, oft aber auch nur ihr parallele, unbegrenzte Ebene im mathematiſchen Sinne zur Aufnahme der perſpectiviſchen Projection. Man kann in manchen Fällen, zur Erreichung gewiſſer Vortheile beim Conſtruiren, bei einer und derſelben Darſtellung für nähere oder entferntere Objecte auch wohl nähere oder entferntere, unter einander jedoch und mit der Bildfläche und Haupt-Bildebene ſtets parallele Hülfs-Bildebenen annehmen; um ſo unbedenklicher, als die hierauf entſtehenden Projectionen den auf der Haupt-Bildebene entſtehenden, wegen der Parallelität der Ebenen, ſtets ähnliche Figuren bilden müſſen. Ein Beiſpiel hierzu und Anleitung zu dem vorkommendenfalls einzuſchlagenden Verfahren bieten die §§. 272—274.

§. 15. Nimmt man ein beſtimmtes Objeet in Betracht, etwa ein lothrecht ſtehendes Dreieck A B C (Fig. 1), nimmt man in einem Punkte O das Auge an und zieht die Geſichtslinien, hier die charakteriſtiſchen O A, O B, O C, ſo iſt offenbar, daß, wenn die Bildebene durch das Objeet ſtehend angenommen wird, das perſpectiviſche Bild dem Objeete gleich, von natürlicher Größe, iſt; ferner, daß wenn die Bildebene vor dem Objeete ſteht, das perſpectiviſche Bild kleiner als dieſes iſt; daß ferner, wenn die Bildebene hinter dem Objecte ſteht, das Bild größer als dieſes, alſo koloſſal, iſt; endlich daß, wenn die Bildebene dem Auge ſehr nahe ſteht, das perſpectiviſche Bild ſehr klein, ein

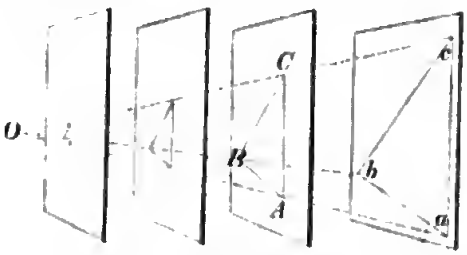

Fig. 1.

Miniaturbild, ist. Faßt man alle denkbaren Gesichtslinien zusammen, so bilden dieselben hier eine Pyramide, deren Spitze das Auge und deren Grundfläche das Dreieck a b c auf der hinter dem Objecte stehenden Bildebene ist. Da dieser Bildebene die anderen parallel sind, so müssen ihre Bilder der Grundfläche und einander ähnliche Figuren bilden.

Alle vier Perspectiven, aus dem Punkte O betrachtet, decken sich so, daß das Auge doch nur ein Bild sieht, und es ihm gleichgültig ist, auf welcher Bildebene dasselbe haftet. Man könnte deshalb, streng genommen, jedes Object bildlich in jeder beliebigen Größe naturwahr vorführen, wenn man in dieser Beziehung nicht anderen, ästhetischen Rücksichten folgen müßte, wonach man wohl Darstellungen von tiefer sittlich-historischer Bedeutung, wie sie für große Räume in öffentlichen Gebäuden passen, in naturgroßem, allenfalls kolossalem Maßstabe, hingegen genrehafte Darstellungen in kleinerem Maßstabe, unter natürlicher Größe vorführt.

§. 16. Abgesehen von den Anforderungen des guten Geschmackes, welche bei der Wahl des Ortes, von welchem aus ein darzustellendes Object am charakteristischsten, und günstigsten erscheint, zu beachten sind, verdient vor dem Beginn der Construction noch eine besondere Aufmerksamkeit die Bestimmung der Höhe des Auges zu dem darzustellenden Objecte, und seines Abstandes von diesem.

§. 17. Was die Höhe des Auges, oder, wie dasselbe in der Folge häufiger genannt werden wird, des Gesichtspunktes, betrifft, so ist es rathsam, im Allgemeinen diejenige zu wählen, in welcher das gegebene Object gewöhnlich gesehen zu werden pflegt; so namentlich bei architektonischen Gegenständen und bei Darstellungen von inneren Räumen überhaupt die Höhe, in welcher sich das Auge eines stehenden Menschen, also etwa zwischen 5 und 6 Fuß über dem Fußboden, befindet. Bei Darstellungen, in welchen menschliche Figuren die Hauptsache sind, wählt man den Gesichtspunkt in der Höhe, von welcher aus die Handlung hinreichend übersehen und verstanden werden kann; bei Handlungen im Freien ebenfalls in der Höhe des Auges eines stehenden Menschen, allenfalls noch etwas höher,

bei Handlungen im umſchloſſenen Raume gewöhnlich in der Höhe des Auges eines ſitzenden Menſchen. Bei Portraits nimmt man den Geſichtspunkt gern mindeſtens 1 Fuß unterhalb der Augenhöhe der darzuſtellenden Perſon an, damit im Bilde das Terrain oder untere Theile der Architektur nicht Kopf und Schultern des Portraits umgeben, dieſe ſich vielmehr von einem gleichartigen Hintergrunde, dem Himmel oder einer Wandfläche, abſetzen. Bei Stillleben iſt die paſſendſte Höhe des Geſichtspunktes ungefähr in der Höhe des Mittelpunktes der darzuſtellenden Gruppe; bei Landſchaften entſcheidet allein der gute Geſchmack. Im Allgemeinen wird es in bildlichen Darſtellungen einen weniger unangenehmen Eindruck machen, wenn der Geſichtspunkt etwas zu tief angenommen, als wenn derſelbe zu hoch gewählt worden.

§. 18. Die Wahl des Abſtandes des Geſichtspunktes (Diſtanz) von dem darzuſtellenden Objecte wird durch ſtrengere Rückſichten geleitet. Zunächſt iſt daran zu erinnern, daß das Auge bei ſeiner Beweglichkeit ohne Kopfwendung allenfalls einen Raum, ein Geſichtsfeld, zu überſehen vermag, welches von einem Geſichtslinienkegel eingeſchloſſen wird, der an ſeiner im Auge liegenden Spitze den Winkel von ungefähr 100° hat. Es laſſen ſich hierbei jedoch die äußerſten Objecte nur mit Anſtrengung wahrnehmen, und nur die Objecte, welche innerhalb eines Geſichtslinienkegels von nur ungefähr 45° an der Spitze liegen, laſſen eine genaue und zugleich körperlich bequeme Betrachtung zu. Da nun genau dieſelben Rückſichten, welche den Abſtand des Auges vom Objecte bedingen, auch für den Abſtand des Auges von der Bildfläche beſtehen, ſo würde die Wahl eines größeren Geſichtsfeldes als 45° nicht allein die Auffaſſung des natürlichen Objectes erſchweren, ſondern auch die Betrachtung ſeiner bildlichen Darſtellung ohne Kopfwendung unbequem machen.

Nimmt man beiſpielsweiſe ein aufgerichtetes lothrecht ſtehendes Object in Betracht, ſo würde ein Geſichtsfeld von 45° einen Abſtand des Auges von dem Objecte bedingen, welcher gleich der Höhe des letzteren iſt. Denn wäre das Object ein Thurm, wie in Fig. 2, ſo wird derſelbe nur für ein Auge O, welches ungefähr ſo

weit von ihm entfernt iſt, wie er ſelbſt hoch iſt, in ein Geſichtsfeld von 45° eingeſchloſſen.

§. 19. Die Wahl eines nicht größeren Winkels des Geſichtsfeldes empfehlen ferner äſthetiſche Rückſichten, nach welchen das Auge dem darzuſtellenden Objecte gegenüber in einen ſo großen Abſtand gebracht werden ſoll, daß das *ſcheinbare Bild* im Auge nicht zu ſehr von der *bekannten wirklichen Geſtalt* des Objectes abweiche und widerlich auffallende Verkürzungen und Verkleinerungen zeige, da in einem ſolchen Falle das *perſpectiviſche Bild* vollends verzerrt ausfällt. Würde man ſich z. B. dem in Fig. 2 dargeſtellten Thurme, mit ſeiner Galerie, ſeinen ſtark vorſpringenden Geſimſen und ſeinem flach anſteigenden Dache ſo ſehr nähern, daß er ein etwa 60° großes Geſichtsfeld ausfüllte, ſo würden einem demnach in O^1 befindlichen Auge die oberen Theile des Thurmes ſehr verkürzt erſcheinen; es würden die Galerie und die Geſimſe große Theile der darüber befindlichen Façade, der Dachvorſprung das Dach ſelbſt verdecken und die Geſimskanten würden auffallend von der horizontalen Richtung abzuweichen ſcheinen; während alle dieſe ſcheinbaren Abweichungen von der Wirklichkeit ſich bedeutend mildern, wenn das Auge bis O, d. h. in einen Abſtand zurückgeht, welcher, einem 45° großen Geſichtsfelde entſprechend, gleich der Höhe des Thurmes iſt.

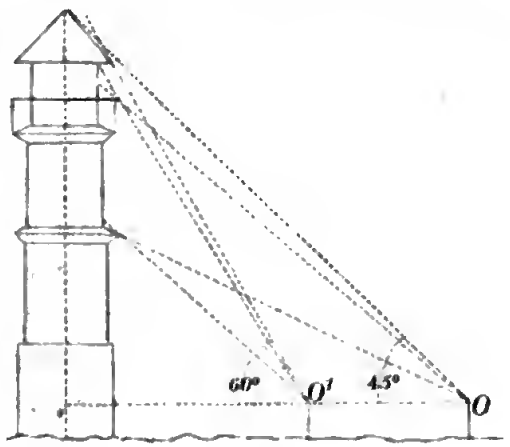

Fig. 2.

§. 20. Nimmt man hierzu noch in Betracht, daß man das Hauptobject nie ſo darzuſtellen pflegt, daß es bis zu den Grenzen der Bildfläche reicht, daß man vielmehr unter- und oberhalb und zu den Seiten des Hauptobjectes noch Erdboden, Luft und landſchaftliche oder architektoniſche Umgebung aufnimmt, und daß man, nach dem oben Geſagten, deren Ausdehnung bei der Berechnung des Ab-

ſtandes mit in Rechnung zu ziehen hat, ſo ergiebt ſich, daß der bisher ins Auge gefaßte Abſtand weiter noch überſchritten werden muß.

§. 21. Es empfiehlt dies außerdem beſonders der in §. 19 angedeutete, das perſpectiviſche Bild betreffende, und am beſten an einem Beiſpiele zu erläuternde Umſtand:

Nimmt man als gegebene Objecte zwei in der Höhe des Auges ſchwebende Kugeln K und U, die in Fig. 3 im Grundriſſe vorgeführt ſind, an, ſo erſcheinen dieſelben dem ebenfalls im Grundriſſe und zwar in großer Nähe zu den Kugeln angegebenen Auge O^1 natürlich auch als Kugeln mit kreisförmigen Umriſſen. Die nach ihnen denkbaren Geſichtslinien bilden Kegel, deren Baſen Kreiſe der Kugeln ſind. Denkt man ſich nun durch dieſe Kegel die Bildebene b i wie in der Figur geſtellt, ſo wird das der Kugel U entſprechende perſpectiviſche Bild auf der Bildebene die Breite a b, das der Kugel K entſprechende perſpectiviſche Bild wird aber die größere Breite c d haben; jenes Bild wird ein Kreis, dieſes eine dem Kreiſe ſehr unähnliche Ellipſe ſein.

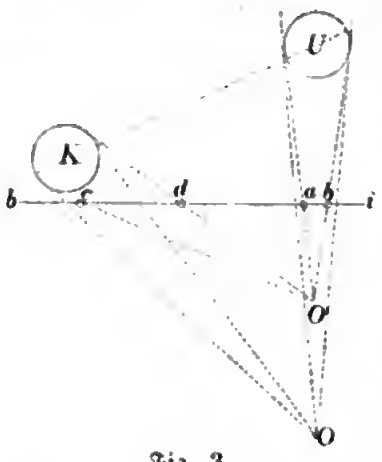

Fig. 3.

Nähme man jedoch das Auge in O, alſo in einem Abſtande von den Kugeln an, welcher mindeſtens ſo groß iſt wie die Entfernung der beiden äußerſten Kugelpole von einander, ſo würde wieder die Perſpective der Kugel U ein Kreis, die Perſpective der Kugel K jedoch eine dem Kreiſe nicht ſo ſehr unähnliche Ellipſe ſein, da ihre Breite nicht ſo auffallend verſchieden von der Breite der Perſpective der Kugel U wäre.

Obwohl nun die dem Geſichtspunkte O^1 entſprechende Perſpective der Kugel K, aus dem Punkte O^1 betrachtet, ſelbſt als Kreis erſcheint, da ſie die ſcheinbaren Umriſſe der Kugel deckt, ſo würde ſie doch jedem ſein Auge nicht genau in den Geſichtspunkt O^1 bringenden Beſchauer als unnatürliche Verzerrung erſcheinen, während die dem Geſichtspunkte O entſprechende Perſpective der Kugel K

dieſem Uebelſtande weniger unterworfen wäre. Iſt es nun gleich erforderlich, daß der Beſchauer in allen Fällen ſich bemühen muß, dem Bilde gegenüber ſein Auge in den von dem Darſteller gewählten Geſichtspunkt zu bringen, ſo glückt dies doch nicht immer vollkommen, zumal ihm dieſer Punkt vor ebenen Bildflächen nicht wie vor panoramatiſchen angewieſen werden kann. Es muß daher der Darſteller den Abſtand ſo groß nehmen, daß die Darſtellung auch einem nicht ganz richtig ſituirten Beſchauerauge nicht allzu widerwärtige Verzerrungen zeige.

Als ein Beiſpiel ſolcher Verzerrung iſt die weiter unten in §. 174, Fig. 21 (Taf. 2) vorgeführte Geſimsperſpective anzuſehen, ebenſo der untere Theil des in Fig. 72 (Taf. 13) dargeſtellten halbkreisförmigen Ausbaues. Doch ſoll hierzu ſogleich bemerkt werden, daß in dieſen und auch noch vielen anderen Figuren die Verzerrungen abſichtlich herbeigeführt ſind, weil bei ihrer Zulaſſung die Conſtructionspunkte und -Linien weiter aus einander fallen und dabei das Conſtructionsverfahren verſtändlicher darzulegen iſt.

Es kann das im Vorhergehenden über die beiden Kugeln Geſagte beiläufig zugleich als ein Beleg für die in §. 7 ausgeſprochene Behauptung dienen, daß man beim Zeichnen nach der Natur Das, was man ſieht, das ſcheinbare Bild, nicht ohne Weiteres auf der Bildfläche reproducirен darf.

§. 22.

Die eben nachgewieſene Verſchiedenheit zwiſchen dem Netzhaut- oder ſcheinbaren Bilde und dem perſpectiviſchen Bilde läßt ſich, wie hiernächſt gezeigt werden ſoll, in Zahlen vorführen, und kann man ſo die Regel, wie groß das Geſichtsfeld ſein dürfe, um nicht perſpectiviſch allzu verzerrte Bilder einzuſchließen, und die hieraus folgende Regel, wie groß der Abſtand des Auges von dem Objecte ſein müſſe, noch beſtimmter herleiten.

Zunächſt läßt ſich die relative Größe des Netzhautbildes in Zahlen ausdrücken, wenn man das Bild als Bogen des Geſichtswinkels des Objectes anſieht. Iſt z. B. A B in Fig. 4 ein Object, k der Kreuzungspunkt im Auge O, b a das von dem Objecte verurſachte Netzhautbild, ſo iſt A k B der Geſichtswinkel des Objectes. Dieſen

Winkel meſſen heißt ſo viel, als ſeinen Bogen meſſen. Schlägt man dieſerhalb um Punkt k mit beliebigem Radius, etwa k b, einen Kreis, und nimmt dieſen, wie es üblich iſt, als in 360 Einheiten (Grade) getheilt an, ſo ſchließt der Geſichtswinkel A k B deren 10 ein. Da nun Winkel a k b dem Winkel A k B als deſſen Scheitelwinkel gleich iſt, das Netzhautbild b a aber ohne erheblichen Fehler als mit dem Kreiſe zuſammenfallend angeſehen werden kann, ſo iſt ſowohl der Winkel a k b als das Netzhautbild b a als 10 jener Einheiten groß anzuſehen, und man kann hiernach die Ausdrücke „Ausdehnung des Netzhautbildes" und „Bogen oder Größe des Geſichtswinkels" als gleichbedeutend anſehen.

Fig. 4.

§. 23. Sind nun in Fig. 5 zwei einander gleiche Objecte, die Kugeln A und C, im Grundriſſe und ebenſo in O das Auge gegeben, ſo bringen die beiden Objecte dem Obigen nach gleiche Netzhautbilder hervor, denn ſie haben gleiche Geſichtswinkel α und γ, jeder $2\frac{1}{2}°$ groß, wie auf dem Meſſungsbogen P q abzuleſen iſt. Denkt man ſich nun die Bildebene b i wie in der Figur geſtellt, ſo ſind P d und e f die Perſpectiven der beiden Objecte, da deren Geſichtslinien die Bildebene in den genannten Punkten ſchneiden. Mathematiſch aufgefaßt ſind die durch die, behufs gleichmäßiger Abtheilung des Meſſungsbogens gezogenen Radien auf der Bildebene abgetheilten Strecken d P, k P, l P ..... f P, e P u. ſ. w. als Tangenten der entſprechenden Winkel d O P, k O P, l O P ..... f O P, e O P u. ſ. w. anzuſehen.

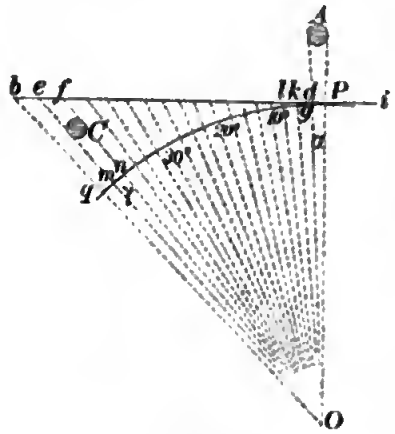

Fig. 5.

Der bloße Anblick der Figur ergiebt ſchon, daß die Strecken P d und e f nicht allein größer ſind, als die von denſelben Geſichtslinien (Radien) auf dem Meſſungsbogen abgetheilten einander gleichen

Strecken P g und m n, ſondern daß auch e f erheblich größer als P d iſt. In Zahlen ausgedrückt ſtellt ſich dieſes Verhältniß folgendermaßen:

Nimmt man die Länge O P (den Radius) als in 1000 Einheiten getheilt an, ſo beträgt die Strecke (Tangente) P d etwa 43,7 dieſer Einheiten, die Strecke e f deren circa 77, während ſowohl P g als m n auf dem Meſſungsbogen jede circa 43,6 betragen. Führt man dieſe Vergleichung der Tangenten- und Bogenlängen für die zwiſchen den Winkelſchenkeln O P und O b liegenden Winkel von $2^1/_2$ zu $2^1/_2$° weiter durch, ſo wachſen die Tangentenlängen, wie folgende, in größerer Ausführlichkeit am Schluſſe vorliegende Tabelle zeigt:

Für den Winkel von				$2^1/_2$°	beträgt	der	Bogen	43,6,	die	Tangente 43,7
»	»	»	»	5°	»	»	»	87,2	»	» 87,5
»	»	»	»	$7^1/_2$°	»	»	»	130,8	»	» 131,6
»	»	»	»	10°	»	»	»	174,4	»	» 176,3
»	»	»	»	$12^1/_2$°	»	»	»	218	»	» 221,7
»	»	»	»	15°	»	»	»	261,6	»	» 267,9
»	»	»	»	$17^1/_2$°	»	»	»	305,2	»	» 315,3
(»	»	»	»	$18^1/_2$°	»	»	»	322,6	»	» 334,6)
»	»	»	»	20°	»	»	»	348,8	»	» 364
»	»	»	»	$22^1/_2$°	»	»	»	392,4	»	» 414,2
»	»	»	»	25°	»	»	»	436	»	» 466,3
»	»	»	»	$27^1/_2$°	»	»	»	479,6	»	» 520,6
»	»	»	»	30°	»	»	»	523,2	»	» 577,4
»	»	»	»	$32^1/_2$°	»	»	»	566,8	»	» 637,1
»	»	»	»	35°	»	»	»	610,4	»	» 700,2
(»	»	»	»	37°	»	»	»	645,2	»	» 753,6)
»	»	»	»	$37^1/_2$°	»	»	»	654	»	» 767,3
»	»	»	»	40°	»	»	»	697,6	»	» 839,1
»	»	»	»	$42^1/_2$°	»	»	»	741,2	»	» 916,3
»	»	»	»	45°	»	»	»	785	»	» 1000.

Während hiernach die einzelnen Strecken auf dem Meſſungsbogen ſämmtlich circa 43,6 betragen, einander gleich ſind, wächſt

die Größe der ihnen entſprechenden Strecken der Tangenten in folgender Weiſe:

	0	bis	$2\frac{1}{2}°$	= 43,7
von	$2\frac{1}{2}$	bis	5°	um 43,8
»	5	»	$7\frac{1}{2}°$	» 44,1
»	$7\frac{1}{2}$	»	10°	» 44,7
»	10	»	$12\frac{1}{2}°$	» 45,4
»	$12\frac{1}{2}$	»	15°	» 46,2
»	15	»	$17\frac{1}{2}°$	» 47,4
»	$17\frac{1}{2}$	»	20°	» 48,7
»	20	»	$22\frac{1}{2}°$	» 50,2
»	$22\frac{1}{2}$	»	25°	» 52,1
»	25	»	$27\frac{1}{2}°$	» 54,3
»	$27\frac{1}{2}$	»	30°	» 56,8
»	30	»	$32\frac{1}{2}°$	» 59,7
»	$32\frac{1}{2}$	»	35°	» 63,1
»	35	»	$37\frac{1}{2}°$	» 67,1
»	$37\frac{1}{2}$	»	40°	» 71,8
»	40	»	$42\frac{1}{2}°$	» 77,2
»	$42\frac{1}{2}$	»	45°	» 83,7.

Unterſucht man nun, an welcher Stelle in der letztern Tabelle die Größe der Tangentenſtrecken anfängt ſehr merklich zuzunehmen, ſo findet man, daß dies zwiſchen $17\frac{1}{2}°$ und 20° der Fall iſt und demnach etwa $18\frac{1}{2}°$ die Grenze bilden, an welcher die Größe der Bogenſtrecken anfängt, auffallend verſchieden von der Größe der Tangentenſtrecken zu werden. Da dies auch für rechts von der Linie O P (Fig. 5) liegende Objecte gilt, ſo leuchtet ein, daß die Größe des ganzen zuläſſigen Geſichtswinkels (Geſichtsfeldes) ſtrenggenommen 2 mal $18\frac{1}{2}°$, d. i. 37° nicht überſchreiten darf, und daß alle außerhalb dieſes Geſichtswinkels liegenden Objecte von der Darſtellung auszuſchließen ſind, weil ſie perſpectiviſche Bilder ergeben, welche im Vergleich mit den entſprechenden Netzhautbildern zu ſehr verzerrt ſind.

§. 24. Aus der Annahme eines Geſichtsfeldes von 37° folgt aber auch direct die Nothwendigkeit eines Abſtandes des Auges von dem dar-

zuſtellenden Objecte, welcher gleich $1\frac{1}{2}$ mal der größten Ausdehnung deſſelben iſt.

Betrachtet man nämlich die Linie B C in Fig. 6 als die größte, etwa horizontale Ausdehnung eines darzuſtellenden Objectes, errichtet auf ihr in ihrem Halbirungspunkte P eine normale Linie P x, welche als Achſe des Geſichtslinienkegels anzuſehen iſt, legt an B C in B den Winkel von $71\frac{1}{2}°$ an, ſo ſchneidet man mit deſſen Schenkel B O die Normale P x in O, und beträgt nun in dem rechtwinkligen Dreiecke B P O der Winkel bei $O = 18\frac{1}{2}°$, da der bei $B = 71\frac{1}{2}°$ beträgt (die Winkel eines Dreiecks betragen zuſammengenommen 180°). Sieht man nun O als den Geſichtspunkt an, ſo iſt der Winkel B O P erſt die Hälfte des Geſichtsfeldes; zieht man demnach nach O C, ſo hat der ganze Geſichtswinkel B O C die empfohlene Größe von 37°.

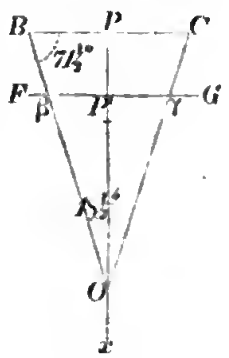

Fig. 6.

Vergleicht man aber die Länge P O, den Abſtand, mit der Länge B C, der größten Ausdehnung des Objectes, ſo ergiebt ſich, daß P O gleich $1\frac{1}{2}$ mal B C iſt. Wenn nämlich wieder P O gleich 1000 iſt, ſo iſt nach der obigen Tabelle die Tangente P B des $18\frac{1}{2}°$ betragenden Winkels P O B gleich 334,6. P B iſt demnach $\frac{1}{3}$ von P O, der Conſtruction nach aber $\frac{1}{2}$ von B C; folglich iſt B C gleich $\frac{2}{3}$ von P O, oder, was nachzuweiſen war, P O iſt gleich $1\frac{1}{2}$ mal B C.

Denkt man ſich zwiſchen der Linie B C und dem Auge O die Bildebene F G — wovon das Stück $\beta\gamma$ mit der Bildfläche ſelbſt zuſammenfallen möge und demnach, der Ausdehnung des Objectes B C entſprechend, ihre längſte Seite vorſtellen würde — und zwar ſo geſtellt, daß ſie die Achſe des Geſichtslinienkegels (Hauptgeſichtslinie) P O normal durchſchneidet, ſo muß ſich, wegen der Aehnlichkeit der beiden rechtwinkligen Dreiecke $\beta P^1 O$ und B P O, βP^1 zu $P^1 O$ verhalten wie B P zu P O, und $P^1 O$ (der Abſtand vom Bilde) $1\frac{1}{2}$ mal ſo groß ſein als $\beta\gamma$ (die längſte Seite des Bildes). Will der Beſchauer des Bildes alſo den richtigen Geſichtspunkt dazu einnehmen, d. h. die Darſtellung unter demſelben Geſichtswinkel ſehen, wie der Darſteller das natürliche Object, ſo muß-

er sein Auge in einen Abstand vom Bilde bringen, welcher gleich ist $1\frac{1}{2}$ mal der längsten Seite desselben.

§. 25. Wie man sich zu verhalten habe, um die ästhetischen Rücksichten bei der Wahl des Gesichtspunktes mit der oben empfohlenen Regel hinsichtlich der Größe des Abstandes zu vereinigen, ist aus folgendem Beispiele zu ersehen:

In Fig. 7 ist der Grundriß eines Gebäudes gegeben, dessen größte horizontale Ausdehnung B C = 55 Fuß betrage. Vergrößert man, um links und rechts neben dem perspectivischen Bilde des Gebäudes noch dessen seitliche und hintergrundliche Umgebung vorzuführen, dieses Maß für jede Seite um 10 Fuß, im Ganzen also 20 Fuß, so beträgt hiernach die größte Ausdehnung F E des überhaupt Darzustellenden 75 Fuß. Errichtet man nun auf der Linie F E in ihrem Halbirungspunkte p eine Normale und macht dieselbe $1\frac{1}{2}$ mal 75 Fuß, d. i. $112\frac{1}{2}$ Fuß lang, also gleich p o, so wäre o ein der gegebenen Regel entsprechend liegender Gesichtspunkt. Wenn jedoch, wie hierbei angenommen werden möge, ästhetische Rücksichten es wünschenswerth machen, daß das Gebäude von einem weiter links liegenden Gesichtspunkte aufgenommen werde, und man wollte nun, den Abstand p o von der Linie F E festhaltend, den Gesichtspunkt einfach etwa nach o^1 verlegen, so würden die von diesem Punkte nach F und E denkbaren Gesichtslinien einen bedeutleineren Gesichtswinkel als 37° einschließen und würde dieser Gesichts-

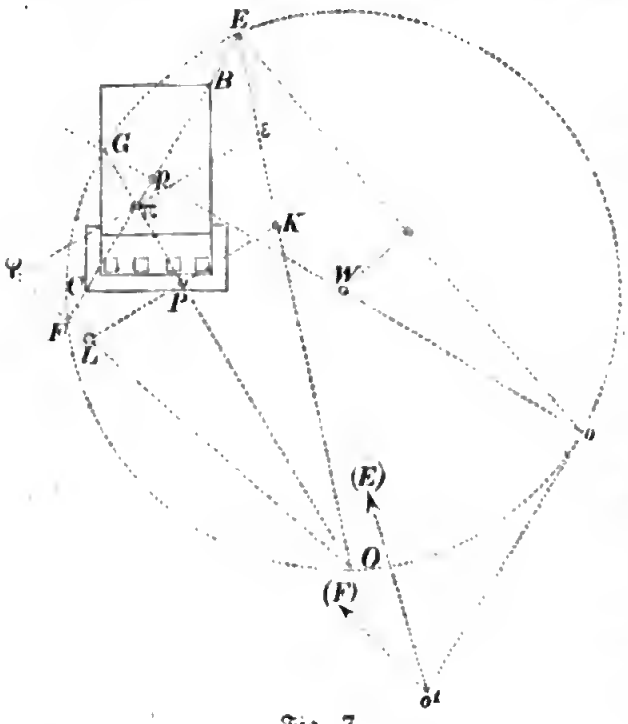

Fig. 7.

punkt demnach weiter als $1\frac{1}{2}$ mal F E — wie ſie ſich einem Auge in o^1 verkürzt darſtellt — von ihr entfernt ſein. Legt man aber durch die drei Punkte F, E und o einen Kreis — was ausgeführt wird, wenn man, F E als eine Sehne des geſuchten Kreiſes auffaſſend, eine zweite Sehne E o zieht, auf dieſer in ihrem Halbirungspunkte eine Normale errichtet und mit letzterer die auf der Sehne F E in deren Halbirungspunkte p ſtehende Normale p o im Punkte W ſchneidet, wonach dieſer der Mittelpunkt des Kreiſes und W E oder W o der Radius deſſelben iſt — ſo ſind nach dem mathematiſchen Lehrſatze, daß alle Peripheriewinkel über gleichen oder einem und demſelben Bogen (hier F E) einander gleich ſind, alle in der Peripherie dieſes Kreiſes denkbaren Punkte ſo gelegen, daß Linien, von ihnen nach F und E gezogen, ſtets einen Winkel von 37° einſchließen. Es liegen deshalb alle dieſe Punkte ſelbſt in dem entſprechenden Abſtande zu den von dieſem Winkel eingeſchloſſenen Objecten, und könnte demnach etwa O als ein geeignet liegender Geſichtspunkt angenommen werden.

Wo man hiernach auch die Bildebene — wofern ſie nur normal zu der Hauptgeſichtslinie O G ſteht — annehmen würde, der Abſtand dieſes Geſichtspunktes von ihr würde ſtets proportional ſeinem Abſtande von der ſcheinbaren Mitte der darzuſtellenden Objectgruppe ſein. Stände beiſpielsweiſe die Bildebene durch P, ſo wäre O P gleich $1\frac{1}{2}$ mal L K, und ſtände ſie durch π, ſo wäre O π gleich $1\frac{1}{2}$ mal $\varphi\,\varepsilon$.

§. 26. Es bedarf kaum der Erwähnung, daß das angegebene Verfahren ſich nur unter der Bedingung empfiehlt, daß die beiden zu einander diagonal liegenden Punkte F E, oder vielmehr C B, ſichtbar und in die Darſtellung aufgenommen ſein ſollen. Sollte nur die Façade des Gebäudes ohne Seitenanſicht dargeſtellt werden, ſo würde man bei der Ermittelung der Diſtanz natürlich nicht die diagonale Ausdehnung des ganzen Gebäudes, ſondern die größte Ausdehnung der Façade allein zu Grunde legen.

§. 27. Schließlich ſei noch bemerkt, daß man, was auch ein Blick in die oben §. 23 gegebenen Tabellen beſtätigt, in den wenigſten Fällen einen Fehler begehen wird, wenn man das Geſichtsfeld eher noch

etwas kleiner als 37° groß, und den Abstand demnach eher etwas größer, als $1\frac{1}{2}$ mal die größte Ausdehnung der darzustellenden Objecte zusammengenommen, annimmt.

§. 28. Außerdem giebt es Fälle, in welchen der oben empfohlene Abstand überhaupt gar nicht anwendbar ist, wie z. B. beim Darstellen von Portraitköpfen und Brustbildern, wo es schon wegen der räumlichen Ausdehnung des menschlichen Körpers unausführbar wäre, das Auge in dem besagten Abstande festzuhalten. Man wählt hier einen Abstand, welcher mindestens gleich 3 mal der größten Ausdehnung des darzustellenden Theiles der Person ist. Andererseits giebt es Einzelheiten in Landschaften und Bauwerken, Theile von deren Innerem, welche überhaupt nur von gewissen Gesichtspunkten aus gesehen werden können, bei deren Darstellung man daher auch den Abstand wählen muß, in welchem man sie zu sehen gewohnt ist.

§. 29. Bei der Anfertigung von solchen Bildern, welche an sich sehr kleine oder wohl gar nur mittels des Mikroskopes sichtbare Gegenstände vergrößert darstellen, ist die Größe des Abstandes allein durch die richtige Sehweite bedingt; denn bei der Betrachtung solcher Bilder ist man an sich schon genöthigt, einen Abstand von mindestens 8 Zollen, das geringste Maß der normalen Sehweite, einzuhalten.

Ebenso ist das angerathene Maß des Abstandes nicht immer einzuhalten sowohl bei der Ausführung, als bei der Betrachtung von Bildern kolossalen Maßstabes, wie etwa Wand- und Plafondgemälden, oder von Darstellungen von überwiegend großer Ausdehnung nach einer Seite, wie etwa Friesbildern (bei denen überdies mehrere Gesichtspunkte angenommen werden müssen), weil hier der Darsteller sich so weit von den Objecten und der Beschauer sich so weit von dem Bilde entfernen müßte, daß das Letztere aus räumlichen Rücksichten oft unmöglich, jedenfalls aber die Deutlichkeit des Sehens gefährdet wäre.

§. 30. Im Allgemeinen jedoch ist die oben empfohlene Größe des Gesichtsfeldes und des Abstandes zuverlässig. In zweifelhaften Fällen, insbesondere, wenn es reiche Landschaften oder ausgedehnte Architekturen darzustellen gilt, wird man am sichersten Verstößen

Digitized by Google

entgehen, wenn man, um das Geſichtsfeld zu begrenzen und den Geſichtspunkt feſtzuſtellen, ſich mit einer leicht herzuſtellenden Vorrichtung verſieht, welche in einem, etwa aus Pappe gefertigten Kegel mit offener Grundfläche beſteht, deſſen diametral gegenüberſtehende Seiten mit einander den Winkel von 37° bilden. Durch die außerdem etwas gekürzte Spitze blickend, wird man ſtets nur ſo viel ſehen, als innerhalb eines Geſichtsfeldes von 37° liegt; den darzuſtellenden Objecten ſich nähernd, wird man einen kleineren Theil, ſich davon entfernend, wird man einen größeren Theil derſelben überſehen, und ſo ohne Schwierigkeit die günſtigſte Anſicht, den Umfang des Geſichtsfeldes und den angemeſſenen Abſtand zugleich feſtſtellen können.

Hergeſtellt wird ein ſolcher Kegel am einfachſten, wenn man auf einem ebenen Stücke Pappe einen Kreisbogen von etwa 9 Zoll Radius ſchlägt, die Länge des Radius 2 mal auf dem Bogen aufträgt, die dadurch bezeichneten Endpunkte des Bogens durch gerade Linien mit deſſen Mittelpunkte verbindet und, nachdem man dieſe Figur ausgeſchnitten, zuſammengerollt und verklebt hat, die Spitze des ſo entſtandenen Kegels kurz fortſchneidet.

Ein ſolcher Kegel iſt zugleich bei der Anfertigung von panoramatiſchen Bildern, welche gewöhnlich die rings um einen Standpunkt liegende Gegend auf der inneren Oberfläche eines aufgerichteten normalen Cylinders, oft aber auch auf einer langen ebenen Fläche zuſammenhängend darſtellen, von Nutzen. Indem man dabei nach einander immer nur einen ſolchen Theil der Landſchaft darſtellt, welcher innerhalb eines Geſichtsfeldes von 37° liegt, wird die mit der panoramatiſchen Darſtellung nothwendig verbundene Annahme *mehrerer* Bildebenen kaum merkbar. Aus gleichen Rückſichten iſt eine Vorrichtung der angegebenen Art auch nützlich bei der *Betrachtung* von panoramatiſchen Bildern, wenn dieſelben auf einer cylindriſch gekrümmten Bildfläche vorgeführt ſind.

Die der Bildfläche zu gebende Begrenzungsfigur wird im Allgemeinen durch die Geſtalt der darzuſtellenden Objecte bedingt. Aus dem, was über das Geſichtsfeld, als einen durch einen Kegel, deſſen Spitze der Geſichtspunkt iſt, begrenzten Raum geſagt iſt, geht ſchon hervor, daß die *kreisförmige* Bildfläche und dem- §. 31.

nächſt die quadratiſche die natürlichſte iſt. Wenn die vorwiegend horizontale oder verticale Ausdehnung der natürlichen Objecte die ovale oder länglich-rechteckige Figur der Bildfläche erfordert, wie bei Landſchaften, Architektur- und Marinebildern, Portraitfiguren u. ſ. w., ſo muß vermieden werden, daß die eine Ausdehnung der Bildfläche der andern an Länge zu ſehr nachſtehe und das Bild dadurch den Charakter einer panoramatiſchen Darſtellung bekomme, was den Beſchauer zu einem Wechſeln des Geſichtspunktes, wie z. B. vor Friesbildern, beſtimmen würde. Im Allgemeinen iſt wohl das Verhältniß der kürzeren zur längeren Seite eines Bildes wie 2:3 ein ſolches, welches als die äußerſte Grenze bei der Beſtimmung der Seitenlängen anzuſehen iſt und nicht ohne leicht verſtändliche Gründe überſchritten werden darf.

§. 32. Außer den bis hierher gegebenen Erklärungen bedarf es noch der Rechtfertigung gewiſſer bei dem perſpectiviſchen Conſtruiren gebräuchlichen Annahmen:

Wenn es auch der menſchlichen Vorſtellung möglich wäre, die bei der Entſtehung des perſpectiviſchen Bildes (§. 5) gedachten Geſichtslinien bis zu ihrem Schnitte mit der Bildebene durch den Raum zu verfolgen, ſo iſt doch das praktiſche Conſtruiren durch den leeren Raum hindurch undenkbar; es erfordert daſſelbe vielmehr ſteten Anhalt an gewiſſe regelmäßige geometriſche Raumſcheiden, an denen entlang mittels gerader Linien die Ermittelung der das perſpectiviſche Bild markirenden Schnittpunkte bewerkſtelligt werden kann. Außerdem ſind ſolche allgemein gültigen imaginären Scheidungen des Raumes ſchon erforderlich, um Anhalt bei der Bezeichnung des Ortes eines gegebenen Objectes im Raume, und ſeiner Geſtalt überhaupt, zu haben.

§. 33. Dieſe Scheidungen des Raumes werden durch drei gewiſſe, unbegrenzt gedachte Ebenen gebildet, deren Stellung zu einander leicht aufzufaſſen iſt. Ihre Anordnung entſpricht den drei Hauptausdehnungen der Körper in die Höhe, die Breite und die Tiefe, und haben ſie in dieſer Beziehung eine ähnliche Bedeutung, wie die Aufriß-, die Grundriß- und die Profilebene bei dem orthographiſchen Projiciren. Die erſtere wird in der Perſpective durch die Bild-

ebene, die zweite durch die Grundebene, die dritte durch die Verticalebene vertreten.

Die Bildebene wird, wie ſchon erwähnt, als lothrecht ſtehend angenommen; ſie nimmt die Perſpectiven der vor, in oder hinter ihr befindlichen Objecte auf.

Die Grundebene wird horizontal, die Objecte werden unmittelbar oder mittelbar auf ihr ſtehend angenommen; ſie wird im Allgemeinen als den Erdboden, in Intérieurs als den Fußboden vorſtellend angeſehen. Wo Unebenheiten des Bodens, wie in bergigen Landſchaften, zur freien Wahl zwingen, nimmt man ſie an der für das Verfahren bei der Conſtruction günſtigſten Stelle an, auch wohl in der Höhe des Waſſerſpiegels, oder horizontal durch den niedrigſten ſichtbaren Punkt.

Die Verticalebene wird als durch das Auge gehend und normal zur Bildebene und zugleich zur Grundebene angenommen; ihr Ort iſt durch den Ort des Geſichtspunktes bedingt.

Außerdem ſind noch gewiſſe andere Annahmen und übliche Benennungen hervorzuheben, und ſind dieſelben am beſten durch eine perſpectiviſche bildliche Darſtellung, wie Fig. 8 iſt — worin jedoch die §. 34.

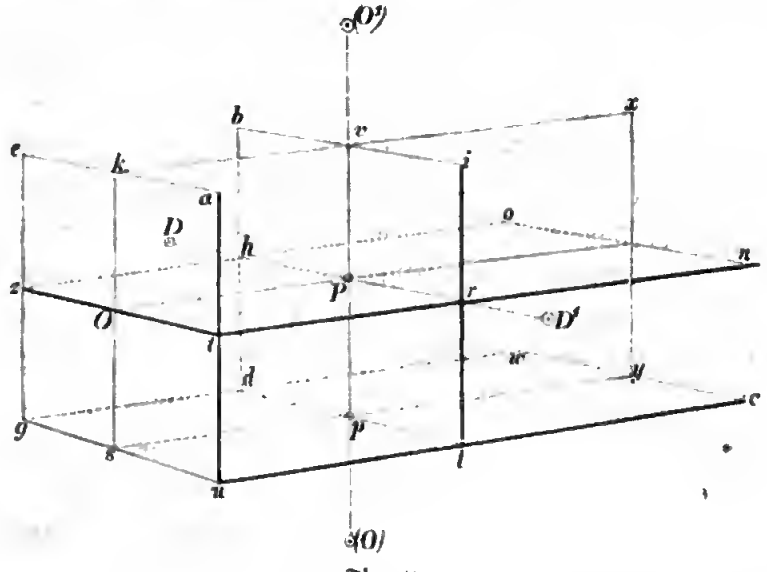

Fig. 8.

Ebenen nicht anders als begrenzt, wie man ſie ſich nicht zu denken hat, vorgeführt werden konnten — zu erklären.

Denkt man ſich aus dem Geſichtspunkte, welcher mit O (oculus) bezeichnet zu werden pflegt, eine normale Linie (O P), die Hauptgeſichtslinie, auf die Linie h r der Bildebene (b i l d) gefällt, ſo trifft ſie dieſe in dem ſogenannten Hauptpunkte (der Bildebene und des Horizontes h r, ſ. weiter unten), gewöhnlich mit P (punctum) bezeichnet. Die Länge dieſer normalen Linie bezeichnet den Abſtand oder die Diſtanz des Geſichtspunktes von dem Hauptpunkte der Bildebene; ſie iſt, wie oben hervorgehoben, ſtets proportional dem Abſtande des Geſichtspunktes von dem natürlichen Objecte.

Eine normale Linie (O s), aus dem Geſichtspunkte auf die Grundebene (g u c w) gefällt, trifft dieſe in dem ſogenannten Standpunkte (s) und heißt ſelbſt die Standlinie. Sie bezeichnet die Höhe des Auges über der Grundebene. Eine durch den Geſichtspunkt gedachte, der Bildebene parallele Ebene (e a u g) heißt die Standebene.

Die Schnittlinie (d l) der Bildebene mit der Grundebene heißt die Grundlinie der letztern. Sie giebt den Ort an, an welchem die Bildebene ſtehend angenommen worden. Sie hat nichts gemein mit der allein durch den guten Geſchmack zu beſtimmenden untern Begrenzung der Bildfläche durch den Rahmen; es iſt die Bildebene vielmehr als unterhalb der Grundlinie, zur Aufnahme der Perſpectiven der vor ihr liegenden Objecte, fortgeſetzt zu denken. — Wenn in der Folge hin und wieder der Ausdruck „Grundlinie der Bildebene" vorkommt, ſo geſchieht dies nur, um damit kurz den Ort oder die Richtung der Bildebene zu bezeichnen. Ueber die eigentliche Grundlinie der Bildebene ſ. §. 79.

Die oben gedachte, durch das Auge gehende und zur Bild- und Grundebene normale Verticalebene (k x y s) ſchneidet die Bildebene ſelbſtverſtändlich in einer zur Grundlinie normalen und durch den Hauptpunkt (P) gehenden Linie (v p), Verticallinie, oder kürzer die Verticale genannt. Sie iſt, wenn die Verticalebene als ſichtbar angenommen wird, zugleich das perſpectiviſche Bild von dieſer; denn die Geſichtslinien nach allen denkbaren Punkten der Verticalebene ſchneiden die Bildebene in der Verticallinie. Der

Schnittpunkt (p) dieſer Linie mit der Grundlinie heißt der Grundpunkt.

Eine fünfte, für die Conſtruction ſehr wichtige Ebene iſt die durch den Geſichtspunkt horizontal liegend angenommene Horizontebene (zont). Ihre ſelbſtverſtändlich horizontale Schnittlinie (hr) mit der Bildebene, welche wie die Verticale durch den Hauptpunkt geht, heißt die horizontale Grenzlinie, oder kurzweg der Horizont. Sie iſt das perſpectiviſche Bild nicht allein der Horizontebene ſelbſt (denn die nach allen denkbaren Punkten dieſer Ebene gezogenen Geſichtslinien ſchneiden die Bildebene im Horizonte), ſondern auch des als gerade Linie aufgefaßten natürlichen Erdhorizontes. Auf ihr ſowohl wie auf der Verticale pflegt man beim Conſtruiren die Länge der Diſtanz von dem Hauptpunkte P aus aufzutragen, und nennt man die ſo markirten Punkte D, D¹, (O) und (O¹), die Diſtanzpunkte, die letzteren beiden meiſt die herabgeſchlagenen Geſichtspunkte.

Da, wie geſagt, das Conſtruiren perſpectiviſcher Bilder nicht im Raume, ſondern nur auf einer körperlichen Fläche geſchehen kann, ſo ſieht man die die Conſtruction aufnehmende Zeichnungsebene (ſ. Fig. 9) als eins mit der Bildebene an. Von der Grundebene bezeichnet man nur ihre Schnittlinie mit der Bildebene, die horizontale Grundlinie d l. Der Raum über dieſer Linie ſowohl, als unter ihr iſt jenachdem bald als der Bildebene ſelbſt angehörig, bald als Perſpective der Grundebene anzuſehen. Auf der Grundlinie wird der Fuß- und Zollmaßſtab in der Größe aufgetragen, wie er für mit der Bildebene zuſammenfallende Theile des darzuſtellenden Objectes angenommen iſt, oder wie ihn die beabſichtigte Größe der Darſtellung anders vorſchreibt.

§. 35.

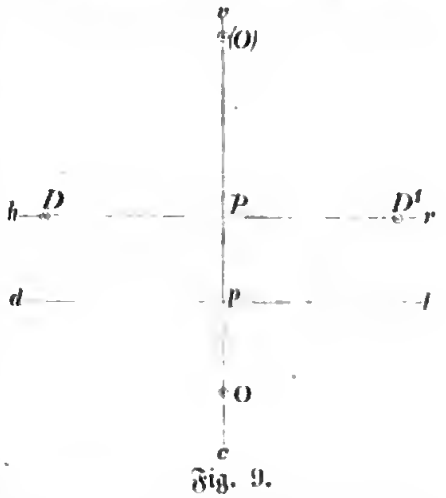

Fig. 9.

Von der Verticalebene, wie von der Horizontebene, werden

ebenfalls nur ihre Schnittlinien mit der Bildebene (ihre perſpectiviſchen Bilder) angegeben: die Verticale v c normal zur Grundlinie, der Horizont h r parallel mit letzterer und in der gegebenen, aus dem Maßſtabe zu bemeſſenden Höhe des Auges über ihr. Der Schnittpunkt beider Linien, der Hauptpunkt, wird mit P bezeichnet. Der Geſichtspunkt wird als innerhalb der Verticalebene, unter Beibehaltung ſeiner Diſtanz vom Hauptpunkte P, um dieſen bis in die Verticale beliebig über oder, wie es häufiger geſchieht, unter P hin gedreht angenommen, und mit O (als herabgeſchlagener Geſichtspunkt) bezeichnet. Ebenſo wird ſein Abſtand von P links und rechts hiervon auf den Horizont aufgetragen, und werden hierdurch die Diſtanzpunkte D und D^1 feſtgeſtellt.

§. 36. Nach dieſer Einrichtung der Conſtructionsfläche kann zur Conſtruction ſelbſt geſchritten werden.

Obgleich die Regeln für ſämmtliche perſpectiviſchen Conſtructionen dieſelben ſind, ſo erſcheint es, da es mancherlei Fingerzeige bei ihrer Anwendung an Beiſpielen bedarf, zweckmäßig, dieſe zu gruppiren und dabei im Allgemeinen zu unterſcheiden:

1) die Conſtructionen auf der ebenen Bildfläche,
2) die Conſtructionen auf der gekrümmten Bildfläche,
3) die Conſtructionen der Schatten,
4) die Conſtructionen der Spiegelbilder;

ferner die unter 1) genannten zu ſcheiden in

A. Conſtructionen lothrechter und horizontaler Objecte,
B. Conſtructionen ſchiefer Objecte;

endlich von den unter A angeführten, des leichteren Verſtändniſſes wegen, zuerſt

a) die Conſtructionen der Perſpectiven geradliniger geometriſcher Figuren und der Körper, welche von ebenen lothrechten und horizontalen Flächen begrenzt ſind, und dann
b) die Conſtructionen der Perſpectiven von krummen Linien und von Körpern, welche von krummen Flächen begrenzt ſind,

zu zeigen.

Erſter Abſchnitt.

Conſtructionen auf der lothrechten ebenen Bildfläche.

A. Conſtruction der Perſpectiven von lothrechten und horizontalen Objecten.

a. Geradlinige geometriſche Figuren und Körper, welche von ebenen lothrechten und horizontalen Flächen begrenzt ſind.

Zweites Kapitel.

Perſpectiven lothrechter und horizontaler Linien.

Gerade Linien können fünferlei Richtung haben; ſie kön- §. 37.
nen ſein

a) lothrecht,
b) horizontal und dabei parallel der Bildebene,
c) horizontal und dabei normal zur Bildebene,
d) horizontal und dabei ſchief zur Bildebene, d. h. einfach ſchief,
e) weder lothrecht, noch horizontal, d. h. doppelt ſchief.

Schließt man die letzteren, unter e) angeführten Linien vorläufig von der Betrachtung aus, um ſie dem die ſchiefen Objecte behan-

delnden Abſchnitte vorzubehalten, ſo läßt ſich über die Richtung der perſpectiviſchen Bilder der vier erſteren Linienſyſteme im Allgemeinen Folgendes vorweg feſtſtellen:

§. 38. Die Perſpectiven der unter a) angeführten lothrechten Linien ſind ebenfalls lothrecht.

Iſt nämlich in Fig. 10 eine lothrechte Linie A G gegeben, iſt O der Geſichtspunkt und bild die zwiſchen beiden ſtehende Bildebene, und man denkt ſich von O nach allen Punkten der Linie A G die Geſichtslinien, ſo bilden dieſe zuſammen offenbar eine lothrechte Ebene O A G, welche die ebenfalls lothrechte Bildebene auch nur in einer lothrechten Linie a g ſchneiden kann.

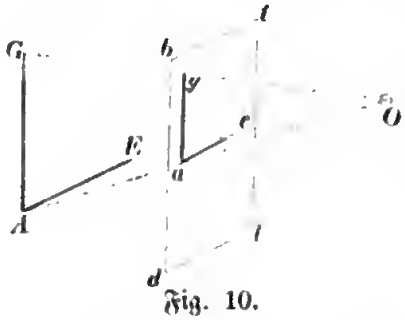

Fig. 10.

§. 39. Die Perſpectiven der unter b) angeführten horizontalen Linien ſind ebenfalls horizontal und (der Grundlinie) der Bildebene parallel, d. h. den Linien ſelbſt parallel.

Iſt nämlich wieder bild in Fig. 10 die zwiſchen der gegebenen horizontalen und zugleich (der Grundlinie) der Bildebene parallelen Linie A E und dem Geſichtspunkte O ſtehende Bildebene, ſo bilden alle von dem Punkte O nach der Linie A E denkbaren Geſichtslinien ein ebenes Dreieck O A E. Da nun die Bildebene, der Annahme gemäß, der Seite A E deſſelben parallel iſt, ſo kann ſie das Dreieck auch nur in einer der Seite A E und darum auch ihrer Grundlinie d l parallelen Linie a e ſchneiden.

§. 40. Die Perſpectiven der in §. 37 unter c) angeführten horizontalen Linien können lothrechte oder ſchiefe Linien ſein.

Fällt nämlich, wie in Fig. 11, eine ſolche Linie, etwa die in der Grundebene liegende, zur Bildebene normale Linie p F, mit der Verticalebene (O s y x) zuſammen, ſo muß auch ihre Perſpective p f mit der Perſpective der Verticalebene, d. h. mit der Verticale p P, zuſammenfallen und demnach lothrecht ſein.

Fällt aber eine horizontale und zur Bildebene normale Linie nicht mit der Verticalebene zuſammen, wie die in derſelben Figur

in der Grundebene gegebene Linie C E, ſo iſt ihre Perſpective eine ſchiefe Linie. Denkt man ſich nämlich durch den Punkt E der gegebenen Linie und durch den Geſichtspunkt eine lothrechte Ebene O Es,

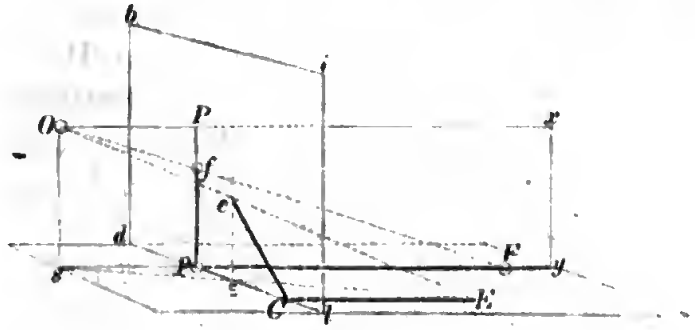

Fig. 11.

ſo ſchneidet dieſe die Bildebene in der lothrechten Linie ε e, und der hierin durch die Geſichtslinie O E beſtimmte Punkt e iſt die Perſpective des Punktes E. Der Punkt C der gegebenen Linie liegt ſelbſt in der Bildebene, und es fällt daher ſeine Perſpective mit ihm ſelbſt zuſammen. Demnach iſt C e die Perſpective der Linie C E und, als Hypotenuſe des rechtwinkligen Dreiecks C ε e, deſſen eine Kathete lothrecht iſt, eine ſchiefe Linie.

Daß auch die Perſpectiven der in §. 37 unter d) angeführten horizontalen Linien lothrecht oder ſchief ſein können, iſt auf gleiche Weiſe, wie eben geſchehen, zu veranſchaulichen. Lothrecht können die Perſpectiven ſein, wie C f in Fig. 12, wenn die gegebene Linie C F zugleich in einer lothrechten, durch den Geſichtspunkt gehenden Ebene O F s liegt; ſchief, wie die Perſpective g e, wenn die gegebene Linie G E nicht zugleich in einer ſolchen Ebene liegt. §. 41.

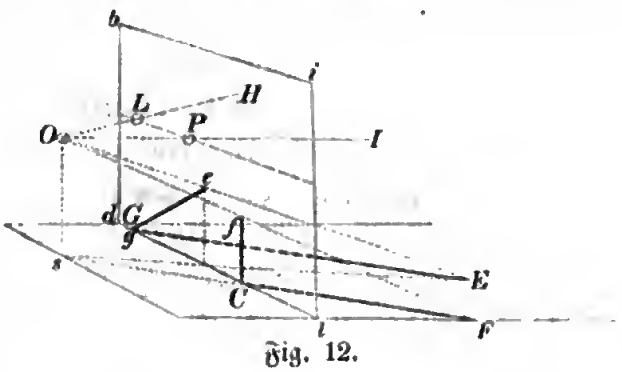

Fig. 12.

Liegen jedoch die in §. 37 unter b), c) und d) angeführten Linien in der Horizontebene, ſo müſſen ihre Perſpectiven mit der §. 42.

Perſpective dieſer Ebene, d. h. mit dem Horizonte zuſammenfallen, und darum horizontal ſein.

§. 43. Liegen die in §. 37 unter c) und d) angeführten Linien in der Horizontebene und ſind ſie zugleich ſo gerichtet, daß ſie den Geſichtspunkt ſchneiden, wie in Fig. 12 die Linien L H und P I, ſo gehen die nach allen ihren Punkten denkbaren Geſichtslinien ſämmtlich durch einen und denſelben Punkt der Bildebene; die Perſpectiven dieſer Linien, und ſelbſtverſtändlich auch aller ihrer Punkte, ſind daher Punkte, wie in der Figur die Punkte L und P.

§. 44. Aus dem in §. 5 Geſagten läßt ſich ein Verfahren für die Conſtruction der perſpectiviſchen Bilder herleiten, welches, wenn es ſich um die Perſpectiven nicht zu complicirter Objecte handelt, ſich beſonders unter Anwendung einiger hier ſpäter zu zeigenden Vortheile empfiehlt, und hauptſächlich darauf beruht, daß, nachdem von dem gegebenen Objecte, von der Bildebene und dem Geſichtspunkte der geometriſche Auf- und Grundriß gezeichnet worden, in beiden letzteren die Projectionen der Geſichtslinien gezogen und deren Schnittpunkte mit der Bildebene auf die wie in §. 35 vorbereitete Conſtructionsfläche übertragen werden.

Iſt z. B. B A in Fig. 13 der Aufriß einer lothrechten, B C der Aufriß einer horizontalen, zur Bildebene v p normalen, in der Grundebene s y liegenden Linie, und iſt O der Geſichtspunkt; iſt ferner in Fig. 14 der Grundriß derſelben Stücke gegeben: Punkt B¹ der Grundriß der Linie B A, B¹ C¹ der der Linie B C, iſt d i der Grundriß der Bildebene, O¹ der des Geſichtspunktes, O¹ P¹ der der Hauptgeſichtslinie; und liegt endlich in Fig. 15 die nach §. 35 eingerichtete Conſtructionsfläche vor — ſo hat man nur ſowohl im Aufriſſe als im Grundriſſe die Geſichtslinien zu ziehen (hier O¹ B¹ und O¹ C¹, dort O A, O B und O C), um aus letzterem entnehmen zu

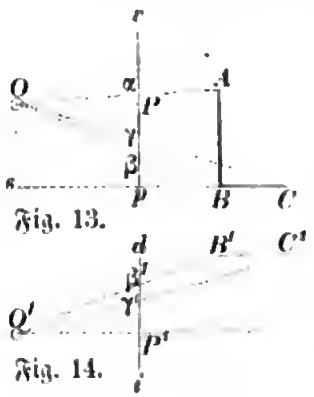

Fig. 13.

Fig. 14.

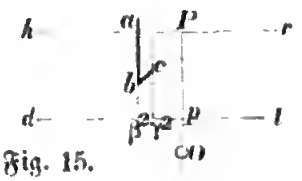

Fig. 15.

können, wie weit links die Perſpectiven der Endpunkte der gegebenen Linien von der Verticale liegen, und aus dem Aufriſſe, wie hoch die Perſpectiven derſelben Punkte in der Bildebene über der Grundlinie liegen. Ueberträgt man demnach aus dem Grundriſſe die Maße $P^1\beta^1$ und $P^1\gamma^1$ nach Fig. 15 auf die Grundlinie dl links von p in $p\beta^2$ und $p\gamma^2$, zieht durch β^2 und γ^2 zur Grundlinie normale Linien, überträgt auf dieſe die aus dem Aufriſſe zu entnehmenden Maße, nämlich $p\beta$ und $p\alpha$ auf die durch β^2 lothrechte Linie in $\beta^2 b$ und $\beta^2 a$, und das Maß $p\gamma$ des Aufriſſes auf die in Fig. 15 durch γ^2 lothrechte Linie in $\gamma^2 c$, und verbindet hier noch b mit c durch eine gerade Linie, ſo ſind ba und bc die Perſpectiven der gegebenen Linien BA und BC.

§. 45. Das bei dieſer Conſtruction eingeſchlagene Verfahren iſt das der ſogenannten Grundrißmethode. Wie man ſieht, iſt hierbei neben der eigentlichen Conſtruction die Anfertigung eines Aufriſſes und eines Grundriſſes (woher die Bezeichnung der Methode rührt) von dem gegebenen Objecte erforderlich: ein Umſtand, der bei complicirten Objecten das Conſtruiren ungemein weitläufig macht und die Anwendung einer andern, der hiernächſt zu entwickelnden „Methode der freien Perſpective“, auch „Verſchwindungspunkt-Methode“ genannt, ſehr empfiehlt.

Die Grundlagen zu dieſer andern Methode haben die Mathematiker N. L. de la Caille und J. H. Lambert gegeben, und hat ſie namentlich der Letztere in einem Werke unter dem Titel: „La Perspective affranchie de l'embarras du plan géométral“ (Zürich 1759) zuſammengeſtellt. Inſofern hierdurch der geometriſche Grundriß entbehrlich wurde, gab man der Methode den Namen der „freien Perſpective“. Im Folgenden wird ihr in den meiſten Fällen der Vorzug gegeben werden und nur in beſonderen Fällen wird die Grundrißmethode, in anderen noch eine Verſchmelzung beider in Anwendung kommen.

§. 46. Der Name der Verſchwindungspunkt-Methode rührt her von der bei ihr gebräuchlichen Anwendung der ſogenannten Verſchwindungspunkte. Es ſind dies die imaginären, in unendlicher Entfernung liegenden Punkte der in der Conſtruction vorkom-

menden, zunächſt ſtets als unendlich lang aufgefaßten geraden Linien.

Die gerade Linie, als Conſtructionsmittel, wird, wie geſagt, überall als von unendlicher Länge angenommen, wenngleich meiſt nur eine Strecke von ihr feſtgeſtellt werden ſoll. Sie tritt bald unter dem Namen einer Geſichtslinie, bald unter dem einer Richtung oder eines Strahles, bald als Ort unendlich vieler in einer Richtung neben einander liegenden Punkte auf. Sind zwei dieſer Punkte feſtgeſtellt, ſo iſt die Richtung der Linie beſtimmt. Man pflegt deshalb für jede vorkommende Linie, um ihre Perſpective ziehen zu können, zuvor die Perſpective eines ihrer in der Nähe liegenden Punkte und außerdem die Perſpective ihres in unendlicher Entfernung liegenden Punktes, ihres Verſchwindungspunktes, feſtzuſtellen.

§. 47. Der Auffaſſung des Verſchwindungspunktes und der dabei ſogleich mitzuerwähnenden Parallelität von Linien, welche in der Perſpective von beſonderer Wichtigkeit iſt, liegen die mathematiſchen Sätze zu Grunde:

1) daß parallele Linien ſolche Linien ſind, welche ſich in einem unendlich entfernten Punkte ſchneiden, und daß umgekehrt

2) ein Punkt im Unendlichen als Schnittpunkt eines Syſtems paralleler Linien anzuſehen iſt.

§. 48. Zum Verſtändniſſe dieſer dem Anfänger befremdlich klingenden Sätze gelangt man etwa folgendermaßen:

Denkt man ſich mehrere bewegliche, unendlich lange gerade Linien, von denen in Fig. 16 nur Strecken va, vb, vc, vd und ve vorliegen, und welche einerſeits ſämmtlich an dem beweglichen Punkte v haften, andererſeits aber jede durch einen beſondern unverrückbaren Punkt a, b, c, d und e gehen, und man ſtellt ſich vor, daß der jenen Linien gemeinſchaftliche Punkt v in einer beliebigen Richtung, etwa nach u hin, fortbewegt werde,

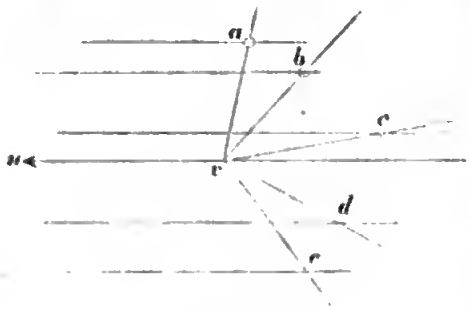

Fig. 16.

während die Linien ſelbſt durch die feſten Punkte a, b, c u. ſ. w. hindurch nachgezogen werden, ſo nimmt die nach v convergirende Richtung der Linien offenbar in dem Grade ab, in welchem die Winkel, welche die Linien bei v mit einander bilden, kleiner werden. Wird der Punkt v nun in derſelben Richtung immer weiter, zuletzt bis in die Unendlichkeit fortbewegt, ſo iſt die Größe der Winkel bei v auf Null reducirt und die Convergenz der Linien iſt in Parallelität umgewandelt. Denkt man ſich den gemeinſchaftlichen Punkt v unter denſelben Annahmen durch das Papier hindurch in einer zur Papierfläche normalen oder ſchiefen Richtung fortbewegt, ſo werden dieſelben Linien, ſobald v als in die Unendlichkeit gerückt gedacht wird, ebenfalls als parallel anzuſehen ſein.

Man kann demnach im Allgemeinen parallele Linien wohl als ſolche anſehen, welche nach einem in der Unendlichkeit liegenden Punkte convergiren, und umgekehrt jeden Punkt in der Unendlichkeit als den Schnittpunkt eines ganzen Syſtems von Parallellinien.

Um übrigens hierzu ein das Verſtändniß erleichterndes Beiſpiel zu haben, darf man nur die Richtung der der Erde zugehenden Strahlen der Sonne, deren Entfernung von der Erde wohl eine unendliche genannt werden kann, in Betracht nehmen. Obwohl dieſe Strahlen offenbar nach dem Mittelpunkte der Sonne convergiren, ſo kann dieſes große Büſchel derſelben, wegen ihrer ununterſcheidbaren Convergenz, doch nur als parallel aufgefaßt werden.

Der in der Unendlichkeit liegende Punkt einer einzelnen Linie §. 49.
iſt alſo, weil er zugleich der Schnittpunkt des ganzen Syſtems aller mit ihr parallelen Linien iſt, nicht allein der Verſchwindungspunkt der Linie, ſondern auch der des Syſtems der ihr parallelen Linien.

Der Zuſammenhang der im Vorhergehenden erörterten mathe- §. 50.
matiſchen Anſchauung der Parallelität der Linien und der hiermit verbundenen Auffaſſung des unendlich entfernten Punktes eines Syſtems paralleler Linien mit der Conſtruction der perſpectiviſchen Bilder derſelben ergiebt ſich aus Folgendem:

In Fig. 17 ſei bild die Bildebene, O der Geſichtspunkt, P der Hauptpunkt, hr der Horizont, und hinter der Bildebene ſeien zwei

parallele horizontale, zur Bildebene schiefe, unendlich lange Linien gegeben, von denen jedoch nur die Strecken A M und C N vorliegen. Faßt man von den Linien nur einzelne ihrer Punkte und zwar stets je zwei einander normal gegenüberliegende Punkte A und C, E und F, G und K, M und N, deren Entfernungen von einander den stets

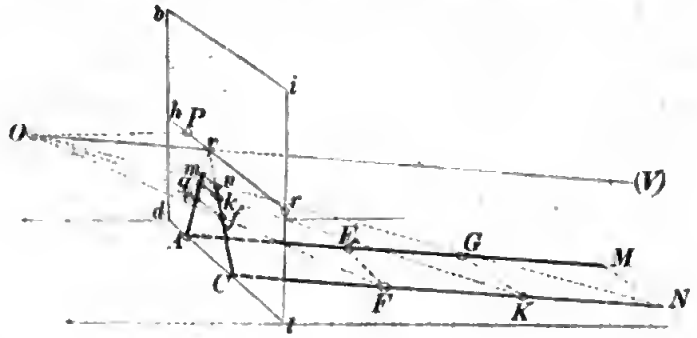

Fig. 17.

gleichen Abstand der Linien bezeichnen, zugleich aber die Perspectiven A C, e f, g k und m n dieser Abstände ins Auge, so findet man, daß zunächst die Perspectiven der Punkte A und C mit diesen zusammenfallen, weil diese selbst in der Bildebene liegen; ferner, daß die Perspectiven e und f der Punkte E und F höher in der Bildebene liegen, als die der Punkte A und C, und zugleich näher bei einander, als diese; daß ferner noch höher und näher bei einander die Perspectiven g und k der Punkte G und K liegen und daß, wenn man sich entfernter gelegene Punkte der beiden Linien denkt, deren Perspectiven in der Bildebene noch näher dem Horizonte und zugleich näher bei einander liegen müssen, und so fort, bis die Perspective des in der Unendlichkeit denkbaren gemeinschaftlichen Punktes der Linien selbstredend keinen Abstand mehr zuläßt und in einen Punkt v des Horizontes zusammenfällt. Nach diesem einen Punkte v, welcher die Perspective des Verschwindungspunktes der Linien ist, findet man auch die Perspectiven der gegebenen Linien gerichtet, wenn man durch die Perspectiven A, e, g und C, f, k der Punkte A, E, G und C, F, K gerade Linien A v und C v zieht.

§. 51. Nimmt man andererseits die nach den einzelnen Punkten einer der Linien, z. B. der C N, gehenden Gesichtslinien O C, O F, O K,

O N in Betracht, ſo findet man, daß je entfernteren Punkten dieſe angehören, deſto mehr ſie ſich der horizontalen Richtung und daher der Parallelität mit der Linie C F nähern, und daß demnach die nach dem in der Unendlichkeit gelegenen Punkte V der Linie denkbare Geſichtslinie O V mit der Linie C N geometriſch parallel, und deshalb an ſich horizontal ſein und durch die im Horizonte liegende Perſpective v des Verſchwindungspunktes gehen müſſe. Daſſelbe iſt auch von den nach Punkten der Linie A M, und zugleich auch von den nach Punkten aller anderen der C N parallelen Linien gehenden Geſichtslinien zu ſagen.

§. 52. Die aus dem Geſichtspunkte nach dem in der Unendlichkeit liegenden (Verſchwindungs-) Punkte einer Linie oder eines Syſtems von Parallellinien denkbare Eine Geſichtslinie heißt in der Perſpective der **Parallelſtrahl** der Linie oder des Linienſyſtems.

Der Schnittpunkt des Parallelſtrahles mit der Bildebene iſt die Perſpective des Verſchwindungspunktes der Linie oder des Linienſyſtems.

§. 53. Da der Parallelſtrahl einer horizontalen Linie ſelbſt horizontal iſt, ſo ſchneidet er die Bildebene ſtets in der Höhe des Geſichtspunktes, alſo im Horizonte. Die Perſpectiven der Verſchwindungspunkte horizontaler Linien liegen demnach im Horizonte.

§. 54. Nimmt man von den oben in §. 37 angeführten vier Arten von nicht doppeltſchiefen Linien der Einfachheit wegen zunächſt die unter c) genannten horizontalen und zur Bildebene normalen Linien in Betracht, ſo ergiebt ſich für dieſe alle eine und dieſelbe Perſpective des Verſchwindungspunktes. Denkt man ſich nämlich den Parallelſtrahl zu dieſen Linien, alſo eine durch das Auge gehende horizontale, zur Bildebene normale Geſichtslinie, ſo fällt deren Schnittpunkt mit der Bildebene, d. h. die Perſpective des Verſchwindungspunktes jener Linien, mit dem Hauptpunkte P zuſammen. Da offenbar die Perſpectiven der Linien nach den Perſpectiven der Verſchwindungspunkte derſelben gerichtet ſind, ſo iſt hiernach als Regel aufzuſtellen, daß die Perſpective jeder

horizontalen, zur Bildebene normalen Linie nach dem Hauptpunkte gerichtet ist.

§. 55. Ist die Perspective einer der in §. 37 unter d) angeführten horizontalen, zur Bildebene schiefen Linien zu construiren,

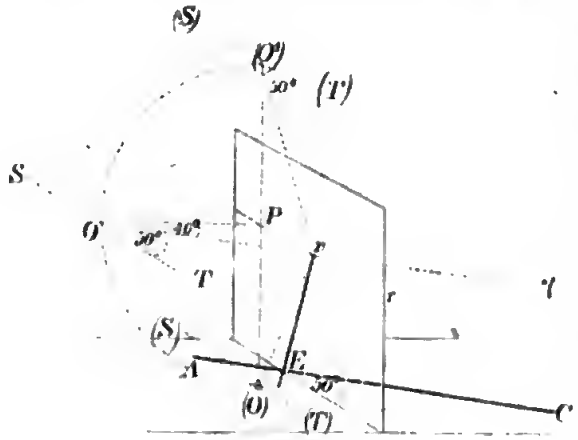

Fig. 18.

z. B. einer in der Grundebene gegebenen, die Bildebene im Punkte E (s. Fig. 18) schneidenden und mit derselben den Winkel von 50° bildenden unendlich langen Linie A C, so findet man, dem Vorigen analog, die Perspective v des Verschwindungspunktes derselben in dem Punkte, in welchem der durch den Gesichtspunkt gehende horizontale, mit der Bildebene den gegebenen Winkel von 50° bildende Parallelstrahl O γ die Bildebene schneidet.

Da die Standebene, in welcher der Gesichtspunkt liegt, der Bildebene parallel ist, so wäre der gegebene Winkel von 50° an die in der Standebene liegende horizontale Linie S T in O zu legen; der in dem angetragenen Winkelschenkel O γ vorliegende Parallelstrahl O γ, welcher die Bildebene in dem im Horizonte liegenden Punkte v schneidet, würde dann mit der Bildebene den Winkel γ v r, welcher dem Winkel T O v als Gegenwinkel gleich ist und also auch 50° beträgt, bilden. Denkt man sich nun, da das Construiren nicht im Raum geschehen kann, vielmehr auf der Bildebene stattfinden muß, die Hauptgesichtslinie P O nebst der Linie S T um den Punkt P längs der Verticalebene auf die Bildebene in P (O) oder P (O^1) herabgeschlagen, und man legt hier in (O^1) an die Linie (S) (T) den Winkel von 50°, so schneidet dessen Schenkel (O^1) v den Horizont ebenfalls in v. Zu demselben Resultat würde man gelangen, wenn P O unterhalb des Horizontes auf die Bildebene herabgeschlagen worden wäre.

Auf der zur Conſtruction beſtimmten und nach §. 35 eingerichteten Fläche hat man demnach an eine durch O (Fig. 19) gelegte, der Grundlinie (Bildebene) parallele Linie s t in O den Winkel t O v von 50° anzutragen, um in O v den Parallelſtrahl der gegebenen Linie A C, und in dem Schnittpunkte v deſſelben mit der Bildebene, und zwar im Horizonte, die Perſpective des Verſchwindungspunktes der Linie A C zu erzielen. Iſt dann e der Schnittpunkt der Linie A C ſelbſt mit der Bildebene, ſo iſt eine durch e nach v gezogene Linie a v die Perſpective der gegebenen, aber unendlich lang aufgefaßten Linie A C.

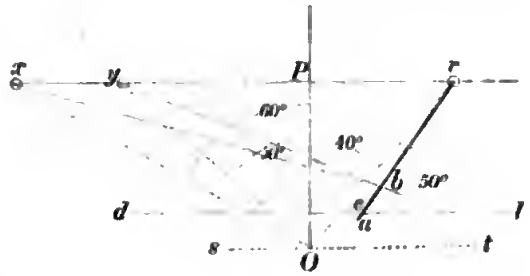

Fig. 19.

Um die Anwendung der Standebene, hier die Linie s t entbehrlich zu machen, pflegt man ſtatt des Winkels, welchen eine gegebene horizontale Linie mit der Bildebene bildet, den Winkel ins Auge zu faſſen, welchen die Linie mit der Verticalebene bildet, und demnach zu verfahren. Da letztgenannte Ebene mit der Bildebene einen rechten, alſo 90° betragenden Winkel bildet, ſo bildet die in der vorigen Figur gegebene, von der Bildebene um 50° abweichende Linie A C mit der Verticalebene den Winkel von 40°; man kommt demnach zu demſelben Reſultat, wie oben, wenn man, ſtatt an die Linie s t in O den Winkel t O v von 50° anzutragen, an die in der Verticalebene liegende, auf die Bildebene herabgeſchlagene Hauptgeſichtslinie O P in O den Winkel P O v von 40° anträgt. §. 56.

Soll nun in Fig. 19 noch durch irgendeinen Punkt, etwa b, der Perſpective a v der gegebenen Linie A C die Perſpective einer zu dieſer normalen horizontalen Linie conſtruirt werden, ſo findet man die Perſpective des Verſchwindungspunktes dieſer Linie dadurch, daß man an den Parallelſtrahl O v in O einen rechten Winkel v O y legt, deſſen Schenkel O y der Parallelſtrahl der normalen Linie iſt und den Horizont in dem Punkte y ſchneidet. Zieht man dann von y durch b eine Linie, ſo §. 57.

ist diese die Perspective der zur Linie A C normalen horizontalen Linie.

Die Perspectiven der Verschwindungspunkte zu einander normaler Linien, welche gewöhnlich correspondirende Verschwindungspunkte genannt werden, werden hier in der Folge meist mit den Buchstaben y und z bezeichnet werden.

§. 58. Soll durch irgendeinen Punkt b der Perspective a v einer gegebenen Linie A C (Fig. 19) die Perspective einer einen beliebigen andern, etwa 100° großen Winkel mit der A C bildenden horizontalen Linie construirt werden, so ist der Parallelstrahl O x der verlangten Linie, dem Vorigen entsprechend, unter dem gegebenen Winkel von 100° an den Parallelstrahl O v der Linie A C zu legen; oder, man faßt den 60° großen Abweichungswinkel der neugegebenen Linie von der Verticalebene ins Auge, und trägt diesen an die Hauptgesichtslinie O P in O.

§. 59. Um die Perspective v des Verschwindungspunktes der Linie A C zu construiren, kann man auch, da das Maß der Entfernung des Punktes v vom Hauptpunkte P die Tangente des Winkels P O v ist, dieses Maß mit Hülfe der trigonometrischen Tabellen berechnen, indem man mit der aus den Tabellen ersichtlichen Größe der Tangente des Abweichungswinkels der gegebenen Linie von der Verticalebene die Größe der Distanz multiplicirt.

Die Tangente des in der vorigen Figur vorliegenden, 40° betragenden Abweichungswinkels P O v ist gleich 0,8391 (s. die Tabelle am Ende); multiplicirt man mit dieser Zahl die Größe der hier z. B. als 20 Fuß lang angenommenen Distanz P O, so beträgt der Abstand des Punktes v von P = 20 Fuß mal 0,8391, d. i. 16,782, also nahezu $16\frac{3}{4}$ Fuß, welches Maß nunmehr aus dem für die Grundlinie d l geltenden Maßstabe zu entnehmen wäre.

§. 60. Um nun die Perspective einer der in §. 37 unter b) angeführten horizontalen, der Bildebene parallelen Linien zu construiren, müßte nach dem Vorhergehenden ein horizontaler, der Bildebene paralleler Parallelstrahl durch den Gesichtspunkt gelegt werden, um in dem Schnittpunkte desselben mit der Bildebene die Perspective des Verschwindungspunktes jener Linie zu finden. Ein solcher

Parallelſtrahl würde nach dem oben über Parallelität Geſagten die Bildebene erſt in unendlicher Entfernung links oder rechts von der Verticale und zwar im Horizonte ſchneiden, und es würde der Schnittpunkt wegen ſeiner unendlichen Entfernung überhaupt nicht bezeichenbar ſein. Handelt es ſich aber darum, nach ihm die Perſpective der gegebenen Linie zu ziehen, ſo muß eine durch die Perſpective eines der in der Nähe liegenden und hier conſtruirbaren Punkte der Linie gezogene, ſowie jede andere, dem Horizonte geometriſch parallele Linie nach dieſem Schnittpunkte gerichtet ſein. Denn zöge man eine dem Horizonte *nicht* geometriſch parallele Linie, ſo würde dieſe den Horizont früher als in dem in unendlicher Entfernung liegenden Schnittpunkte ſchneiden.

§. 61. Nach dem in den letzten Paragraphen Erörterten dürfen nunmehr folgende drei Sätze als feſtſtehend hervorgehoben werden:

1) *Die Perſpectiven der Verſchwindungspunkte horizontaler Linien liegen im Horizonte;*

2) *jeder Punkt des Horizontes iſt als Perſpective des Verſchwindungspunktes eines Syſtems paralleler horizontaler Linien anzuſehen;*

3) *in einem und demſelben Punkte des Horizontes verſchwindende Linien ſind perſpectiviſch horizontal und parallel.*

§. 62. Die Perſpective des Verſchwindungspunktes der in §. 37 unter a) angeführten *lothrechten Linien* würde, dem Vorigen analog, in dem Schnittpunkte eines durch den Geſichtspunkt gelegten lothrechten Parallelſtrahles mit der Bildebene zu ermitteln ſein. Da dieſer Parallelſtrahl zugleich in der Verticalebene läge, ſo müßte auch ſein Schnittpunkt mit der Bildebene unbedenklich in der Schnittlinie der Verticalebene mit der Bildebene, nämlich in der Verticale, und zwar in unendlicher Entfernung über oder unter dem Horizonte liegen, aus welchem Grunde dieſer Punkt ebenfalls nicht bezeichenbar wäre. Man bedarf jedoch dieſes Punktes ſelbſt auch nicht, da jede in der Bildfläche lothrecht, d. h. der Verticale geometriſch parallel gezogene Linie an ſich nach ihm gerichtet iſt; denn zöge man eine der Verticale nicht geometriſch parallele Linie, ſo würde dieſe die Verticale

früher als in jenem Schnittpunkte, der Perſpective des Verſchwindungspunktes lothrechter Linien, ſchneiden.

§. 63. Nachdem in den §§. 23—30 die Grenze bezeichnet worden, bis zu welcher die Aufnahme von Objecten in ein Bild aus äſthetiſchen Rückſichten geſtattet iſt, iſt hier ſchließlich noch zu erwähnen, wie weit Perſpectiven von Objecten, abgeſehen von jenen Rückſichten, überhaupt conſtruirbar ſind.

Daß Geſichtslinien nach Punkten ſolcher Objecte, welche ſelbſt in der Standebene liegen, die Bildebene erſt im Unendlichen ſchneiden, und daß deshalb die Perſpectiven ſolcher Objecte in unendlicher Entfernung liegen und nicht darſtellbar ſind, bedarf keiner Erörterung. Die Geſichtslinien nach Punkten rückwärts von der Standebene liegender Objecte würden nur mit ihren Rückwärtsverlängerungen die Bildebene ſchneiden, hier Perſpectiven auf der den Orten der Objecte entgegengeſetzten Seite ergeben, und ſich mit Perſpectiven der vor dem Auge liegenden Objecte vermiſchen, was wohl mit der mathematiſchen Anſchauung, aber nicht mit den Begriffen von einer bildlichen Darſtellung verträglich wäre.

Es ſind hiernach Objecte perſpectiviſch überhaupt darſtellbar nur ſo weit, als ſie **vor der Standebene**, d. h. in dem Raume hinter der Bildebene und in dem zwiſchen Bild- und Standebene liegen.

Es iſt ſelbſtverſtändlich, daß die Perſpectiven von Objecten, welche zwar vor der Standebene, dieſer aber ſehr nahe liegen, ebenfalls in ſo große Entfernung fallen können, daß ſie die Grenzen ſelbſt der größten Bildfläche überſchreiten; es iſt dies jedoch ein Umſtand, der bei gehöriger Beachtung des über die Wahl des Geſichtspunktes Geſagten nie eintritt.

Drittes Kapitel.

Perſpectiven horizontaler und lothrechter Ebenen.

§. 64. Die Lage einer Ebene wird im Allgemeinen beſchrieben durch die Lage einer ihr angehörigen geraden Linie und zugleich eines ihr

angehörigen, nicht in dieſer Linie liegenden Punktes; oder durch die Lage zweier ihr angehörigen Linien. — Eine Ebene iſt an ſich nicht darſtellbar; perſpectiviſch kann eine Ebene nur in ihren Schnittlinien mit anderen Ebenen oder krummen Flächen und durch die Perſpective ihrer in der Unendlichkeit denkbaren Grenze dargeſtellt werden. Die Schnittlinie einer Ebene mit der Bildebene heißt die Grundlinie der Ebene.

Faßt man eine Ebene als den Ort unendlich vieler geraden §. 65.
Linien auf, ſo bilden die in der Unendlichkeit liegenden Punkte dieſer Linien die in der Unendlichkeit liegende Grenze der Ebene, welche die Grenzlinie genannt wird. Der Conſequenz wegen müßte ſie eigentlich die Verſchwindungslinie heißen.

Denkt man ſich unendlich viele über einander liegende parallele horizontale Linien ſämmtlich an einer lothrechten Linie, welche die Achslinie heißen möge, haftend, ſo haben jene Linien, weil ſie parallel ſind, zunächſt einen in unendlicher Ferne liegenden gemeinſamen Verſchwindungspunkt. Denkt man ſich ferner die Achslinie nebſt den daran haftenden Linien allmählich um ſich gedreht, ohne daß die erſtere ihre lothrechte Stellung und die Linien ihre Lage zu einander und zur Achslinie verändern, ſo durchlaufen dieſe Linien alle möglichen horizontalen Richtungen, und jede beſchreibt eine beſondere horizontale Ebene; der allen Linien gemeinſame Verſchwindungspunkt aber beſchreibt dabei nur eine allen dieſen Ebenen gemeinſame unendlich entfernte gerade Linie, die Grenzlinie (Verſchwindungslinie) aller dieſer Ebenen.

Nimmt man nun den Parallelſtrahl für jene Linien, d. i. die §. 66.
nach dem gemeinſamen Verſchwindungspunkte derſelben gerichtete eine Geſichtslinie, in Betracht, und denkt ihn der Drehung jenes Linienſyſtems folgend, ſo durchläuft derſelbe während der Drehung, da er durch den Geſichtspunkt geht und horizontal iſt, die Horizontebene, und ſchneidet dabei die Bildebene in ihrer Schnittlinie mit der Horizontebene, nämlich im Horizonte. Es iſt dieſer deshalb nicht allein die Perſpective der Horizontebene ſelbſt und der Grenzlinie derſelben, ſondern vielmehr die Perſpective der einen Grenzlinie ſämmtlicher horizontalen Ebenen.

§. 67. Wenn man dem Vorigen nach eine Ebene als die Bahn eines in einer beſtimmten Richtung bewegten Parallelſtrahles anſieht, ſo kann man den Horizont ſowohl, wie die Perſpective der Grenzlinie (Verſchwindungslinie) jeder andern Ebene, als die Schnittlinie einer durch den Geſichtspunkt angenommenen Parallelebene zu der fraglichen Ebene mit der Bildebene anſehen, analog der Auffaſſung der Perſpective des Verſchwindungspunktes einer Linie als Schnittpunkt des Parallelſtrahles der Linie mit der Bildebene.

§. 68. Da der Schnitt einer horizontalen Ebene mit einer lothrechten, wie die Bildebene iſt, ſtets eine horizontale Linie iſt, ſo iſt die Grundlinie jeder horizontalen Ebene, wie die der Grundebene, horizontal, d. h. dem Horizonte parallel. Die Grundlinie der Horizontebene fällt mit dem Horizonte zuſammen.

§. 69. Jede gegebene begrenzte ebene Fläche, ſowie jede gegebene gerade Linie faßt man als irgendeiner unbegrenzten Ebene angehörig auf und behandelt ſie demgemäß bei der Conſtruction ihrer Perſpective.

§. 70. Wenn man nun auch eine gegebene horizontale Linie als irgendeiner lothrechten oder ſchiefen Ebene angehörig anſehen kann, ſo conſtruirt man ihre Perſpective doch ſtets am einfachſten, wenn man ſie als der ihr entſprechenden horizontalen Ebene angehörig behandelt.

Da jedoch die Perſpectiven von horizontalen Linien und von horizontalen ebenen Flächen an irgendwelchen Objecten dadurch leicht conſtruirt werden können, daß man die Linien oder die Flächen zu der für die Geſammtconſtruction vorweg gewählten horizontalen Grundebene in Beziehung bringt und, vermittelſt ihrer Horizontalprojectionen auf dieſer, von hier aus ihre Perſpectiven conſtruirt, ſo iſt es nicht nöthig, für jede horizontale Linie oder ebene Fläche die unbegrenzte horizontale Ebene, welcher ſie insbeſondere angehörig iſt, ins Auge zu faſſen und etwa deren beſondere Grundlinie feſtzuſtellen — wie dies zum Theil für lothrechte Ebenen und für alle ſchiefen Ebenen erforderlich iſt —, es iſt vielmehr die horizontale Grundebene mit ihrer Grundlinie bei allen bei der Conſtruction der Perſpectiven horizontaler Linien und ebenen Flächen vorkommenden Operationen ausreichend.

Durch eine dem in §. 65 Erörterten ähnliche Betrachtung iſt §. 71.
nachzuweiſen, daß die Perſpectiven der Grenzlinien der verſchiedenen möglichen lothrechten Ebenen lothrechte Linien ſind, und daß andererſeits jede den Horizont normal durchſchneidende, alſo lothrechte Linie als Perſpective der Grenzlinie einer und zugleich eines ganzen Syſtems **lothrechter** paralleler Ebenen anzuſehen iſt. Denkt man ſich nämlich die in §. 65 erwähnte Achslinie nebſt den an ihr haftenden Linien umgelegt, ſo daß jene eine horizontale, zur Bildebene ſchiefe Lage bekommt, und danach die Achslinie nebſt den Linien allmählich um ſich gedreht, ſo bewegen ſich ſämmtliche Linien jede in einer beſondern lothrechten Ebene; ihr gemeinſamer Verſchwindungspunkt aber beſchreibt dabei eine lothrechte Linie, welche die Grenzlinie dieſer Ebenen iſt, und deren Perſpective eine den Horizont normal durchſchneidende gerade Linie iſt.

Aus dem vorhergehenden Paragraphen iſt zugleich zu folgern, daß §. 72.
in der lothrechten Perſpective der Grenzlinie einer lothrechten Ebene die Perſpectiven der Verſchwindungspunkte aller in dieſer Ebene und in den ihr parallelen Ebenen denkbaren geraden Linien liegen.

Soll nun z. B. die Perſpective der Grenzlinie der durch einen §. 73.
in der Grundebene liegenden Punkt A gehenden unendlichen lothrechten, zur Bildebene normalen Ebene conſtruirt werden, ſo findet man den Punkt, in welchem dieſe Perſpective den Horizont durchſchneidet und welcher, um ſie ziehen zu können, genügt, am leichteſten, wenn man zunächſt die im Horizonte liegende Perſpective des Verſchwindungspunktes der in der lothrechten Ebene denkbaren horizontalen Linien ſucht. Zieht man zu dem Ende aus O (ſ. Fig. 20) den Parallelſtrahl O P für dieſe Linien, ſo ſchneidet derſelbe den Horizont in dem Hauptpunkte P. Legt man durch dieſen Punkt

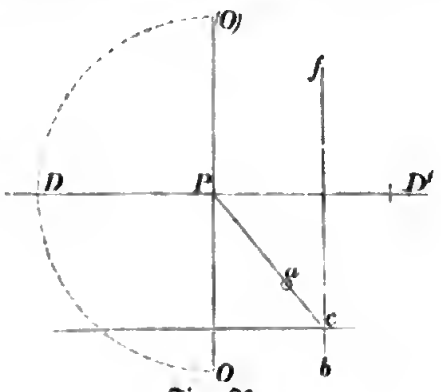

Fig. 20.

eine lothrechte Linie (welche mit der Verticale zuſammenfallen muß), ſo iſt dieſe die Perſpective der Grenzlinie der gegebenen und zugleich aller damit parallelen Ebenen, alſo auch der Verticalebene.

§. 74. Eine aus dem Geſichtspunkte (im Raume) auf dieſe Grenzlinien-Perſpective gefällte Normale trifft dieſelbe im Punkte P, welcher deshalb auch für ſie der Hauptpunkt iſt. Die Diſtanz iſt dazu dieſelbe geblieben. Sieht man die gegebene lothrechte Ebene als die um 90° gedrehte horizontale Grundebene an und nimmt an, daß die Verticalebene mit letzterer die Drehung mitgemacht habe, ſo muß dieſe, die Verticalebene, danach in eine horizontale Ebene umgewandelt ſein und ihre Grenzlinien-Perſpective als gedrehte Verticale mit dem Horizonte zuſammenfallen. Wie bisher bei der Conſtruction von horizontalen Linien, welche als je einer entſprechenden horizontalen Ebene angehörig aufgefaßt werden, der Geſichtspunkt in die Verticale herabgeſchlagen wurde, ſo wird auch für lothrechte Ebenen der Geſichtspunkt in die gedrehte Verticale herabgeſchlagen und fällt hierin in D^1 oder D, während die Diſtanzpunkte mit O und (O) in der Grenzlinien-Perſpective der lothrechten Ebene zuſammenfallen.

Iſt Punkt a die Perſpective des gegebenen Punktes A, ſo iſt eine von P durch a gezogene Linie die Perſpective der Schnittlinie der gegebenen lothrechten Ebene mit der Grundebene; und zieht man durch den Punkt c der Grundlinie, in welchem die Linie P a an die Bildebene ſtößt, eine lothrechte Linie f b, ſo iſt dieſe die Schnittlinie der Bildebene mit der gegebenen lothrechten Ebene, und darum die Grundlinie der letztern. Sie iſt, wie alle Grundlinien von Ebenen, parallel der Grenzlinien-Perſpective oder, was daſſelbe bedeutet, normal zur gedrehten Verticale.

§. 75. Iſt in der Grundebene ein Punkt A gegeben, durch welchen eine lothrechte, zur Bildebene ſchiefe, mit dieſer etwa den Winkel von 50° (alſo mit der Verticalebene den Winkel von 40°) bildende Ebene ſteht, ſo conſtruirt man, um die Grenzlinien-Perſpective der Ebene ziehen zu können, im Horizonte die Perſpective des Verſchwindungspunktes der in der Ebene denkbaren horizontalen Linien.

Da dieſe, wie die Ebene ſelbſt, um 40° von der Verticalebene abweichen, ſo iſt O H in Fig. 21 ihr Parallelſtrahl und H die Perſpective ihres Verſchwindungspunktes; demnach eine durch H gezogene

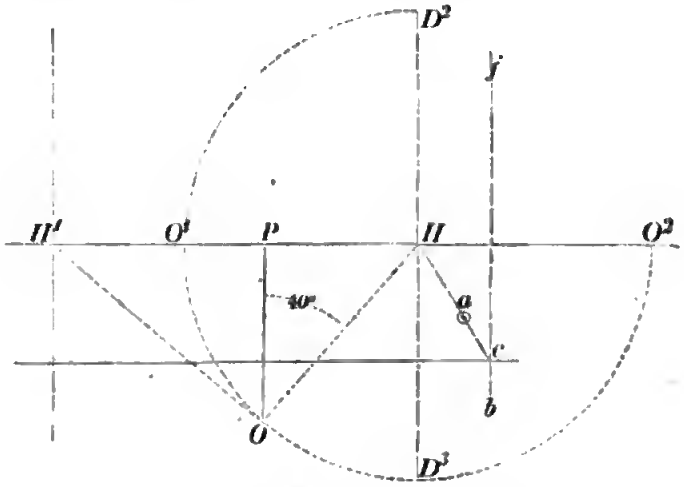

Fig. 21.

lothrechte Linie D² D³ die Grenzlinien-Perſpective der gegebenen, und aller damit parallelen Ebenen.

Der Fußpunkt H einer aus dem Geſichtspunkte im Raum auf die Grenzlinien-Perſpective gefällten Normalen iſt, wie in allen Grenzlinien-Perſpectiven, auch hier der Hauptpunkt, und die Länge dieſer Normalen, welche offenbar gleich O H iſt, die Diſtanz. Der Horizont bekommt auch hier wieder die Bedeutung der gedrehten Verticale; und wird der Geſichtspunkt in dieſe herabgeſchlagen, ſo fällt er in O¹ oder O², während D² und D³ Diſtanzpunkte ſind.

Iſt Punkt a die Perſpective des gegebenen Punktes A, ſo iſt eine von H durch a gezogene Linie H c die Perſpective der Schnittlinie der gegebenen Ebene mit der Grundebene; und zieht man durch Punkt c der Grundlinie, in welchem H c an die Bildebene ſtößt, eine lothrechte Linie f b, ſo iſt dieſe die Schnittlinie der Bildebene mit der gegebenen lothrechten Ebene, und deshalb die Grundlinie der letztern.

Soll die Perſpective einer innerhalb derſelben lothrechten Ebene liegenden nicht horizontalen, alſo nicht in H verſchwindenden, Linie

§. 76.

construirt werden, so muß der Parallelstrahl für diese Linie unter ihrem gegebenen Abweichungswinkel vom Horizonte (jetzt gedrehte Verticale) an diesen in O^1 oder O^2 angetragen und damit die lothrechte Grenzlinien-Perspective in der Perspective des Verschwindungspunktes jener Linie geschnitten werden. Das Weitere hierüber ist in dem Kapitel 10 über schiefe Ebenen, §. 287, zu finden.

§. 77. Sollen die Perspectiven von Linien construirt werden, die zu derselben lothrechten Ebene normal sind, so findet man, da dies offenbar horizontale Linien sind, die Perspective ihres Verschwindungspunktes, wenn man an den Parallelstrahl O H in O den rechten Winkel anträgt und mit dessen Schenkel $O H^1$ den Horizont in H^1 schneidet.

Zieht man durch diesen Punkt eine lothrechte Linie, so ist diese die Perspective der Grenzlinie für solche lothrechte Ebenen, welche normal sowohl zu der gedrehten Verticalebene, als zu den Ebenen sind, deren Grenzlinien-Perspective $D^2 D^3$ ist. Zu dem Hauptpunkte H^1 darin ist $H^1 O$ die Distanz, und soll der Gesichtspunkt in die gedrehte Verticale, den Horizont, herabgeschlagen werden, so ist sein Abstand von H^1 gleich $H^1 O$.

§. 78. Lothrechte, zur Bildebene nicht normale Ebenen, wie die in den vorhergehenden Paragraphen behandelte, gehören zu den einfach-schiefen Ebenen und heißen lothrecht-schiefe Ebenen.

§. 79. Für lothrechte, der Bildebene parallele Ebenen, sowie für die Bildebene endlich selbst ist die Perspective ihrer gemeinsamen Grenzlinie als in unendlicher Entfernung zugleich oberhalb, unterhalb, rechts und links vom Hauptpunkte P gelegen zu denken. Selbstverständlich sind die Grundlinien dieser Ebenen als ebenso gelegen aufzufassen. Die Perspective der Grenzlinie dieser Ebenen kommt nur in Betracht, wo es sich, wie bei der Construction der Perspectiven von Durchschnittslinien verschiedener Ebenen, um den Schnittpunkt der Perspectiven der Grenzlinien dieser verschiedenen Ebenen handelt.

§. 80. Da wegen der unendlichen Entfernung der Perspective dieser Grenzlinie auch alle Perspectiven der Verschwindungspunkte in unendlicher Entfernung liegen, sind die

Perſpectiven von in ſolchen Ebenen liegenden parallelen Linien geometriſch parallel, die Perſpectiven in dieſen Ebenen liegender Winkel ſind gleich der geometriſchen Größe derſelben, ſowie überhaupt die Perſpectiven aller Objecte, ſoweit dieſe innerhalb ſolcher Ebenen liegen, geometriſche Verticalprojectionen derſelben ſind.

Das zuletzt Geſagte iſt beſonders für alle Objecte und Stücke von Objecten, welche in der Bildebene ſelbſt liegen, zu merken.

Viertes Kapitel.

Perſpectiven gegebener Strecken auf horizontalen und lothrechten Linien. — Der Theilpunkt.

§. 81. Das Conſtructionsverfahren hierbei ſtützt ſich
für horizontale, der Bildebene parallele, und für lothrechte Linien auf den mathematiſchen Grundſatz, daß die Strecken auf parallelen Linien zwiſchen anderen parallelen Linien, welche jene ſchneiden, einander gleich ſind;
für horizontale, der Bildebene nicht parallele Linien auf die Eigenſchaften des gleichſchenkligen Dreiecks.

§. 82. Wenn nach §. 61 Linien, welche ſich in einem Punkte des Horizontes ſchneiden, als perſpectiviſch parallel anzuſehen ſind, ſo heißt dies mit anderen Worten, daß der Abſtand der einzelnen Linienperſpectiven von einander bis zu der Perſpective ihres gemeinſamen Verſchwindungspunktes überall als perſpectiviſch gleich anzuſehen iſt.

Sind demnach in der Perſpective w z (Fig. 22) einer horizontalen Linie W Z die Perſpectiven w u und u q gewiſſer Strecken W U und U Q gegeben, und es ſollen auf der Perſpective x y einer andern, der W Z parallelen Linie, von einem gegebenen Punkte x derſelben aus, jenen Strecken perſpectiviſch gleiche Strecken abgetheilt werden, ſo hat man von w eine Linie durch x nach dem

Horizonte zu ziehen, dieſen im Punkte M zu ſchneiden, und darauf durch Linien, von M nach u und q gezogen, auf der Linie x y die

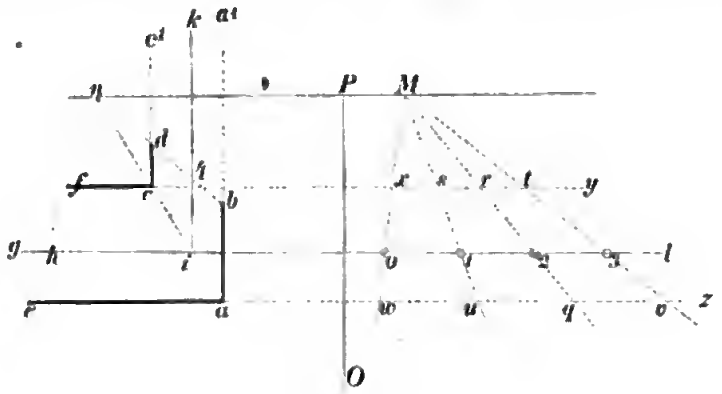

Fig. 22.

Strecken x s und s r abzutheilen. Es ſind dieſe alsdann den Strecken w u und u q perſpectiviſch gleich, weil ſie Strecken der parallelen Linien x y und w z zwiſchen den parallelen Linien w M, u M und q M ſind.

§. 83. Hiernach iſt es leicht, für jeden beliebigen Ort einer horizontalen oder lothrechten Ebene, bis zu ihrer Grenzlinie hin, die ihm entſprechende perſpectiviſche Größe eines gewiſſen Längenmaßes feſtzuſtellen, wenn daſſelbe nur für einen andern Ort derſelben Ebene bekannt iſt.

Iſt z. B. das Fußmaß das in der Conſtruction zu verwendende, ſo hat man die geometriſche Größe deſſelben zunächſt auf der Schnittlinie der Bildebene mit derjenigen Ebene, für deren verſchiedene Orte man die verſchiedene perſpectiviſche Größe deſſelben Maßes ermitteln will — in der Fig. 22 ſei dies z. B. die Grundlinie g l der horizontalen Grundebene — feſtzuſtellen. Zieht man dann, wenn hier die Abſtände der Punkte 0, 1, 2 und 3 von einander als geometriſch je 1 Fuß betragend feſtſtehen, durch dieſe Punkte Linien nach einem beliebigen Punkte M der Perſpective der Grenzlinie der horizontalen Grundebene, d. i. der Horizont, ſo ſchneiden dieſelben, weil ſie perſpectiviſch parallel ſind, auf der Perſpective jeder andern in der Grundebene liegenden und der Grundlinie g l parallelen Linie, alſo z. B. auf der Per-

ſpective x y einer hinter der Bildebene liegenden Linie X Y in den Punkten x, s, r, t, oder auf der Perſpective w z einer andern vor der Bildebene liegenden Linie W Z in den Punkten w, u, q, v das den Orten dieſer Linien entſprechende Maß von zuſammen 3 Fuß ab.

Iſt ein ſolcher perſpectiviſcher Längen- (hier Fuß-) Maß- §. 84.
ſtab, wie er in der Figur vorliegt, angefertigt, und es ſoll auf der Perſpective einer durch den Punkt C der Grundebene gehenden, der Grundlinie g l parallelen Linie, und auf der Perſpective einer ebenſolchen durch Punkt A gehenden je das Maß von 2 Fuß links von den Perſpectiven c und a jener Punkte aufgetragen werden, ſo hat man beide Linienperſpectiven nur bis in den Maßſtab zu verlängern und hieraus die Länge x r für die Strecke c f, und die Länge w q für die Strecke a e mit dem Zirkel zu entnehmen.

War übrigens nur erſt die Länge c f ermittelt, ſo konnte man §. 85.
auch eine Linie von a durch c bis n im Horizonte ziehen, und durch eine andere Linie, von n durch f gezogen, den Punkt e beſtimmen. Die beiden Linien a n und e n ſchneiden dabei auf der Grundlinie das dem Maße 0 2 gleiche Maß i h ab.

Soll für irgendeinen Ort einer andern horizontalen §. 86.
Ebene, als die Grundebene, das ihm perſpectiviſch entſprechende Fußmaß ermittelt werden, ſo conſtruirt man vermittelſt einer von ihm auf die Grundebene gefällten lothrechten Linie in letzterer ſeine Horizontalprojection, und iſt dann das dem Orte dieſer Projection zukommende Fußmaß zugleich das jenem Orte zukommende.

Wie für alle in der Bildebene ſelbſt liegenden Längen 0 1 das §. 87.
Fußmaß iſt, ſo iſt für die Längen in der Perſpective einer durch Punkt C ſtehenden lothrechten, der Bildebene parallelen Ebene: x s, und für diejenigen einer eben ſolchen durch Punkt A ſtehenden Ebene: w u das perſpectiviſche Fußmaß. Sollten alſo die Perſpectiven c d und a b von in den Punkten C und A ſtehenden lothrechten Linien z. B. je 1 Fuß lang gemacht werden, ſo iſt c d gleich x s, und a b gleich w u zu machen; und ſollte auf einer durch Punkt b gehenden Perſpective einer der Bildebene parallelen Linie das Maß von 2 Fuß aufgetragen werden, ſo wäre dies w q oder a e.

§. 88. Nimmt man jedoch eine lothrecht-ſchiefe Ebene in Betracht, z. B. die durch die Punkte A und C ſtehende, ſo ſchneidet dieſe die Bildebene in der Linie i k (Grundlinie der lothrechten Ebene), und iſt demnach das Fußmaß auf dieſer, i 4, ebenfalls gleich 0 1; für die Strecken aber der Perſpective a a' der in dieſer Ebene durch Punkt A denkbaren, der Bildebene parallelen, lothrechten Linie iſt wieder w u das Fußmaß, für die Strecken der Linienperſpective c c' iſt es x s.

§. 89. Wie man ſieht, iſt der für die horizontale Grundebene angefertigte perſpectiviſche Längen-Maßſtab auch für alle anderen horizontalen und auch für die lothrechten Ebenen benutzbar, und bedarf es der beſondern Anfertigung eines ſolchen — wie er hier z. B. zufällig in den Maßen a b, i 4, c d für die durch A C gedachte lothrechte Ebene entſtanden iſt — für andere horizontale Ebenen, als die Grundebene, und für lothrechte Ebenen nicht.

§. 90. Die Perſpective des Verſchwindungspunktes (in der Figur M) von Linien, welche (wie 0 M, 1 M, 2 M u. ſ. w.) die perſpectiviſch gleiche Theilung anderer Linien (hier x y, g l und w z) bewirken, wird der **Theilpunkt** für die letzteren genannt.

§. 91. Da auch Linien, durch die Punkte 0, 1, 2, 3 nach jedem andern beliebigen Punkte des Horizontes gezogen, auf den der Bildebene parallelen Linien x y und w z dieſelben Längen, wie x s, x r, x t und w u, w q, w v, abtheilen würden, wie dies hier die nach M gezogenen Linien 0 M, 1 M, 2 M und 3 M thun, ſo kann als Regel aufgeſtellt werden: daß für die Perſpectiven horizontaler, der Bildebene paralleler Linien jeder Punkt des Horizontes als Theilpunkt benutzt werden kann.

§. 92. Für das Verfahren bei der Conſtruction der Perſpectiven gegebener Strecken auf den Perſpectiven von horizontalen Linien, welche der Bildebene **nicht** parallel ſind, iſt vorher zu bemerken, daß die auf einer ſolchen Linie perſpectiviſch abzutheilende Strecke zuvor ſtets für die Perſpective einer mit jener Linie in derſelben Ebene und zugleich in der Bildebene liegenden, oder doch dieſer parallelen Linie (welche in der Folge der Kürze wegen die Maß-

linie heißen möge) nach Anleitung der vorhergehenden Paragraphen ermittelt, auf dieſer aufgetragen, und von ihr auf die zu theilende Linienperſpective perſpectiviſch übertragen wird. Indem man hierbei die letztere als die eine, und die Maßlinie als die andere der beiden gleichen Seiten eines gleichſchenkligen Dreiecks auffaßt, vollzieht man die der Maßlinie perſpectiviſch gleiche Theilung jener Linie durch Conſtruction der Perſpective der **Grundlinie** des den beiden Linien entſprechenden gleichſchenkligen Dreiecks.

Um letztere Perſpective ziehen zu können, bedarf es der vorherigen Ermittelung der im Horizonte gelegenen Perſpective ihres Verſchwindungspunktes, welche der **Theilpunkt der zu theilenden Linie** und zugleich aller ihr parallelen Linien iſt.

Dieſer Punkt iſt überall leicht zu conſtruiren, wenn man die §. 93.
in allen Fällen gleichen Beziehungen der Grundlinie eines gleichſchenkligen Dreiecks der vorliegenden Art zu deſſen anderen Seiten und zu der Bild- und Verticalebene zunächſt an einer geometriſchen Figur (Fig. 23) in Betracht nimmt.

Iſt hier nämlich W V die geometriſche Projection einer horizontalen, von der wie H X gerichteten Bildebene beiſpielsweiſe um 80°, von der wie A Q gerichteten Verticalebene demnach um 10° abweichenden Linie, auf welcher von ihrem Punkte A aus ein gewiſſes Maß (A E) abgetheilt worden iſt, wie es in der Strecke A C (Maßlinie) der Linie H X vorliegt, und man zieht C E, ſo bildet dieſe, die gleiche Theilung A E und A C jener beiden Linien gewiſſermaßen vollziehende Linie die Grundlinie eines gleichſchenkligen Dreiecks C A E, in welchem, da der Winkel α an der Spitze 80° beträgt, die an der Grundlinie liegenden und deshalb einander gleichen Winkel γ und ε zuſammen 100°, jeder einzelne 50° betragen.

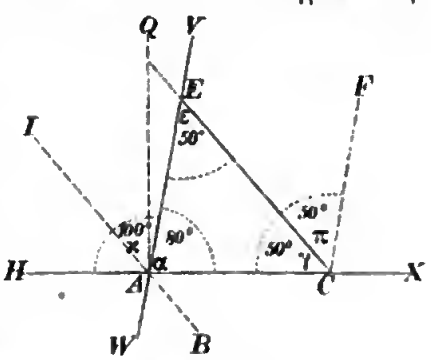

Fig. 23.

Ueber die Richtung der Grundlinie in Bezug auf die gegebenen Stücke ist nun zunächst Folgendes zu bemerken:

Legt man durch Punkt C eine der W V parallele Linie C F, so ist der Winkel π, welchen sie mit der C E bildet, als Wechselwinkel des Winkels ε diesem und daher auch dem Winkel γ gleich, und beträgt demnach ebenfalls 50°. Es kann deshalb die Linie C E als Halbirungslinie des ganzen Winkels A C F angesehen werden. Da aber dieser Winkel als Gegenwinkel gleich und gleichliegend ist dem Winkel $\varkappa$, welcher der Supplementwinkel (Supplementwinkel ist der Winkel, welcher einen andern Winkel zu 180° ergänzt) des Winkels α ist, so hat die Grundlinie C E die Richtung einer Linie (wie B I), durch welche der Supplementwinkel des Winkels halbirt wird, welchen die zu theilende Linie mit der Bildebene, oder der Maßlinie bildet.

Hiernach ist die Perspective des Verschwindungspunktes der gleichtheilenden Linie C E, der Theilpunkt für die Linie W Z, leicht zu construiren.

§. 94. Ist z. B. w v die Perspective (Fig. 24) jener von der Bildebene um 80° abweichenden Linie W V, ist a die Perspective jenes

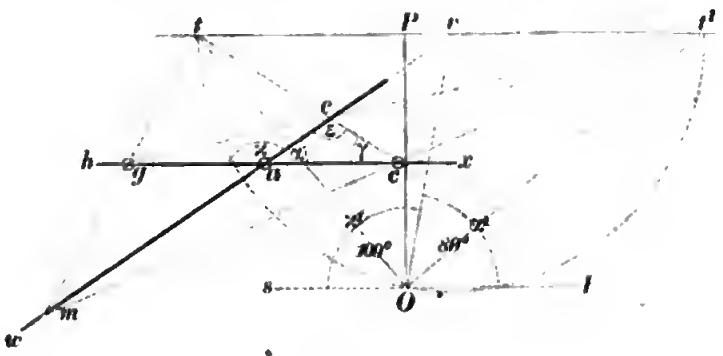

Fig. 24.

Punktes A, und soll auf w v von a aus das auf der Perspective h x der der Bildebene parallelen Linie H X gegebene Maß a c perspectivisch übertragen werden, so findet man die Perspective t des Verschwindungspunktes der die perspectivische Gleichtheilung ausführenden Grundlinie c e folgendermaßen:

Zieht man durch O eine der Bildebene parallele Linie s l, legt

an dieſe in O den Winkel α^1 von 80° an, ſo iſt ſein Schenkel O v zunächſt der Parallelſtrahl der Linie w v ſelbſt. Halbirt man darauf den 100° betragenden Supplementwinkel $\varkappa^1$ des Winkels α^1 durch die Halbirungslinie O t, ſo iſt dieſe der Parallelſtrahl für die Perſpective c e jener Grundlinie C E, und ſein Schnittpunkt t mit dem Horizonte die Perſpective des Verſchwindungspunktes derſelben und alſo der Theilpunkt für die Linie w v und alle ihr parallelen Linien. Schneidet man demnach die Linie w v durch eine von c nach t gezogene Linie in e, ſo iſt a e perſpectiviſch gleich a c gemacht, d. h. es iſt der Aufgabe gemäß das gegebene Maß a c auf die Linie w v perſpectiviſch in a e übertragen worden. Denn da h x parallel iſt s l, und w v parallel O v, ſo beträgt in dem entſtandenen Dreieck a e c der Winkel $\alpha = 80°$ wie der Winkel α^1; da ferner h x parallel iſt s l, und c t parallel O t, ſo beträgt Winkel $\gamma = 50°$ wie die Hälfte s O t des ganzen 100° betragenden Winkels $\varkappa^1$; Winkel ε endlich muß, da alle Winkel in einem Dreiecke zuſammen 180° betragen, 50° betragen und daher dem Winkel γ (perſpectiviſch) gleich ſein. Es muß demnach das Dreieck a e c, da es zwei gleiche Winkel γ und ε hat, ein gleichſchenkliges ſein, und zwar müſſen ſeinen gleichen Winkeln die (perſpectiviſch) gleichen Seiten a e und a c gegenüberliegen.

Den Theilpunkt pflegt man mit dem Buchſtaben t zu bezeich- §. 95.
nen. Werden in der Conſtruction mehrere Theilpunkte für verſchiedene Linienſyſteme gebraucht, ſo fügt man dem t noch den Buchſtaben der Perſpective des Verſchwindungspunktes der Linien hinzu, für welche t Theilpunkt iſt. In der Figur würde der Theilpunkt demnach mit t_v zu bezeichnen ſein.

Wäre in derſelben Figur das auf die Linie w v perſpectiviſch §. 96.
zu übertragende Maß a c auf der Linie h x links von a in a g gegeben worden, ſo würde ein anderer Theilpunkt, der jedoch wie t zu conſtruiren iſt, anzuwenden ſein. Zu dem Winkel $\varkappa$ an der Spitze des dabei entſtehenden Dreiecks g e a wäre nämlich der Winkel α der Supplementwinkel. Die Halbirungslinie dieſes Winkels α hat zum Verſchwindungspunkt den Punkt t^1, welchen man findet, wenn man den Winkel α^1, bei O, durch den Parallelſtrahl O t^1 halbirt.

Zieht man alſo vom Punkte g nach dem zweiten Theilpunkte t^1, ſo ſchneidet man die Linie w v ebenfalls im Punkte e, und a e iſt dann perſpectiviſch gleich a g und a c.

§. 97. Soll das auf der Linie h x gegebene Maß a c oder a g auf die Linie w v vor dem Punkte a übertragen werden, ſo hat man von t durch g, oder von t^1 durch c zu ziehen. In beiden Fällen wird die Linie w v im Punkte m geſchnitten, und a m iſt dann perſpectiviſch gleich a c und a g.

§. 98. Es leuchtet ein, daß, wenn die Perſpective des Verſchwindungspunktes einer Linie weit ab vom Hauptpunkte P fällt, von den beiden Theilpunkten der Linie der eine P näher, der andere deſto entfernter davon fällt; da man jedoch überhaupt nur Eines Theilpunktes für ein Linienſyſtem bedarf, indem man ja das gegebene Maß auf der Maßlinie nach Belieben links oder rechts von der zu theilenden Linie auftragen kann, ſo wendet man immer nur den dem Hauptpunkte P nächſten Theilpunkt, alſo denjenigen an, welcher auf der dem Verſchwindungspunkte der Linie, welche getheilt werden ſoll, entgegengeſetzten Seite der Verticale liegt.

§. 99. Fällt aber die Perſpective des Verſchwindungspunktes der zu theilenden Linie in den Hauptpunkt P, wie dies bei horizontalen, zur Bildebene normalen Linien der Fall iſt, ſo liegen die beiden Theilpunkte gleich weit von P, ſie fallen mit den Diſtanzpunkten D und D^1 zuſammen, und man bedient ſich nach Bequemlichkeit beider. Da nämlich der Supplementwinkel einer horizontalen, zur Bildebene normalen Linie ſelbſtverſtändlich 90° beträgt, ſo muß der Parallelſtrahl zu der Halbirungslinie dieſes Winkels, aus dem Geſichtspunkte nach dem Horizonte gezogen, mit der Standebene, ſowie mit der Verticalebene den Winkel von 45° bilden und den Horizont in einem der Diſtanzpunkte treffen.

§. 100. Von der den letzten Paragraphen nach aufzuſtellenden Regel, daß man den günſtigſtgelegenen Theilpunkt für eine horizontale Linie in dem Punkte findet, in welchem die Halbirungslinie des Supplementwinkels des Winkels, welchen die zu theilende Linie mit der Bildebene bildet, den

Horizont ſchneidet, gelangt man zu einer einfacheren Regel, wenn man die Eigenſchaften des Dreiecks O v t der Fig. 24 ins Auge faßt.

In dem Dreieck O v t iſt nämlich der Winkel bei v als Wechſelwinkel des Winkels α^1 gleich 80°; der Winkel bei O als halber Winkel $\varkappa^1$ gleich 50°; der Winkel bei t als Wechſelwinkel des die andere Hälfte des Winkels $\varkappa^1$ ausmachenden Winkels s O t ebenfalls gleich 50°. Die Winkel bei t und bei O ſind alſo gleich, und ſind deshalb die dieſen Winkeln gegenüberliegenden Dreiecksſeiten v t und v O ebenfalls gleich. Man hätte daher den Punkt t einfacher finden können, wenn man die Länge v O des Parallelſtrahles der zu theilenden Linie w v um v in den Horizont geometriſch in v t übertragen hätte. §. 101.

Es iſt hier wieder der Theilpunkt t die Perſpective des Verſchwindungspunktes der Grundlinie O t eines gleichſchenkligen Dreiecks O v t, in welchem die eine gleiche Seite t v parallel der Bildebene, wie die Maßlinie a c, die andere, O v, wie die zu theilende Linie a e gerichtet, nämlich ihr parallel, iſt.

Der zweite Theilpunkt für die in v verſchwindenden Linien würde gleichfalls durch Uebertragung der Länge v O um v nach der andern Seite in t^1 zu finden ſein.

Bei der Conſtruction der Theilpunkte für horizontale, zur Bildebene normale Linien iſt das Zutreffende dieſes Verfahrens beſonders erſichtlich. Da zu dieſen Linien O P der Parallelſtrahl, P die Perſpective des Verſchwindungspunktes iſt, ſo fallen bei der Uebertragung der Länge P O um P die Theilpunkte, übereinſtimmend mit dem in §. 99 Geſagten, mit den Diſtanzpunkten D und D^1 zuſammen. Es iſt hiernach als eine einfachere Regel für die Conſtruction der Theilpunkte der Satz aufzuſtellen, daß man die Theilpunkte für eine horizontale Linie findet, wenn man die Länge ihres Parallelſtrahles um die Perſpective ihres Verſchwindungspunktes zu beiden Seiten der letztern in den Horizont überträgt.

Iſt das auf die Perſpective einer horizontalen Linie zu übertragende Maß auf der Perſpective einer lothrechten Linie §. 102.

gegeben, so pflegt man dasselbe zuvor auf eine horizontale, der Bildebene parallele Linie umzulegen, und von hier auf die zu theilende Linie zu übertragen. Man kann jedoch auch, wenn man die lothrechte Maßlinie und die zu theilende Linie als Einer lothrechten Ebene angehörig ansieht, einen dieser Ebene entsprechenden und nach §. 101 zu construirenden **dritten und vierten Theilpunkt** in Anwendung bringen.

Ist z. B. in Fig. 25 wieder die Perspective w v einer um 80° von der Bildebene abweichenden horizontalen Linie W V gegeben,

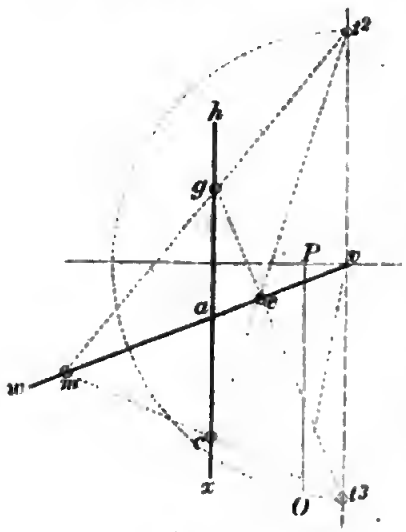

Fig. 25.

auf welche von ihrem Punkte a aus nach beiden Seiten desselben das auf der Perspective h x einer **lothrechten Linie H X** gegebene Maß a g (oder a c) perspectivisch aufgetragen werden soll, so hat man durch v die Perspective $t^2 t^3$ der Grenzlinie der durch die Linie W V denkbaren **lothrechten Ebene** zu ziehen, und die Länge des Parallelstrahles v O um v oberhalb und unterhalb dieses Punktes auf diese Perspective der Grenzlinie in t^2 und t^3 zu übertragen, welche Punkte alsdann ebenfalls Theilpunkte für die Linie w v sind. Zieht man nämlich von t^2 durch g und durch c, und von t^3 durch dieselben Punkte, so schneidet man in beiden Fällen die w v in den Punkten m und e, und die Strecken a m und a e sind dem Maße a g (oder a c) perspectivisch gleich gemacht. (S. §. 286.)

§. 103. Dem entsprechend ist auch, wenn ein auf der Perspective einer lothrechten Linie gegebenes Maß auf die in P verschwindende Perspective einer horizontalen, zur Bildebene normalen Linie übertragen werden soll, der unterhalb des Horizontes oder der oberhalb desselben herabgeschlagene Gesichtspunkt, O oder O^1, als Theilpunkt zu benutzen.

§. 104. Ist das auf die Perspective einer horizontalen Linie zu übertragende Maß selbst **auf der jene schneidenden Perspective**

einer horizontalen, der Bildebene **nicht** parallelen Linie gegeben, ſo kann man

entweder gemäß §. 100 vermittelſt der Halbirungslinie des Supplementwinkels des Winkels, welchen die beiden Linien mit einander bilden, einen Theilpunkt für jene Linie finden, wobei dieſer ſelbſtverſtändlich nicht mit dem Theilpunkte zuſammenfallen kann, welcher ſich ergeben würde, wenn das Maß auf einer der Bildebene parallelen Linie gegeben wäre,

oder man ſucht die Perſpective des Verſchwindungspunktes und den Theilpunkt der gegebenen, der Bildebene nicht parallelen Maßlinie, führt vermittelſt des letztern das gegebene Maß auf die Perſpective einer horizontalen, der Bildebene parallelen Linie zurück, und überträgt daſſelbe dann mit Hülfe des Theilpunktes der zu theilenden Linie auf dieſe.

Liegen die Perſpectiven a Y und a Z (ſ. Fig. 26) zweier horizontalen, zu einander normalen und mit der Bildebene §. 105.

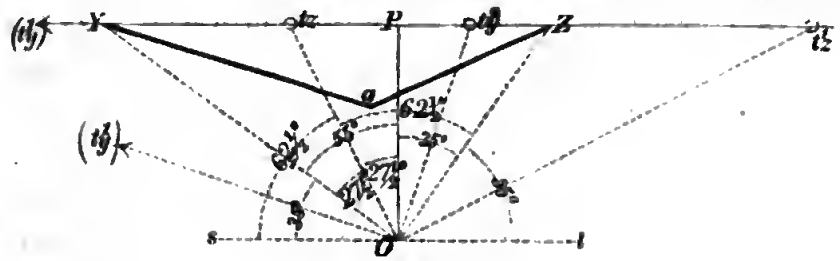

Fig. 26.

beiſpielsweiſe die Winkel von 35° und 55° bildenden Linien A Y und A Z, zu denen demnach O Y und O Z die Parallelſtrahlen ſind, vor, und man faßt die Lage ihrer Theilpunkte in Bezug auf die Verticale und auf die Parallelſtrahlen ins Auge, ſo kann man hieraus eine neue, für die Conſtruction der Theilpunkte beſonders in dem Falle wichtige Regel ableiten, daß die Perſpective des Verſchwindungspunktes einer der Linien weit außerhalb der Grenzen der Conſtruction liegt.

Es halbiren nämlich die Halbirungslinien O tz und O ty der Supplementwinkel Z O s und Y O l zugleich die Winkel Y O P und Z O P, welche die Parallelſtrahlen der gegebenen Linien mit der Verticale bilden. Daß dies der Fall iſt, ergiebt Folgendes:

Da der Parallelſtrahl O Z der Annahme gemäß mit der Bild-

ebene den Winkel Z O l von 55° bildet, so beträgt zunächst der Winkel Z O P, welchen er mit der Verticalebene bildet, 35°; sein Supplementwinkel Z O s aber 180°—55°, d. i. 125°, und dessen durch die Halbirungslinie O tz getheilte Hälften (die Winkel Z O tz und tz O s) jede 62½°. Wenn nun Winkel Y O Z der Annahme gemäß ein rechter Winkel ist, also 90° beträgt, Winkel tz O Z aber, wie eben berechnet, 62½° beträgt, so beträgt Winkel Y O tz = 90° — 62½°, d. i. 27½°. Wenn ferner Winkel tz O Z = 62½° beträgt, Winkel P O Z aber der Annahme gemäß 35°, so beträgt Winkel tz O P = 62½° — 35°, d. i. 27½°. Es ist demnach Winkel Y O tz gleich dem Winkel tz O P, d. h. mit anderen Worten: die Linie O tz halbirt den Winkel Y O P, welcher der Complementwinkel des Winkels Z O P ist. Dasselbe ist auf gleiche Art von der Linie O ty für den Winkel Z O P nachzuweisen.

Den zweiten Theilpunkt ty¹ für die in Y verschwindenden Linien, welcher links von Y liegt, und den zweiten Theilpunkt tz¹ für die in Z verschwindenden Linien, welcher rechts von Z liegt, würde man durch Halbirungslinien der Winkel Y O s und Z O l finden, wofür der Beweis dem vorigen ähnlich ist.

Es kann hiernach aufgestellt werden als Regel:

1) Einen Theilpunkt für jede einzelne von zwei horizontalen, zu einander normalen Linien findet man in dem Punkte, in welchem die Halbirungslinie des Winkels, welchen der Parallelstrahl der andern Linie mit der Verticalebene bildet, den Horizont schneidet.

2) Den zweiten, entfernter liegenden Theilpunkt jeder dieser Linien findet man in dem Punkte, in welchem die Halbirungslinie des Winkels, welchen ihr eigener Parallelstrahl mit der Bild- oder Standebene bildet, den Horizont schneidet.

Die erste Regel allgemeiner ausgedrückt, würde lauten:

3) Die Theilpunkte einer horizontalen Linie findet man in den Punkten, in welchen die Halbirungslinien der Complementwinkel des Winkels, welchen die Linie mit der Verticalebene bildet, den Horizont schneiden.

Fünftes Kapitel.

Hülfsconſtructionen.

Nicht immer trifft es zu, daß die zur Conſtruction der Rich- §. 106.
tungen und der Strecken der Linienperſpectiven erforderlichen Punkte, wie z. B. die Perſpective des Verſchwindungspunktes, die Theilpunkte, ja ſelbſt auch der herabgeſchlagene Geſichtspunkt, alle in ſolcher Nähe liegen, daß ſie noch innerhalb der Grenzen der Conſtructionsfläche bezeichnet werden können, und bedarf es deshalb einer Anleitung für das Verhalten in den verſchiedenen hierbei auftretenden Fällen.

Zum beſſern Verſtändniß des ſpäter Folgenden iſt es dienlich, zuerſt den Fall anzunehmen, daß

A. die Diſtanzpunkte außerhalb der Conſtructionsfläche

liegen.

Soll auf die in P verſchwindende Perſpective w P (Fig. 27) §. 107.
einer zur Bildebene normalen Linie W P von ihrem Punkte a aus

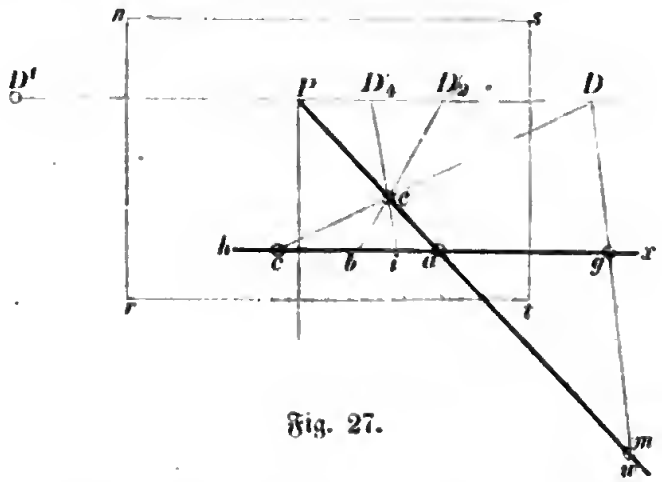

Fig. 27.

nach beiden Seiten deſſelben das auf der Linie h x gegebene Maß a c, welches gleich a g iſt, perſpectiviſch übertragen werden, ſo ſind nach §. 99 die Diſtanzpunkte D und D' zugleich Theilpunkte für die Linie w P. Es wäre demnach von D' oder, weil D näher liegt, von dieſem Punkte eine Linie nach c und eine andere durch g zu ziehen,

die Linie w P dadurch in e und m zu ſchneiden, wonach der Aufgabe gemäß a e und a m perſpectiviſch gleich a c oder a g gemacht wären.

Wäre nun aber die Bild- oder Conſtructionsfläche nur ſo groß, wie dies das Rechteck n s t r bezeichnet, ſo daß die Punkte D und D^1 darauf nicht mehr markirt werden könnten, ſo führt zu einem Auskunftsmittel folgende Betrachtung:

Die Dreiecke a e c und P e D ſind ähnliche, weil ihre Seiten parallel ſind. Es verhält ſich deshalb a c (das Maß) zu a e, wie P D (die Diſtanz) zu P e, und muß ſich daher auch das halbe Maß a b oder das viertel Maß a i zu a e verhalten, wie die halbe Diſtanz $PD/_2$ oder die viertel Diſtanz $PD/_4$ zu P e. Iſt alſo a b die Hälfte, und a i ein Viertel des Maßes a c, und $PD/_2$ die Hälfte, und $PD/_4$ ein Viertel der Diſtanz P D, und man verbindet b mit $D/_2$, und i mit $D/_4$ durch gerade Linien, ſo müſſen dieſe auf der Linie w P daſſelbe Maß a e abtheilen, welches durch Anwendung des ganzen Maßes und der ganzen Diſtanz erzielt wird. Daſſelbe wird erreicht, wenn man $^1/_3$, $^1/_5$, $^1/_6$ oder ſonſt einen Bruchtheil des Maßes nebſt dem entſprechenden Bruchtheile der Diſtanz in Anwendung bringt.

Man kann hiernach, wenn die Diſtanzpunkte nicht innerhalb der Conſtructionsfläche liegen, als Theilpunkt für die zur Bildebene normalen Linien einen Punkt des Horizontes benutzen, welcher in der Entfernung der halben, drittel, viertel, fünftel u. ſ. f. Diſtanz von P liegt, ſobald man auch das gegebene Maß zu demſelben Bruchtheile zurückführt.

Iſt das Maß auf einer lothrechten Linie gegeben, ſo iſt behufs der Theilung einer zur Bildebene normalen Linie ebenfalls ſowohl das Maß, als die Entfernung des nach oben oder unten herabgeſchlagenen Geſichtspunktes von P, auf einen gleichnamigen Bruchtheil zurückzuführen.

B. Der herabgeſchlagene Geſichtspunkt liegt außerhalb der Conſtructionsfläche.

1) Die Perſpective des Verſchwindungspunktes einer um einen gegebenen Winkel von der Bildebene abweichenden horizontalen Linie iſt auf folgende verſchiedene Arten zu finden:

a) Durch Berechnung, wie dies in §. 59 gezeigt iſt. §. 108.

b) Durch Conſtruction der Perſpective einer Tangente des gegebenen Abweichungswinkels der Linie. §. 109. Soll z. B. die Perſpective v des Verſchwindungspunktes der etwa um 60° von der Bildebene abweichenden horizontalen Linien conſtruirt werden, ſo ſtellt man zunächſt den Winkel von 60° geometriſch in R A W (Fig. 28) dar, und zieht an einer beliebigen Stelle die (zu einem der Schenkel normale) Tangente B C; man denkt ſich ferner dieſes Dreieck als in einer horizontalen Ebene liegend und ſtellt ſeine Perſpective demgemäß dar, indem man zuvörderſt Seite A B in die Bildebene an eine beliebige Stelle, etwa in a b geometriſch verſetzt. Die Perſpective der Seite B C, als einer zu A B und alſo auch zur Bildebene normalen Linie, muß dann die Richtung b P haben. Um b c perſpectiviſch gleich B C zu machen, trägt man die Länge B C auf b a von b aus in b g geometriſch auf, und ſchneidet, von g nach dem Diſtanzpunkte D' ziehend, die Linie b P in c. Zieht man nun noch a c, ſo iſt das Dreieck a b c die Perſpective des Dreiecks A B C, ſein Winkel bei a die Perſpective des Winkels bei A, alſo 60° perſpectiviſch betragend, und der Schnittpunkt v der verlängerten Seite a c mit dem Horizonte die geſuchte Perſpective des Verſchwindungspunktes.

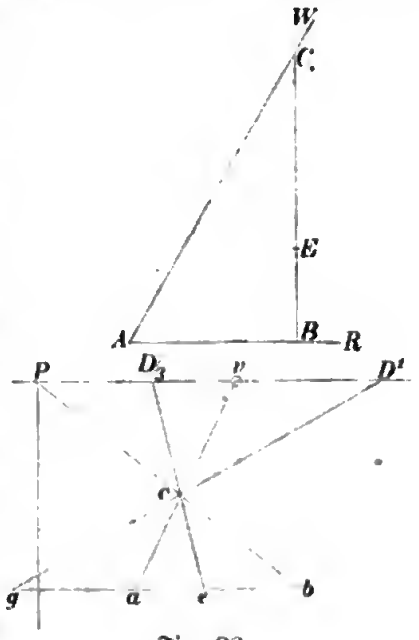

Fig. 28.

§. 110. Liegt hierbei auch der Diſtanzpunkt D^1 außerhalb der Conſtructionsfläche, ſo bedient man ſich, um bc perſpectiviſch gleich BC zu machen, nach §. 107 nur eines Bruchtheiles, etwa $^1/_3$, von BC, alſo des Maßes BE, dazu aber auch des gleichnamigen Bruchtheiles der Diſtanz PD^1, alſo des Punktes $D/_3$ als Theilpunkt; überträgt demnach das Maß BE auf die Linie ba von b aus geometriſch in be und ſchneidet, von e nach $D/_3$ ziehend, die Linie bP wie oben im Punkte c, wonach eine von a durch c gezogene Linie den Horizont gleichfalls im Punkte v ſchneidet.

§. 111. c) Um dieſelbe Aufgabe zu löſen, hätte man nach §. 56 an die Verticale in O (Fig. 29) den Winkel von 30° anzutragen, und mit ſeinem Schenkel Ov den Horizont in v, der geſuchten Perſpective des Verſchwindungspunktes, zu ſchneiden. Da nun aber O, der Annahme gemäß, außerhalb der durch das Rechteck nstr begrenzten Conſtructionsfläche liegt, ſo kann man den Punkt v auch dadurch conſtruiren, daß man auf die Verticale ober- oder unterhalb des Horizontes von P aus nur einen Bruchtheil, etwa $^1/_3$, der Diſtanz PO in $PO/_3$ aufträgt, an die Verticale in $O/_3$ den gegebenen Winkel von 30° anträgt, mit ſeinem Schenkel $O/_3 v/_3$ den Horizont in $v/_3$ ſchneidet, und die Länge $Pv/_3$ verdreifacht von P aus auf den Horizont aufträgt. Da nämlich die Dreiecke POv und $PO/_3 v/_3$ wegen Parallelität ihrer Seiten ähnliche, und deshalb die Seiten des einen Dreiecks den Seiten des andern proportional ſind, ſo verhält ſich Pv zu $Pv/_3$ wie PO zu $PO/_3$, d. h. Pv iſt dreimal ſo groß wie $Pv/_3$.

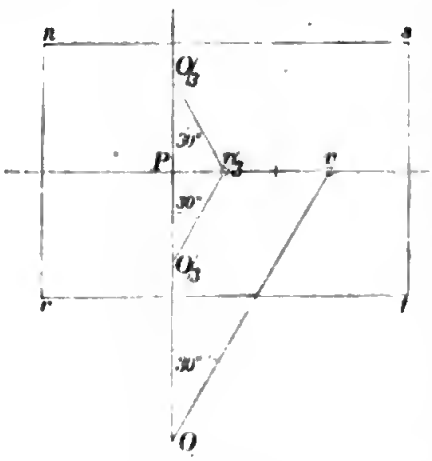

Fig. 29.

§. 112. d) Kann gerade noch die Hälfte $PO/_2$ (Fig. 30) der Diſtanz des herabgeſchlagenen Geſichtspunktes von P innerhalb der Conſtructionsfläche nstr, etwa in $O/_2$, bezeichnet werden, ſo findet man die Perſpective v des Verſchwindungspunktes auch folgendermaßen:

Man trägt an die Verticale in P den 30° betragenden Abweichungswinkel π der gegebenen Linie von der Verticalebene an, ſchneidet mit ſeinem Schenkel P a eine durch $O/_2$ der Grundlinie der Bildebene parallel gezogene Linie in a, trägt an die Linie P a in a einen Winkel α an, welcher zweimal ſo groß wie jener Abweichungswinkel von der Verticale, alſo 60° groß iſt, und ſchneidet mit ſeinem Schenkel a v den Horizont in v.

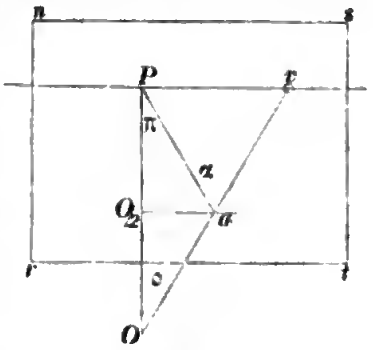

Fig. 30.

Trägt man nämlich, wenn man die ganze Diſtanz P O hinſetzt, nach §. 56 an die Verticale in O den Abweichungswinkel der gegebenen Linie von der Verticalebene, um den Punkt v zu erzielen, an, ſo fällt deſſen Schenkel O v theilweiſe mit dem Schenkel a v zuſammen und iſt alsdann der Winkel α der Außenwinkel des ſo entſtandenen gleichſchenkligen Dreiecks P O a, darum gleich der Summe der beiden Winkel π und o, und, weil dieſe einander gleich ſind, doppelt ſo groß wie jeder einzelne.

Wollte man bei dieſem Verfahren ſtatt der hier benutzten Hälfte $P O/_2$ der Diſtanz einen andern Bruchtheil derſelben anwenden, ſo würden a v und O v nicht in eine gerade Linie zuſammenfallen, das Dreieck P O a würde kein gleichſchenkliges, und die Größe des Winkels α nicht ſo einfach zu beſtimmen ſein.

2) Der nächſtgelegene Theilpunkt einer horizontalen Linie iſt auf folgende Arten zu finden:

a) Durch Berechnung, analog §. 59. Handelt es ſich z. B. um den Theilpunkt für die Perſpective a b (Fig. 31) einer um 50° von der Verticalebene abweichenden, alſo in Z verſchwindenden Linie, ſo ſchneidet nach der in §. 105 gegebenen dritten Regel die Halbirungslinie O t des Winkels Y O P, welcher der §. 113.

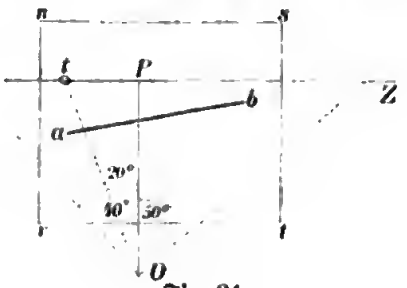

Fig. 31.

Complementwinkel des Abweichungswinkels Z O P von der Verticale ist, den Horizont in dem Theilpunkte. Wenn nun Winkel Z O P = 50° beträgt, so ist sein Complementwinkel Y O P = 40°, und dessen Hälfte, der Winkel t O P, 20° groß. Die Tangente dieses Winkels beträgt den trigonometrischen Tabellen nach 0,364. Betrüge nun die Distanz P O z. B. 20 Fuß, so wäre die Länge P t gleich 20 Fuß mal 0,364, d. i. 7,28 Fuß, welches Maß aus dem Maßstabe auf der Grundlinie entnommen werden kann.

§. 114. b) Ist Z (Fig. 32) die Perspective des Verschwindungspunktes einer um 50° von der Verticalebene abweichenden Linie a b, deren nächstgelegener Theilpunkt gesucht werden soll, so müßte, wenn der herab-

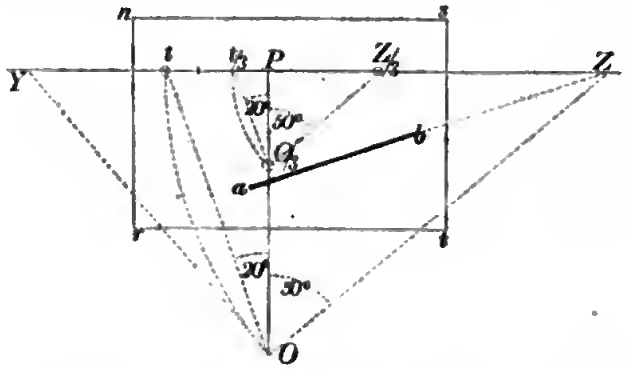

Fig. 32.

geschlagene Gesichtspunkt O nicht der Annahme gemäß außerhalb der Constructionsfläche n s t r läge, nach §. 101 die Länge des Parallelstrahles O Z um Z in den Horizont in Z t übertragen werden, wonach t der Theilpunkt wäre. Zu demselben Erfolge gelangt man jedoch auch, wenn man, wie in §. 111, von der Länge P Z einen Bruchtheil, etwa 1/3 in Z/3, und von der Distanz P O den gleichnamigen Bruchtheil in O/3 bezeichnet, die Länge Z/3 O/3 um Z/3 in den Horizont in Z/3 t/3 überträgt, und nun die Länge P t/3 verdreifacht von P aus in P t aufträgt.

Die Dreiecke Z O t und Z/3 O/3 t/3 sind nämlich ähnliche gleichschenklige Dreiecke, deren Winkel bei t und t/3 einander gleich sind, weshalb auch ihre Grundlinien t O und t/3 O/3 parallel sind. Deswegen, und weil die Stücke P t/3 mit P t, und P O/3 mit P O zusammenfallen, sind auch die Dreiecke t O P und t/3 O/3 P ähnliche,

und verhält ſich in ihnen P t zu P t_3 wie P O zu P O_3, d. h. P t iſt gleich 3 mal P t_3.

c) Was in §. 113 durch Berechnung erzielt iſt, kann auch durch §. 115.
Conſtruction erreicht werden, wenn man bei derſelben Aufgabe einen Bruchtheil der Diſtanz P O (Fig. 32), etwa $^1/_3$, in O_3 bezeichnet, an die Verticale in dieſem Punkte die Hälfte des 40° betragenden Complementwinkels des 50° großen Abweichungswinkels P O Z der gegebenen Linie a b von der Verticalebene, alſo den Winkel von 20° anlegt, mit deſſen Schenkel O_3 t_3 den Horizont in t_3 ſchneidet, und hierauf die Länge P t_3 verdreifacht von P aus auf den Horizont in P t aufträgt, wonach t der Theilpunkt der Linie a b iſt. Der Beweis der Richtigkeit dieſes Verfahrens iſt dem vorigen ähnlich.

d) Kann gerade noch die Hälfte der Diſtanz innerhalb des §. 116.
Conſtructionsraumes, etwa in O_2 (Fig. 33), bezeichnet werden, ſo legt man, um dieſelbe Aufgabe zu löſen, analog §. 112, durch O_2 eine der Grundlinie parallele Linie O_2 g, darauf an die Verticale in P die Hälfte des 40° großen Complementwinkels des Abweichungswinkels der gegebenen Linie a b, alſo den Winkel π von 20° an, ſchneidet dadurch die O_2 g in c, legt an P c in c einen Winkel τ an, welcher doppelt ſo groß als Winkel π, alſo 40° groß iſt, und ſchneidet dadurch den Horizont in dem geſuchten Theilpunkte t.

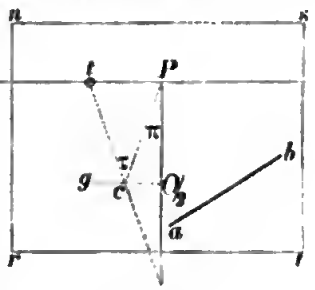

Fig. 33.

e) Iſt die Perſpective a b (Fig. 34) einer Linie A B gegeben, §. 117.
ſo conſtruirt man an jener die Perſpective eines gleichſchenkligen Dreiecks, deſſen eine gleiche Seite mit der a b zuſammenfällt und deſſen andere gleiche Seite eine der Grundlinie der Bildebene parallele Linie iſt; es ergiebt dann nach §. 92 der Schnittpunkt der verlängerten Grund-

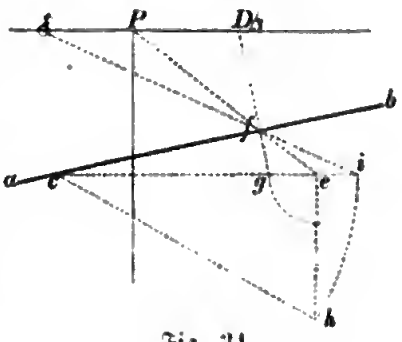

Fig. 34.

linie dieſes Dreicks mit dem Horizonte den Theilpunkt der Linie a b.

Man legt zu dieſem Zwecke durch irgendeinen Punkt c der Linie a b eine der Grundlinie der Bildebene parallele, beliebig lange Linie c e, ſchneidet von P nach e ziehend die a b im Punkte f, und zieht von der auf einen beliebigen Bruchtheil, etwa $^1/_3$, zurückgeführten Diſtanz $D/_3$ durch f bis g. Es iſt alsdann nach §. 107 die Länge e g geometriſch $^1/_3$ der Perſpective e f, ſo daß, wenn man auf der Linie c e in e eine normale Linie e h errichtet, welche geometriſch gleich 3 mal e g iſt, e h die geometriſche Länge der Perſpective e f, der Winkel e c h geometriſch den Winkel c c f, und das Dreieck c e h geometriſch das perſpectiviſche Dreieck c e f darſtellt; wonach denn auch c f als perſpectiviſch gleich c h anzuſehen iſt. Macht man nun die über e verlängerte c i geometriſch gleich c h, ſo iſt c f auch perſpectiviſch gleich c i, und zieht man i f, ſo iſt dieſe die Grundlinie der Perſpective i c f eines gleichſchenkligen Dreiecks, und ihre Verlängerung über f muß den Horizont in dem Theilpunkte t der Linie a b ſchneiden.

C. Die Perſpective des Verſchwindungspunktes liegt außerhalb der Conſtructionsfläche.

1) Soll durch die Perſpective eines Punktes die Perſpective einer horizontalen, um einen gegebenen Winkel von der Bildebene abweichenden Linie conſtruirt werden, ſo kann dies auf folgende Arten geſchehen:

§. 118. a) Man verfährt wie in §. 109, indem man zunächſt den gegebenen, beiſpielsweiſe 30° betragenden Abweichungswinkel der Linie von der Bildebene geometriſch in R A W (Fig. 35) darſtellt, eine (zum Schenkel A R normale) Tangente (Ordinate) B C zieht, dann durch a, wenn dies die Perſpective des gegebenen Punktes iſt, eine der Grundlinie der Bildebene parallele Linie a r legt, auf derſelben die Länge a b geometriſch gleich (der Abſciſſe) A B aufträgt, und nun durch Punkt b die Perſpective b c der Tangente (Ordinate) B C conſtruirt. Da letztere normal zu A B iſt, ſo muß auch ihre Perſpective nor-

mal zu a b ſein, d. h. die Richtung b P haben. Da ferner nicht die ganze Diſtanz, ſondern etwa nur $^1/_4$ derſelben in $D/_4$ bezeichnet werden kann, ſo iſt auch nur $^1/_4$ von B C, d. i. B E, auf der Linie a r von b aus rechts in b e aufzutragen, und danach die Linie b P durch eine von e nach $D/_4$ gezogene Linie in c zu ſchneiden. Es iſt alsdann b c perſpectiviſch gleich B C, und eine von a durch c gezogene Linie a w bildet mit der a r, oder der Bildebene, perſpectiviſch denſelben Winkel, welchen die Linie A W geometriſch mit der A R bildet.

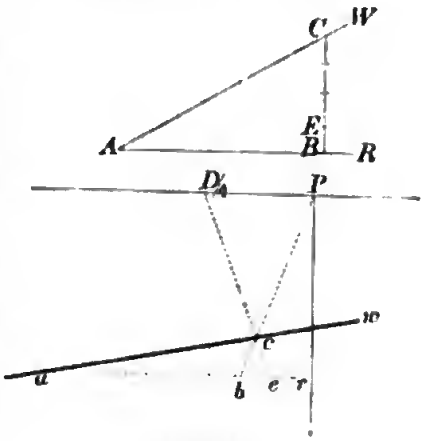

Fig. 35.

Auch kann man hierbei ſtatt eines Diſtanzpunktes oder eines Bruchtheiles der im Horizonte bezeichneten Diſtanz den in die Verticale herabgeſchlagenen Geſichtspunkt ſelbſt, oder einen Bruchtheil ſeines Abſtandes von P, anwenden. §. 119. Iſt in Fig. 36 W a r geometriſch der Winkel von 30°, um welchen die durch a zu conſtruirende Linie von der Bildebene oder, was daſſelbe iſt, von der Linie a r abweichen ſoll, ſo zieht man in dieſem Winkel eine beliebige, der Verticale parallele Ordinate C b, halbirt dieſe in $C/_2$ — wenn man ſich auch der halben Diſtanz $O/_2$ auf der Verticale bedienen kann —, zieht die Linie b P, und ſchneidet dieſe durch eine andere, von $C/_2$ nach $O/_2$ gezogene, in c, wonach b c die Perſpective der Ordinate b C iſt. Eine Linie, von a durch c gezogen, weicht dann perſpectiviſch um 30° von a r ab, und a c iſt zugleich perſpectiviſch gleich lang a C.

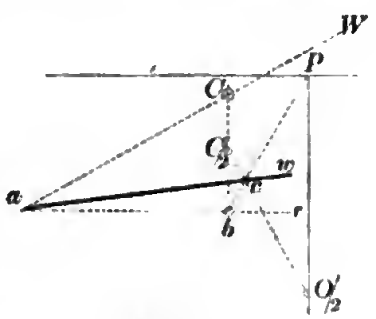

Fig. 36.

b) Man faßt ſtatt des Abweichungswinkels der gegebenen Linie von der Bildebene den Winkel ins Auge, welchen die Linie mit der Verticalebene bildet, und conſtruirt die Perſpective deſſelben vermittelſt ſeiner Tangente folgendermaßen: §. 120.

Soll z. B. die Perſpective einer um den Winkel von 30° von der Bildebene, d. h. alſo um 60° von der Verticalebene abweichenden horizontalen Linie conſtruirt werden, ſo trägt man — wenn alle Conſtructionspunkte innerhalb der Conſtructionsfläche bezeichnet werden können — nach §. 56 an P O (Fig. 37) in O den gegebenen Winkel P O Y von 60° an und ſchneidet mit ſeinem Schenkel O Y den Horizont im Punkte Y, wonach dieſer die Perſpective des Verſchwindungspunktes der verlangten Linie iſt; und wäre r die Perſpective eines Punktes, durch welche die Perſpective einer ſolchen Linie conſtruirt werden ſoll, ſo wäre r Y dieſe Perſpective.

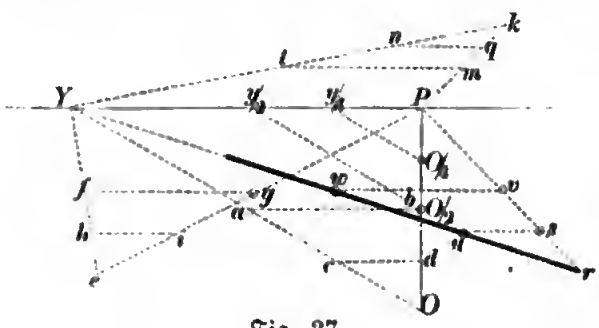

Fig. 37.

Legt man nun in dem ſo entſtandenen Dreieck Y O P durch einen beliebigen Punkt b der Seite O P eine der Seite P Y parallele Linie a b, ſo ſind die Dreiecke Y O P und a O b wegen Parallelität ihrer Seiten einander ähnlich und die Seiten des einen Dreiecks ſind den Seiten des andern proportional, ſo daß, wenn O b die Hälfte von O P iſt, auch b a gleich der Hälfte P y/2 von P Y iſt. Legt man durch Punkt d, welcher von O um 1/4 der Diſtanzlänge P O entfernt iſt, eine horizontale Linie c d, ſo iſt dieſe aus denſelben Gründen gleich 1/4 von P Y, d. i. P y/4.

Dieſelben Beziehungen der Seiten unter einander ſind aber auch in jedem andern an der Seite Y P conſtruirbaren Dreiecke, z. B. Y e P und Y k P vorhanden. In erſterem, in welchem e g die Hälfte von e P iſt, iſt eine durch Punkt g gelegte, der Y P parallele Linie g f auch gleich der Hälfte P y/2 von P Y, und iſt in demſelben Dreiecke e i gleich einem Viertel von e P, ſo iſt auch i h gleich dem Viertel P y/4 von P Y. So ſind auch in dem Dreiecke Y k P, worin k m die Hälfte und k q das Viertel von k P ſind, m l gleich der Hälfte P y/2, und q n gleich dem Viertel P y/4 von P Y.

Wenn nun die Linien b a, g f und l m jede gleich der Hälfte von P Y ſind, ſo müſſen ſie unter einander gleich ſein; ebenſo die Linien d c, i h und q n, weil ſie jede gleich dem Viertel von P Y ſind.

Hiernach iſt es leicht, durch die Perſpective r eines Punktes die Perſpective einer um den gegebenen Winkel von 60° von der Verticalebene abweichenden Linie ohne Benutzung der Perſpective ihres Verſchwindungspunktes zu conſtruiren. Man hat nur, dem Vorigen entſprechend, von r nach P eine Linie zu ziehen, auf ihr entweder die Hälfte durch Punkt v zu bezeichnen, durch v eine dem Horizont parallele Linie v w zu legen, ihr die Länge der Hälfte von P Y, d. i. P $y/_2$, zu geben und dann r w zu ziehen; oder man bezeichnet auf der Linie r P ihr Viertel im Punkte s, legt durch dieſen eine dem Horizonte parallele und dem Viertel von P Y, d. i. P $y/_4$, gleich lange Linie s u und zieht r u; oder aber, erwieſe ſich $^1/_4$ von P Y noch als zu groß für den Gebrauch, ſo theilt man auf r P einen noch kleineren Bruchtheil ab und verwendet dazu den gleichnamigen Bruchtheil von P Y.

Die Hälfte aber, oder das Viertel, oder jeder andere kleinere Bruchtheil von P Y iſt vorweg dadurch leicht zu beſtimmen, daß man, wie in §. 111, auf der Verticale ſtatt der ganzen Diſtanz P O nur deren Hälfte P $O/_2$, oder ihr Viertel P $O/_4$, oder den gewählten noch kleineren Bruchtheil bezeichnet, in den Punkten $O/_2$, $O/_4$ u. ſ. w. den gegebenen Abweichungswinkel von 60° an die Verticale trägt und dadurch den Horizont in $y/_2$ oder $y/_4$ u. ſ. w. ſchneidet.

2) Iſt die Perſpective einer Linie gegeben, und es ſoll der Winkel, welchen dieſe mit der Bildebene bildet, dargeſtellt oder gemeſſen werden, ſo wird dies folgendermaßen ausgeführt:

Man verfährt wie in §. 109, nur in umgekehrter Ordnung. §. 121.
Iſt z. B. die Perſpective w u (Fig. 38) einer Linie W U gegeben, deren Abweichungswinkel von der Bildebene ermittelt werden ſoll, ſo legt man durch irgendeinen Punkt a der w u eine der Grund-

linie parallele Linie a b, und ſchneidet dieſe ſowie die Linie w u durch irgendeine andere nach P gerichtete Linie c P. In dem ſo entſtandenen Dreiecke e a c iſt dann der Winkel bei a der fragliche. Seine geometriſche Größe ermittelt man, wenn man das ganze Dreieck dadurch geometriſch in c a f darſtellt, daß man von einem der Diſtanzpunkte, oder, wenn dieſe außerhalb der Conſtructionsfläche liegen, von dem Punkte $D/_3$, welcher einen Bruchtheil und zwar ein Drittel der Diſtanz bezeichnet, durch e bis g zieht, das Maß c g dreifach auf eine auf der a b in c errichtete Normale c f von c aus aufträgt, und den dadurch beſtimmten Punkt f durch eine gerade Linie mit a verbindet. In dem Dreiecke c a f liegt alsdann in dem Winkel c a f die geometriſche Größe des Winkels c a e, um welchen die Linie w u von der Bildebene abweicht, vor.

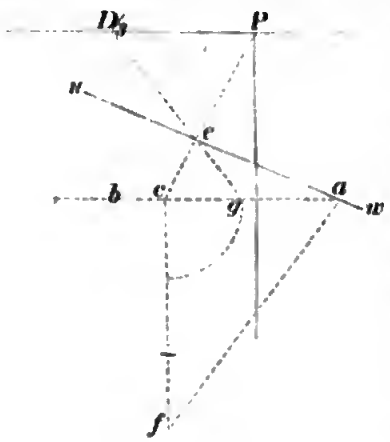

Fig. 38.

3) Iſt die Perſpective einer horizontalen Linie gegeben, außerdem die Perſpective eines Punktes, durch welche die Perſpective einer mit jener parallelen Linie conſtruirt werden ſoll, ſo kann dies auf folgende verſchiedene Arten ausgeführt werden:

§. 122. a) Man ermittelt nach Anleitung des vorhergehenden Paragraphen den Abweichungswinkel der gegebenen Linie von der Bildebene, und conſtruirt alsdann die verlangte Perſpective nach Anleitung der §§. 118—120.

§. 123. b) Man ſchneidet die Linie a g (Fig. 39), wenn dieſe die gegebene Perſpective der Linie iſt, durch eine durch den gegebenen Punkt i gezogene Lothrechte i k, zieht durch einen beliebigen

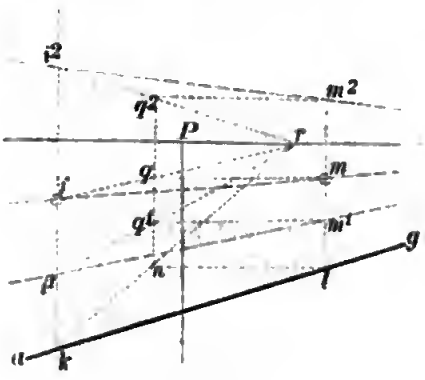

Fig. 39.

Punkt l der Linie a g eine andere Lothrechte l m, macht dieſe unter Anwendung des in den §§. 83 und 84 erwähnten perſpectiviſchen Längen-Maßſtabes der i k perſpectiviſch gleich, und zieht dann i m, welche die geſuchte Perſpective iſt.

Jenen Maßſtab kann man auch dadurch erſetzen, daß man von §. 124. i und k Linien i r und k r nach einem beliebigen Punkte r des Horizontes, und darauf von einem beliebigen Punkte l der a g eine der Grundlinie parallele Linie l n bis zu ihrem Schnittpunkte n mit der Linie k r zieht. Macht man hiernach eine durch l gezogene Lothrechte l m einer durch n gezogenen Lothrechten n q geometriſch gleich, ſo iſt l m ſowie n q perſpectiviſch gleich i k, und eine von i durch m gezogene Linie iſt perſpectiviſch parallel der a g.

Sind mehrere mit Punkt i in Einer lothrechten Linie liegenden §. 125. Punkte, z. B. i^1 und i^2 gegeben, durch welche gleichfalls der a g perſpectiviſch parallele Linien conſtruirt werden ſollen, ſo findet man die zweiten Punkte m^1 und m^2 für dieſe, wie aus der Figur zu erſehen iſt, ſehr leicht.

c) Man zieht durch den gegebenen Punkt i (Fig. 40) eine der §. 126. Grundlinie parallele Linie, welche die a g im Punkte k ſchneidet, und darauf von i und k Linien i r und k r nach einem beliebigen Punkte r des Horizontes. Schneidet man alsdann dieſe beiden Linien durch eine andere, durch einen beliebigen Punkt l der a g, parallel der Grundlinie gezogene Linie l q in den Punkten q und n, ſo iſt das Maß q n zunächſt perſpectiviſch gleich dem Maße i k, weil i r und k r nach §. 61, 3), perſpectiviſch parallel ſind; und überträgt man das Maß n q auf derſelben Linie von l aus geometriſch in l m, ſo iſt auch l m perſpectiviſch gleich i k, und eine durch i und m gezogene Linie muß perſpectiviſch parallel der a g ſein.

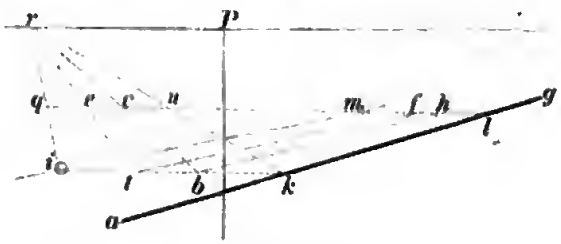

Fig. 40.

Sind mehrere mit dem Punkte i in einer und derſelben, der §. 127. Grundlinie parallelen Linie i k liegenden Punkte, z. B. t und b gegeben,

durch welche gleichfalls der a g perſpectiviſch parallele Linien conſtruirt werden ſollen, ſo zieht man t r und b r, und überträgt die Maße n e und n c geometriſch in l f und l h, wonach t f und b h der a g perſpectiviſch parallel gezogen werden können.

§. 128. Nimmt man die oben l q genannte Linie vorderhalb des Punktes i durch die Linie a g gelegt an, ſo fällt die Conſtruction wie in Fig. 41 aus.

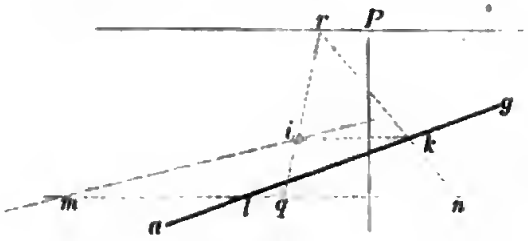

Fig. 41.

Iſt der Punkt i nicht zwiſchen dem Horizonte und der Linie a g, ſondern vorderhalb der letztern gegeben, ſo iſt wie vorher zu verfahren und es ergiebt ſich eine Conſtruction wie in Fig. 42.

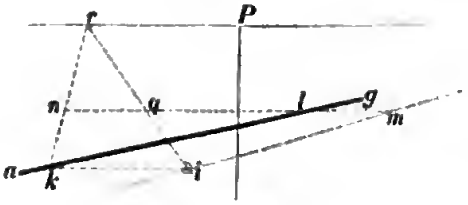

Fig. 42.

§. 129. Iſt der Punkt i auf der der Linie a g entgegengeſetzten Seite des Horizontes gegeben, ſo vertauſcht man (Fig. 43) die hierbei bisher dem Horizonte und der Linie a g beigelegten Beziehungen zu einander und zieht demnach i k nicht parallel der Grundlinie, ſondern parallel der a g bis k im Horizonte, zieht i r und k r nach einem beliebigen Punkte r der a g, zieht ferner durch einen beliebigen Punkt l des Horizontes eine der a g geometriſch parallele Linie n m, und macht darin l m geometriſch gleich q n. Es iſt dann eine durch i und m zu ziehende Linie perſpectiviſch parallel der Linie a g.

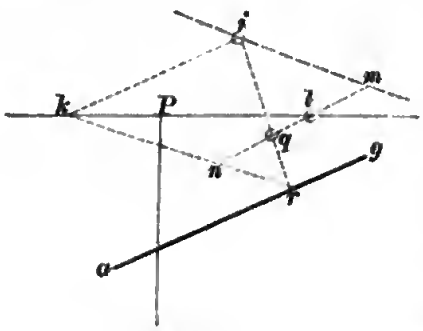

Fig. 43.

§. 130. Es bedarf kaum der Erinnerung, daß es ſowohl in den vorhergehenden wie in den nächſtfolgenden Paragraphen gleichgültig iſt, ob die gegebene, ſtets a g genannte Linie die Perſpective einer in oder

außerhalb der Grundebene liegenden Linie A G iſt, da doch alle in einer und derſelben Geſichtslinien-Ebene liegenden Objecte eine und dieſelbe Perſpective haben. Ebenſo iſt es gleichgültig, ob der Punkt i die Perſpective eines Punktes in oder außerhalb der Grundebene iſt.

d) Iſt wieder a g (Fig. 44) die gegebene Perſpective der Linie, §. 131.
und i die Perſpective des Punktes, durch welchen eine zu jener perſpectiviſch parallele Linie conſtruirt werden ſoll, ſo zieht man durch i eine beliebig, am beſten nahezu normal zum Horizonte gerichtete Linie k b; durch Punkt b, in welchem dieſe die a g ſchneidet, zieht man eine der Grundlinie parallele Linie b c, und von einem beliebigen Punkte c derſelben eine beliebig, jedoch am beſten faſt normal zum Horizonte gerichtete, die a g im Punkte e ſchneidende Linie c l. Zieht man nun von c und e Linien nach k, zieht ferner i h parallel b c und ſchneidet, von h nach l ziehend, die Linie e k im Punkte m, ſo iſt eine von i durch m zu ziehende Linie perſpectiviſch parallel a g. Es ſind durch die Conſtruction nämlich zwei perſpectiviſch gleiche und gleichliegende Dreiecke b c e und i h m entſtanden, in welchen 1) die entſprechenden Seiten b c und i h beide der Grundlinie parallel und einander gleich ſind, weil die Linien b k und c k perſpectiviſch parallel ſind; in welchen 2) die Seiten c e und h m perſpectiviſch parallel und gleich ſind, weil ſie in Einem Punkte l des Horizontes verſchwinden und ſie zwiſchen den perſpectiviſch parallelen Linien c k und e k liegen. Wenn aber in zwei gleichliegenden Dreiecken je zwei entſprechende Seiten gleich und parallel ſind, ſo ſind auch die dritten Seiten, hier b e und i m, gleich und, worauf es hier ankommt, parallel.

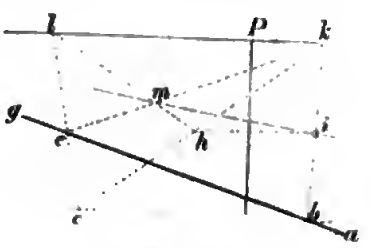

Fig. 44.

Es iſt dieſes Verfahren nur dann anzuwenden, wenn der gegebene Punkt i zwiſchen der gegebenen Linie a g und dem Horizonte liegt, da andernfalls meiſt die Grenzen der Conſtructionsfläche überſchritten werden müſſen.

e) Statt der im vorhergehenden Paragraphen nach dem Punkte k §. 132.

perſpectiviſch parallel gezogenen Linien b k, c k und e k kann man, indem man übrigens das dort gezeigte Verfahren einhält, auch

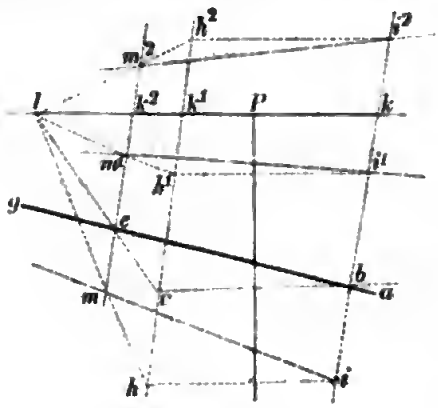

Fig. 45.

geometriſch parallele Linien b k, c k¹ und e k² (Fig. 45) anwenden. Sind außer dem Punkte i noch mehrere in Einer Linie liegenden Punkte, z. B. i¹ und i² gegeben, durch welche der a g perſpectiviſch parallele Linien conſtruirt werden ſollen, ſo wird die ſonſt beliebige Richtung jener drei parallelen Linien durch die Lage dieſer Punkte beſtimmt, ſowie auch im vorhergehenden Paragraphen die Richtung der Linie b k durch die Lage der etwa anderweit gegebenen Punkte beſtimmt ſein würde.

Die durch dieſe Conſtruction entſtandenen vier Dreiecke i h m, b c e, i¹ h¹ m¹ und i² h² m² ſind als die Perſpectiven gleicher, ſchief über einander liegender Dreiecke anzuſehen, und ſind in ihnen die dritten Seiten i m, b e, i¹ m¹ und i² m² perſpectiviſch parallel, weil die einander entſprechenden anderen Seiten (gleich und) parallel ſind.

Die hier gegebene Löſung iſt der im §. 124 enthaltenen verwandt, und unterſcheidet ſie ſich von jener nur dadurch, daß die dort lothrechten Linien k i², n q² und l m² hier durch die ſchiefen, aber doch geometriſch parallelen Linien i i², h h² und m m² vorgeſtellt werden, und daß die dortigen Conſtructionsdreiecke k n l und i² q² m² hier in den etwas anders liegenden Dreiecken b c e und i² h² m² auftreten. Punkt l iſt der dort r genannte.

§. 133. Die in den beiden letzten Paragraphen gezeigten Conſtructionen ſind einfach Löſungen der geometriſchen Aufgabe: „durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu conſtruiren, welche nach dem entfernten Schnittpunkte zweier anderen gegebenen geraden Linien gerichtet iſt", und iſt hier nur einer der beiden gegebenen Linien die Bedeutung des Horizontes, der andern die der gegebenen Linie beigelegt. Es iſt deshalb auch nicht nothwendig, den bisher gemachten

Unterſchied zwiſchen Horizont und gegebener Linie a g feſtzuhalten; vielmehr dürfen die dieſen beiden Linien beigelegten Beziehungen auf das Verfahren bei der Conſtruction, wie in §. 129, mit einander vertauſcht werden, woraus zugleich ein Fingerzeig für das Verhalten in dem Falle entnommen werden kann, daß die gegebene Linie a g nicht die Perſpective einer horizontalen, ſondern die **einer ſchiefen Linie** wäre.

Iſt z. B. in Fig. 46 wieder i der gegebene Punkt, a g die gegebene Linie, und man will mit dieſer wie in den beiden vorhergehenden Paragraphen mit dem Horizonte, und umgekehrt mit dieſem wie dort mit der gegebenen Linie verfahren, ſo hat man durch i die Linie b k in beliebiger Richtung — wären aber außer dem Punkte i noch mehrere mit ihm in Einer geraden Linie liegenden Punkte i^1 und i^2 gegeben, ſo würde die Richtung b k durch dieſe beſtimmt werden — zu ziehen, und durch b eine der a g geometriſch parallele Linie b c zu legen. Man muß ferner, von dem beliebigen Punkte c der b c nach einem beliebigen Punkte l der a g ziehend, den Horizont in e ſchneiden, durch c und e der b k geometriſch parallele Linien c k^1 und e k^2 ziehen, alsdann i h geometriſch parallel der a g ziehen, und endlich, von h nach l ziehend, die e k^2 in m ſchneiden, wonach eine von i durch m zu ziehende Linie nach dem entfernten Schnittpunkte der a g mit dem Horizonte gerichtet, d. h. mit beiden perſpectiviſch parallel iſt.

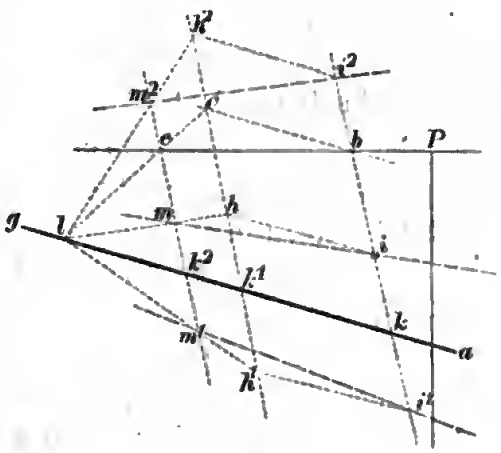

Fig. 46.

f) Iſt wieder a g (Fig. 47) die gegebene Linie, i der gegebene §. 134.
Punkt, ſo legt man durch dieſen eine beliebig gerichtete, den Horizont und die a g ſchneidende Linie b k, zieht, zu dieſer geometriſch parallel, an einer beliebigen Stelle eine andere den Horizont und die a g ſchneidende Linie c l, zieht in dem entſtandenen Vierecke

c b k l eine Diagonale b l, ferner i h geometriſch parallel dem Horizonte, und h m geometriſch parallel der a g. Es iſt dann eine von i durch m zu ziehende Linie nach dem Schnittpunkte v des Horizontes mit der Linie a g gerichtet, d. h. ſie iſt beiden perſpectiviſch parallel.

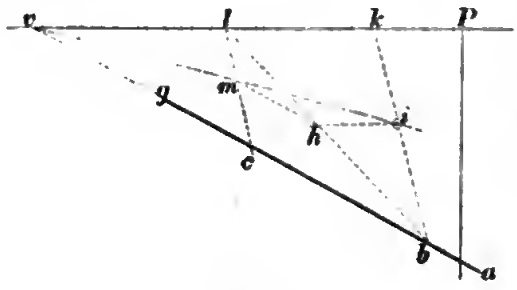

Fig. 47.

Es beruht dieſes Verfahren auf der Theilung der geometriſch parallelen Linien b k und c l in proportionale Theile. Zunächſt verhält ſich nämlich in den beiden wegen Parallelität ihrer Seiten ähnlichen Dreiecken l m h und l c b

$$l\,m : m\,c = l\,h : h\,b,$$

und in den beiden aus demſelben Grunde ähnlichen Dreiecken b i h und b k l verhält ſich

$$k\,i : i\,b = l\,h : h\,b;$$

es verhält ſich demnach

$$l\,m : m\,c = k\,i : i\,b.$$

Sind hiernach die Linien b k und c l durch die Linie i m proportional getheilt, ſo muß, wenn man b k als Grundlinie eines Dreiecks v b k, und c l als eine ihr parallele Linie anſieht — nach dem Lehrſatze, daß eine von der Spitze eines Dreiecks nach deſſen Grundlinie gezogene Linie alle mit der Grundlinie parallelen Linien innerhalb des Dreiecks in proportionale Theile theilt, und deſſen Umkehrung, daß Linien durch proportional gelegene Theilpunkte von Linien, die der Grundlinie parallel ſind, gezogen, durch die Spitze des Dreiecks gehen — i m nach der Spitze v dieſes Dreiecks, d. h. nach der Perſpective des Verſchwindungspunktes der gegebenen Linie a g gerichtet ſein.

Wie hier, iſt auch in den §§. 132 und 133 die Richtung der Linie i m durch Theilung der Linien b k und $c\,k^2$ in proportionale Theile ermittelt worden.

Von den beiden Figuren 48 und 49 veranſchaulicht die erſtere §. 135.
die Conſtruction für den Fall, daß der Punkt i nicht zwiſchen dem Horizonte und der gegebenen Linie a g, ſondern vorderhalb der letztern gegeben iſt; die zweite Figur zeigt die Conſtruction für den

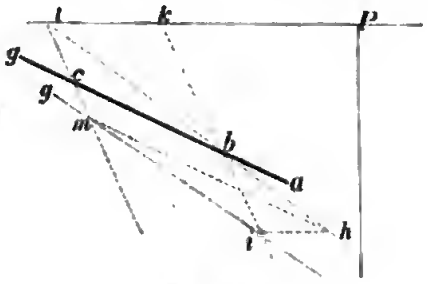

Fig. 48.

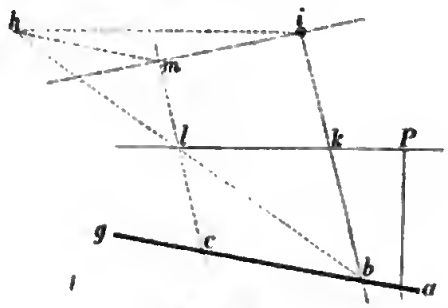

Fig. 49.

Fall, daß der Punkt i auf der der Linie ag entgegengeſetzten Seite des Horizontes gegeben iſt. In beiden Fällen wird wie im vorhergehenden Paragraphen, nur mit dem Unterſchiede verfahren, daß hierbei die Verlängerungen der Diagonale b l benutzt werden.

g) Eine ebenfalls auf der proportionalen Theilung der Linien §. 136.
beruhende Löſung, welche zwar umſtändlich, aber deshalb erwähnenswerth iſt, weil ſie ohne Zirkel einfach durch Linealconſtruction auszuführen iſt, und wobei gleichfalls die in den perſpectiviſchen Conſtructionen feſtgehaltene Unterſcheidung zwiſchen dem Horizonte und der gegebenen Linie wegfällt, letztere beiden vielmehr als gleichbedeutende Linien gelten, iſt folgende:

Iſt wieder a g (Fig. 50) die gegebene Linie, i der gegebene Punkt, ſo legt man durch dieſen zwei beliebig gerichtete Linien b k und e l, welche in ihren Schnittpunkten mit dem Horizonte und mit der Linie a g die Ecken eines Vierecks b e k l bezeichnen und ſelbſt deſſen Diagonalen ſind. Verlängert man die beiden Viereckſeiten l b und k e bis zu ihrem Schnittpunkte f, und ſchneidet den Horizont und die Linie

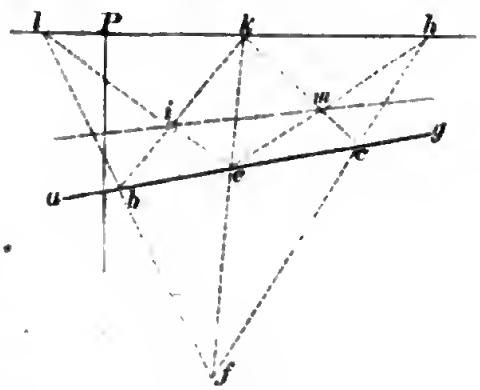

Fig. 50.

a g durch eine von f aus gezogene, beliebig gerichtete Linie f h in den Punkten h und e, und zieht in dem dadurch entstandenen zweiten Viereck e e h k die Diagonalen k e und e h, so ist deren Schnittpunkt m ein zweiter Punkt der durch Punkt i perspectivisch parallel der a g zu ziehenden Linie.

§. 137. Ist der Punkt i, wie in Fig. 51, nicht zwischen dem Horizonte und der gegebenen Linie a g gegeben, so wird die Construction analog der vorhergehenden ausgeführt. Man schneidet durch zwei

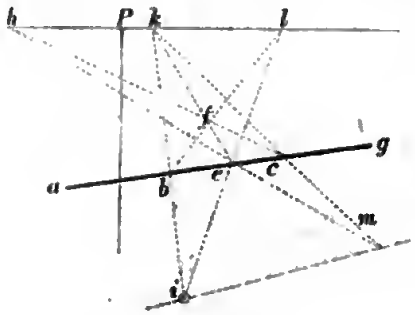

Fig. 51.

durch Punkt i gelegte, beliebig gerichtete Linien i k und i l den Horizont und die gegebene Linie a g in den vier Punkten k, l und b, e, zieht in dem so entstandenen Viereck k l e b die Diagonalen, und legt durch deren Schnittpunkt f eine andere beliebig gerichtete Linie h e, welche den Horizont und die a g in den Punkten h und e schneidet. Zieht man nun k e über e verlängert und h e über e verlängert, so schneiden sich die Verlängerungen in dem Punkte m, und zieht man i m, so ist diese die gesuchte perspectivische Parallele zu a g.

Ist Punkt i oberhalb des Horizontes gegeben, so ist die Construction dieselbe, und hat man zur Veranschaulichung derselben nur die Figur 51 umzukehren und die Linie a g als Horizont aufzufassen.

§. 138. h) Sind außer der einen durch den gegebenen Punkt i perspectivisch parallel der gegebenen Linie a g zu construirenden Linie

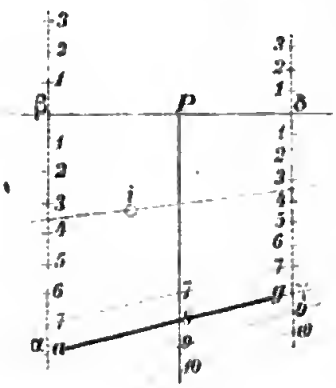

Fig. 52.

noch viele andere derartige Linien zu construiren, so verlängert man (Fig. 52) die a g nach beiden Seiten bis zu den Seitenrändern der Constructionsfläche, nachdem man hier durch den Horizont und die Linie a g der Verticale parallele Linien $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ gezogen hat, und theilt die Längen $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ je in gleich viele, möglichst kleine, zur Bequemlichkeit mit Nummern zu ver-

ſehende gleiche Theile. Es ſind alsdann alle durch gleiche Nummern oder zwiſchen gleichen Nummern gezogenen Linien perſpectiviſch parallel der a g, da $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ hier wieder proportional getheilt ſind.

Sollen oberhalb des Horizontes der a g perſpectiviſch parallele Linien gezogen werden, ſo ſetzt man die Theilungen der Linien $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ auf ihren Verlängerungen oberhalb des Horizontes fort.

Will man unterhalb der Linie a g noch mehrere ihr perſpectiviſch parallelen Linien ziehen, ſo kann man die auf der Linie $\delta\gamma$ in den Punkten 9, 10 u. ſ. w. weitergehende Theilung benutzen; ſtatt der aber auf der Linie $\beta\alpha$ in α aufhörenden Theilung eine andere auf einer beliebigen, zum Horizonte normalen Linie, etwa auf der durch P gehenden Verticale ſelbſt vornehmen, indem man darauf das Maß 7. 8 noch mehrmals nach unten weiter aufträgt.

Iſt, wo man die eben gezeigte Hülfsconſtruction anzuwenden §. 139.
genöthigt iſt, überhaupt noch nicht die Perſpective wenigſtens einer der zu conſtruirenden Linien vorhanden, und kann man ſich auch nicht, was ſonſt thunlich iſt, ſtatt ihrer ihres Parallelſtrahles bedienen, weil etwa der herabgeſchlagene Geſichtspunkt außerhalb des Conſtructionsraumes fällt, ſo verfährt man folgendermaßen:

Man bezeichnet auf der Verticale einen beliebigen Bruchtheil der Diſtanz, durch O_3 (Fig. 53) etwa ein Drittel derſelben, trägt an eine durch O_3 horizontale Linie O_3 b den Abweichungswinkel b O_3 z_3 der zu conſtruirenden Linien von der Bildebene geometriſch an, conſtruirt an P O_3 das Quadrat P O_3 b f, theilt von dem Stücke b e ſeiner Seite b f in b c ein Drittel ab, und zieht von O_3 durch c eine Linie. Es iſt dieſe alsdann nach dem Verſchwindungspunkte der zu conſtruirenden Linien gerichtet und wie a g in Fig. 52 zu verwenden.

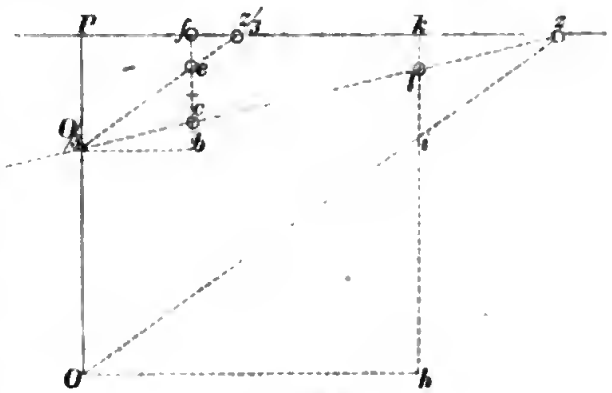

Fig. 53.

Der Beweis der Richtigkeit ist geführt, wenn nachgewiesen ist, daß die Linie $O/_3\,c$ nach dem Punkte z gerichtet ist, in welchem der Parallelstrahl O z der zu construirenden Linien den Horizont schneidet. Zieht man nämlich diesen Parallelstrahl und construirt an PO, der ganzen Distanz, das Quadrat P O h k, so ist zunächst das Dreieck z i k ähnlich dem Dreieck $O/_3\,e\,b$, wegen Parallelität der Seiten. Da nun ferner Winkel k z l als Wechselwinkel des Winkels $b\,O/_3\,c$ diesem gleich ist, so verhalten sich die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seitenstücke k l und l i wie b c zu c e, d. h. k l ist ein Drittel von k i, weil b c ein Drittel von b e ist. Es muß daher die Linie $O/_3\,z$, weil sie sowohl die Seite P O des Dreiecks P O z als die dieser Seite parallele Linie k i in ihren Dritteln schneidet, nach dem Schnittpunkte z der beiden anderen Dreiecksseiten P z und O z gerichtet sein, was zu beweisen war.

4) Der nächstgelegene Theilpunkt einer horizontalen Linie wird, wenn die Perspective ihres Verschwindungspunktes außerhalb der Constructionsfläche liegt, gefunden

§. 140. nach Anleitung der §§. 113—116.

D. Der Theilpunkt liegt außerhalb der Constructionsfläche.

1) Soll ein auf der Perspective einer horizontalen, der Bildebene parallelen Linie gegebenes Maß auf die Perspective einer horizontalen, zur Bildebene schiefen Linie von einem gegebenen Punkte derselben aus perspectivisch übertragen werden, so ist dies folgendermaßen auszuführen:

§. 141. a) Ist a b (Fig. 54) die Perspective der gegebenen horizontalen, zur Bildebene schiefen Linie, c der Punkt, von welchem aus das gegebene Maß c i auf sie perspectivisch übertragen werden soll, so trägt man an der Linie c i in c den Abweichungswinkel der schiefen Linie von der Bildebene geometrisch in i c h an — ist die Größe desselben nicht bekannt, so ermittelt man sie nach §. 121 — macht den Schenkel c h geometrisch gleich c i, fällt von h eine Normale

(Ordinate) h e auf c i und ſchneidet die a b durch eine von e nach P gezogene Linie im Punkte f, wonach c f perſpectiviſch gleich c i iſt. Denn die beiden Dreiecke c e f und c e h ſind perſpectiviſch gleich, da die Seite c e beiden gemeinſchaftlich, Winkel e c f perſpectiviſch gleich dem Winkel e c h, und Winkel c e f perſpectiviſch gleich dem Winkel c e h iſt.

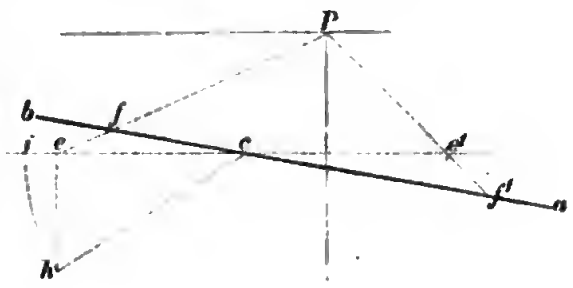

Fig. 54.

Soll das Maß c i vorderhalb des Punktes c auf die Linie a b übertragen werden, ſo verlängert man die Maßlinie über c hinaus, macht c e¹ geometriſch gleich c e, und ſchneidet die a b durch eine von P durch e¹ gezogene Linie in f¹, wonach c f¹ perſpectiviſch gleich c f und c i iſt.

b) Liegt die Perſpective des Verſchwindungspunktes der zu theilenden Linie innerhalb der Conſtructionsfläche, ſo kann man, nachdem man das gegebene Maß auf einen Bruchtheil zurückgeführt hat, analog §. 107, als Theilpunkt einen Punkt des Horizontes benutzen, welcher von der Perſpective des Verſchwindungspunktes um den gleichnamigen Bruchtheil der Entfernung dieſer Perſpective vom eigentlichen Theilpunkte entfernt liegt. §. 142.

Iſt z. B. O v (Fig. 55) der Parallelſtrahl der gegebenen Linie a b, auf welche von ihrem Punkte c aus das in der Linie c i gegebene Maß perſpectiviſch übertragen werden ſoll, ſo würde man nach §. 101 den Theilpunkt t für die Linie a b dadurch finden, daß man die Länge des Parallelſtrahles O v um v in den Horizont in v t überträgt. Bezeichnet man jedoch, da Punkt t hier außerhalb der Conſtructionsfläche n s r u fallen würde, auf dem Horizonte von v aus nur einen

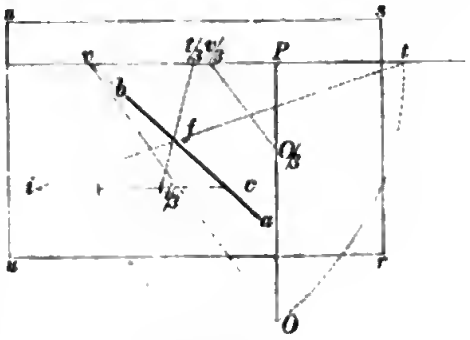

Fig. 55.

Bruchtheil, etwa ein Drittel der Länge v t in $v\,t_{/3}$, und auf der Maßlinie c i das entſprechend gelegene Drittel in $c\,i_{/3}$, und zieht nun $i_{/3}\,t_{/3}$, ſo ſchneidet man die Linie a b im Punkte f, wonach c f perſpectiviſch gleich c i gemacht iſt, wie wenn man i t gezogen hätte.

Um nun aber, wenn ſowohl der herabgeſchlagene Geſichtspunkt O, als der Theilpunkt t außerhalb der Conſtructionsfläche liegen, den Abſtand des Punktes $t_{/3}$ von v, welcher gleich $^1/_3$ der Länge des Parallelſtrahles v O ſein muß, zu ermitteln, bezeichnet man auf der Verticale in $P\,O_{/3}$ ein Drittel der Diſtanz, legt an die Verticale in $O_{/3}$ den Abweichungswinkel der Linie a b von der Verticalebene an und ſchneidet den Horizont in $v_{/3}$, wonach in der Länge $v_{/3}\,O_{/3}$ jenes Drittel der Länge v t vorliegt und nunmehr in $v\,t_{/3}$ aufgetragen werden kann.

2) Soll eine auf der Perſpective einer horizontalen, zur Bildebene ſchiefen Linie gegebene Strecke auf dieſer Linie mehrmals neben einander perſpectiviſch aufgetragen werden, ſo wird dies folgendermaßen ausgeführt:

§. 143. Iſt a g (Fig. 56) die gegebene Linie, c e darin die gegebene Strecke, ſo legt man durch Punkt c oder e eine der Grundlinie parallele Linie x y, ſchneidet, von einem beliebigen Punkte r des Horizontes nach c ziehend, dieſe Linie im Punkte h, trägt auf ihr das Maß h c nach links und rechts mehrmals in h i und e k, k l, l m u. ſ. f. geometriſch gleich auf, und zieht von r durch i und nach k, l, m u. ſ. f. Linien. Es theilen dann deren Schnittpunkte mit der a g auf dieſer der Strecke c e perſpectiviſch gleiche Strecken z c und c d, d f, f n ab.

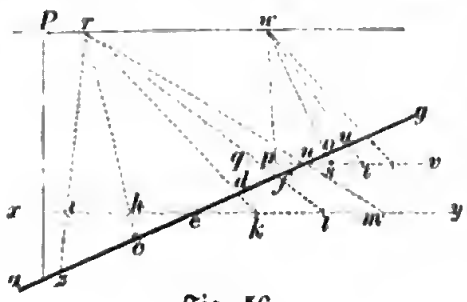

Fig. 56.

Soll die perſpectiviſche Auftragung der gegebenen Strecke c e jenſeit des Punktes n fortgeſetzt werden, ſo kann man das mit der

Strecke c e Vorgenommene mit der Strecke f n wiederholen, demgemäß durch n abermals eine der Grundlinie parallele Linie q v legen und dieſelbe, von einem beliebigen Punkte w des Horizontes — es könnte dies ſelbſtverſtändlich wieder r ſein — nach f ziehend, im Punkte p ſchneiden. Trägt man hiernach auf ihr das Maß n p mehrmals in n s, s t u. ſ. f. auf, zieht von den Punkten s, t u. ſ. f. Linien nach w, ſo theilen dieſe auf der a g wieder der c e perſpectiviſch gleiche Strecken n o, o u u. ſ. f. ab.

In den in dieſem Kapitel gezeigten Hülfsconſtructionen ſind nunmehr hinlänglich viel Mittel zur Aushülfe für die Fälle geboten, in welchen zur Conſtruction nothwendige Hülfspunkte außerhalb der Bildgrenze fallen, ſo daß der durch letztern Umſtand bedingten Umwege im Folgenden nicht mehr beſonders gedacht zu werden braucht. Nichtsdeſtoweniger iſt die Anwendung eines Theiles dieſer Hülfsconſtructionen in einigen der folgenden Uebungsbeiſpiele gezeigt. §. 144.

Sechstes Kapitel.

Beiſpiele.

Nachdem im Vorhergehenden die Regeln erörtert worden, auf welche ſich alle perſpectiviſchen Conſtructionen gründen, erſcheint es rathſam, an einer Reihe von Beiſpielen, für welche zunächſt theils einfache geradlinige Figuren, theils von ebenen lothrechten und horizontalen Flächen begrenzte Körper als darzuſtellende Objecte gewählt ſind, die Anwendung jener Regeln zu zeigen und dabei zugleich eine Anleitung hinſichtlich des in verſchiedenen Fällen einzuſchlagenden Verfahrens zu geben. In letzterer Beziehung ſind beſonders die beiden erſten ausführlich behandelten Aufgaben zu beachten. §. 145.

Da die Conſtructionen krummer Linien und von krummen Flächen begrenzter Körper faſt durchweg unter Anwendung horizontaler oder lothrechter Hülfslinien ausgeführt werden, und da ferner

auch die Conſtructionen ſchiefer Linien und Ebenen auf Folgerungen aus den für die Conſtruction horizontaler und lothrechter Linien und Ebenen geltenden Regeln beruhen, ſo wird die Anleitung zu dem bei dieſen beiden Conſtructionen zweckmäßigſten Verfahren am verſtändlichſten nach jenen Beiſpielen zu geben ſein.

§. 146. Wegen der häufigen Erwähnung von Verſchwindungspunkten und Grenzlinien wird, da nach den vorangegangenen Erklärungen ein Mißverſtändniß dadurch nicht mehr zu befürchten iſt, von dieſer Stelle an der Kürze wegen ſtatt des ausführlichen Ausdruckes „Perſpective des Verſchwindungspunktes" und „Perſpective der Grenzlinie" ſtets nur „Verſchwindungspunkt" und „Grenzlinie" geſagt werden.

Der ſchnelleren Verſtändigung wegen werden ferner Punkte der in ihrem geometriſchen Grundriſſe gegebenen Objecte in der Folge ſtets mit Buchſtaben des großen Alphabets, Punkte der perſpectiviſchen Conſtructionen aber mit Buchſtaben des kleinen Alphabets bezeichnet ſein, ſo daß alſo hieraus ſogleich erkannt werden kann, ob ſich eine Bezeichnung auf Punkte des Grundriſſes oder der perſpectiviſchen Conſtruction bezieht.

Der Haupt-, der Geſichts- und die Diſtanzpunkte aber werden überall mit den großen Buchſtaben P (ſpäterhin auch H), O und D bezeichnet ſein.

Beiſpiel 1.

§. 147. **Aufgabe.** In Fig. 1 (Taf. 1) liegt der Grundriß des aus quadratiſchen Steinplatten von je 3 Fuß Seitenlänge beſtehenden **Fußbodens** ABCE eines Zimmers vor. Die Stellung der Bildebene iſt durch die Linie QR, auf welcher zugleich in den Punkten 0, 1, 2, 3 u. ſ. w. der Fuß-Maßſtab vorliegt, gegeben, der Ort des Geſichtspunktes durch den Punkt O; es fällt demnach der Hauptpunkt in P und beträgt die Diſtanz 18 Fuß; es ſoll die Perſpective des Fußbodens in doppeltem Maßſtabe und unter Annahme des Auges in einer Höhe von 6 Fuß über dem Fußboden conſtruirt werden.

§. 148. **Ausführung.** Nachdem in der Conſtruction (Fig. 2, Taf. 1) der Horizont $D/_2$ D, und 6 Fuß darunter die Grundlinie g 1 der Bildebene gezogen, der Hauptpunkt P beliebig, und im gegebenen Abſtande (d. i. 18 Fuß)

davon einer der Diſtanzpunkte, D, bezeichnet und durch P die Verticale gezogen worden — der Angabe des herabgeſchlagenen Geſichtspunktes bedarf es hier nicht — werden die Maße P I, P M, P N, P H und P F, welche in der Bild- und Grundebene (dem Fußboden nämlich) zugleich liegend gegeben ſind, in der Conſtruction auf der Grundlinie vom Grundpunkte p aus nach links und rechts und der Aufgabe gemäß doppelt groß in p i, p m, p n, p h und p f aufgetragen. — Da die Seiten A B und E C des Fußbodenquadrates und die ihnen parallelen, durch die Punkte M, I und II gehenden Steinfugen normal zur Bildebene ſind, ſo müſſen ihre Perſpectiven, dem §. 54 nach, durch die Punkte n, m, i, h und f nach P gezogene Linien ſein. — Um die Perſpectiven der der Bildebene parallelen Steinfugen A E, Y S u. ſ. w. zu conſtruiren, müßte man zuerſt die Perſpectiven einzelner Punkte dieſer Fugen, etwa der in der Linie E C liegenden Punkte E, S, T, U, C, ſuchen; alſo, an den in f perſpectiviſch ſchon vorliegenden Punkt F anknüpfend, die Maße F S, F E, F T u. ſ. w. verdoppelt auf die hier als Maßlinie zu benutzende Grundlinie g l von f aus nach rechts und links in die Maße f σ, f ε, f τ u. ſ. w. übertragen, und von D, als dem Theilpunkte für alle zur Bildebene normalen Linien (§. 99), durch die Punkte ε, σ, τ u. ſ. w. ziehend, die von P durch f gezogene Linie in den Punkten e, s, t u. ſ. w. ſchneiden, um dann durch dieſe Punkte mit der Grundlinie parallele Linien e a, s y, t o u. ſ. w., die Perſpectiven der der Bildebene parallelen Steinfugen, ziehen zu können. Doch findet man die Perſpectiven einzelner Punkte dieſer Steinfugen bequemer, wenn man berückſichtigt, daß eine Diagonale A C im Grundriſſe, durch den Punkt K der Bildebene gehend, beide Fugenſyſteme in ihren Schnittpunkten A, V, W, X und C ſchneidet, und daß demnach die Schnittpunkte der Perſpective dieſer Diagonale mit den in P verſchwindenden Fugenperſpectiven Punkte ſein müſſen, durch welche die Perſpectiven der der Bildebene parallelen Fugen gezogen werden können. Die Diagonale A C ſchneidet, dem Grundriſſe nach, die Bildebene unter einem Winkel von 45°; es iſt deshalb die ihr gleich gerichtete Linie O D ihr Parallelſtrahl und der Diſtanzpunkt D ihr Verſchwindungspunkt, und zwar wie hier im Grundriſſe, ſo auch in der Conſtruction. Ueberträgt man daher das Maß P K verdoppelt auf die Grundlinie der Conſtruction in p k und zieht hier von D durch k eine Linie, ſo iſt dieſe die Perſpective jener Diagonale, und können durch ihre Schnittpunkte a, v, w, x und c mit den in P verſchwindenden Fugen parallel der Grundlinie die Perſpectiven a e, y s, o t u. ſ. w. der der Bildebene parallelen Fugen gezogen werden.

Läge aber der hier benutzte Diſtanzpunkt D ſo weit außerhalb des Conſtructionsraumes, daß man ihn nicht markiren könnte, ſo müßte man

ſich nur eines Bruchtheiles der Diſtanz, etwa der halben, alſo des Punktes $D/_2$ bedienen und um Punkte der Perſpectiven der der Bildebene parallelen Fugen zu finden, nach §. 107 die Maße N A, N Y, N B, N Z u. ſ. w., ebenfalls auf ihre Hälften reducirt, auf die als Maßlinie zu benutzende Grundlinie von n aus nach links und rechts in n α, n υ, n β, n ζ u. ſ. w. übertragen, um dann, von $D/_2$ durch die Punkte α, υ, β, ζ u. ſ. w. ziehend, die von P durch n gezogene Linie in den Punkten a, y, b, z u. ſ. w. ſchneiden zu können.

Da hier der Grundriß in halbem Maßſtabe der Conſtruction gegeben iſt, können ſeine Maße, als der halben Diſtanz entſprechend, ſofort verwendet werden.

Beiſpiel 2.

§. 149. **Aufgabe** wie im vorhergehenden Beiſpiele, nur mit dem Unterſchiede, daß die Bildebene in der Richtung, wie ſie in der Grundriß-Fig. 3 (Taf. 1) die Linie Y Z bezeichnet, gegeben iſt, wonach ſelbſtverſtändlich auch der Geſichtspunkt O einen entſprechend andern Ort hat.

§. 150. **Ausführung.** Nachdem, wie im vorhergehenden Beiſpiele, Horizont, Grundlinie und Verticale gezogen, der Hauptpunkt P (Fig. 4, Taf. 1), ein Diſtanzpunkt D und der herabgeſchlagene Geſichtspunkt O bezeichnet worden, werden für die zweierlei, zur Bildebene ſchiefen Richtungen der Steinfugen die Verſchwindungspunkte y und z feſtgeſtellt, indem man die Winkel, welche jene Fugen im Grundriſſe mit der Verticalebene P O bilden, an die Verticale der Conſtruction in O anträgt und dadurch den Horizont in den Punkten y und z ſchneidet. Um hiernach zuvörderſt die Perſpective eines der Eckpunkte des Fußbodens, etwa des Punktes A zu finden, wird im Grundriſſe durch A eine der Verticalebene parallele Linie A F gezogen, das Maß P F verdoppelt auf die Grundlinie der Conſtruction in p f und das Maß F A verdoppelt in f α übertragen, und dann eine von P durch f gezogene Linie durch eine andere von D durch α gezogene im Punkte a, der geſuchten Perſpective, geſchnitten. — Zieht man hierauf von a Linien nach y und z, ſo ſind dieſe die für jetzt noch unendlich langen Perſpectiven der Seiten A B und A E des Fußbodenquadrates. — Um auf ihnen die perſpectiviſchen Längen der Strecken A B und A E zu beſtimmen, bedarf es für die letztere zunächſt des Theilpunktes tz. Man findet ihn nach §. 101, wenn man die Länge des Parallelſtrahles z O um z in den Horizont in z tz überträgt. Man bedarf ferner eines Maßſtabes, um die Fußgröße für den Ort a kennen zu lernen. Man trägt

deshalb auf der Grundlinie der Construction an einer beliebigen Stelle einige, etwa 6 Fuß des verdoppelten Fußmaßes auf und zieht von einem beliebigen Punkte m des Horizontes durch die dadurch bezeichneten Punkte 0, 1, 2, 3 u. s. w. Linien; die Schnittpunkte derselben mit einer durch Punkt a gezogenen Horizontalen geben dann auf dieser die perspectivische Fußgröße für den Ort a an. Trägt man nun viermal je drei dieser Fußgrößen auf der durch a Horizontalen von a aus rechts in den Punkten $\varkappa$, λ, ϱ und ε auf und zieht dann von diesen Punkten nach dem Theilpunkte tz Linien, so schneiden diese die Linie a z in den Punkten k, l, r und e, welche die Perspectiven der Punkte K, L, R und E sind; und zieht man von diesen Punkten Linien nach y, so sind diese die Perspectiven der wie A B gerichteten Fugen. — Um hiernach die Perspectiven der wie A E gerichteten Fugen ziehen zu können, müßte man zunächst die perspectivische Theilung der Linie a y so ausführen, wie dies mit der Linie a z geschehen ist; doch kommt man schneller zum Ziele, wenn man, wie im vorigen Beispiele, die Beziehungen der Diagonale A C des Fußbodenquadrates zu den Fugen benutzt (und zwar gerade dieser Diagonale, weil sie sich der normalen Richtung zur Bildebene am meisten nähert und ihre Perspective deshalb am leichtesten zu construiren ist). Da A C die Richtung einer Linie hat, welche den Winkel, den die Quadratseiten A B und A E bilden, halbirt, so muß auch in der Construction ihr Parallelstrahl den Winkel, welchen die Parallelstrahlen O y und O z bilden, halbiren. Zieht man diese Halbirungslinie, so schneidet man den Horizont in dem Punkte *dg*, dem Verschwindungspunkte der Diagonale A C, welchen man kurz den **Diagonalpunkt** nennt. Zieht man hierauf a *dg*, die Perspective der Diagonale, so schneidet man die nach y gerichteten Fugen in Punkten, durch welche die nach z gerichteten Fugenperspectiven nunmehr gezogen werden können.

Viel kürzer läßt sich die Construction ausführen, wenn man im Grundrisse die Parallelstrahlen O Y und O Z der wie A B und der wie A E gerichteten Fugen zieht, die sich daraus auf der Bildebene ergebenden Abstände der Verschwindungspunkte Y und Z von P verdoppelt von P aus auf den Horizont der Construction in P y und P z überträgt, und dann, indem man zuerst etwa das wie A B gerichtete Linienſystem ins Auge faßt, die Abstände P M, P I, P H, P G und P T verdoppelt von p aus auf die Grundlinie der Construction in p m, p i, p h, p g und p t überträgt, und durch die Punkte m, i, h, g und t nach y gerichtete Linien zieht. — Verfährt man dem entsprechend auch mit den wie A E gerichteten, also in z verschwindenden Fugen, indem man die Schnittpunkte derselben

§. 151.

mit der Bildebene, wie z. B. Q, oder ihrer Verlängerungen, wie z. B. N, in gleicher Weiſe auf der Grundlinie der Conſtruction, z. B. in q und n, darſtellt und durch dieſelben Linien nach z zieht, ſo iſt die Aufgabe gelöſt. — Einfacher iſt es hierbei noch, im Grundriſſe den Parallelſtrahl O *dg* der Diagonale A C zu ziehen, den Abſtand des Diagonalpunktes *dg* verdoppelt auf den Horizont der Conſtruction in P *dg* zu übertragen, dann die nach y gerichteten Linien durch eine von a nach *dg* gezogene Linie zu ſchneiden, und durch die Schnittpunkte Linien nach z zu ziehen.

§. 152. Wäre jedoch der Conſtructionsraum ſo eng begrenzt, wie ihn in Fig. 5 (Taf. 1) das Rechteck $N^1 S^1 T^1 R^1$ einſchließt, ſo daß der herabgeſchlagene Geſichtspunkt, der Diſtanzpunkt und die Verſchwindungspunkte, als zu entfernt liegend, nicht benutzt werden können, ſo müßten die im Kapitel 5 gezeigten Hülfsconſtructionen etwa in folgender Art zur Anwendung kommen:

Nachdem Horizont, Grundlinie und Verticale gezogen, ergiebt eine kurze Ueberlegung, daß hier höchſtens die $^1/_3$-Diſtanz anwendbar iſt. Es wird demnach der Diſtanzpunkt $D/_3$ in $^1/_3$ der in der Aufgabe gegebenen Entfernung von P auf dem Horizonte aufgetragen. — Um nun zunächſt die Perſpective a des Punktes A zu finden, wird wieder das Maß P F (Fig. 3) verdoppelt (weil die Conſtruction im doppelten Maßſtabe des Grundriſſes ausgeführt werden ſoll) auf die Grundlinie in p f übertragen, von P eine Linie durch f gezogen und, um f a nach Anleitung des §. 107 perſpectiviſch gleich F A zu machen, das verdoppelte Maß F A, auf $^1/_3$ reducirt (weil auch die Diſtanz auf $^1/_3$ reducirt worden), auf der Grundlinie in f α aufgetragen, und die Linie P f durch eine andere von $D/_3$ durch α gezogene im Punkte a geſchnitten. — Um die Richtungen der Perſpectiven der Linien A B und A E ohne Benutzung ihrer Verſchwindungspunkte zu beſtimmen, wird am beſten nach §. 120 verfahren; demgemäß hier $^1/_6$-Diſtanz in $O/_6$ auf der Verticale aufgetragen, es werden ferner an dieſelbe in $O/_6$ die Abweichungswinkel der Linien A B und A E von der Verticalebene O P des Grundriſſes angetragen und dadurch der Horizont in $y/_6$ und $z/_6$ geſchnitten; auf der Linie a P wird im Punkte $a/_6$ ein Sechſtel ihrer Länge bezeichnet und werden auf einer durch denſelben gezogenen Horizontalen die Maße P $y/_6$ und P $z/_6$ in $a/_6$ x und $a/_6$ x^1 aufgetragen. Von a durch x und durch x^1 gezogene Linien a (Y) und a (Z) ſind alsdann die Perſpectiven der unendlich lang aufgefaßten Linien A B und A E. — Um auf a (Z) die Perſpectiven der Punkte K, L, R und E zu finden, iſt zunächſt der Theilpunkt für a (Z), welcher hier innerhalb des Conſtructionsraumes fällt, zu ſuchen. Es iſt zu dem Zweck nach §. 114

der Winkel $y/_6\ O/_6\ P$ zu halbiren, der Horizont dadurch in $t/_6$ zu ſchneiden und das Maß $P\,t/_6$ verſechsfacht in $P\,tz$ auf dem Horizonte aufzutragen, wonach tz der geſuchte Theilpunkt iſt. Hiernach iſt, um für den Ort a die Größe von 3 Fuß zu ermitteln, entweder innerhalb des Conſtructionsraumes, oder, um dieſen nicht mit zu vielen Hülfslinien zu erfüllen, auf einem Nebenblatte ein Maßſtab anzufertigen, wie er in Fig. 4 ſchon vorliegt, und ſind wie dort auf einer durch a gezogenen Horizontalen die 3 Fuß großen Maße $a\varkappa$, $\varkappa\lambda$, $\lambda\varrho$ ($\varrho\varepsilon$ fiele ſchon außerhalb des Conſtructionsraumes) aufzutragen. Von den Punkten $\varkappa$, λ und ϱ nach tz gezogene Linien ſchneiden dann die Linie a (Z) in den Perſpectiven k, l und r. Um noch den Punkt e zu finden, iſt nach §. 143 durch r eine Horizontale zu ziehen, dieſe durch eine von einem beliebigen Punkte m des Horizontes nach l gezogene Linie in l^1 zu ſchneiden, es iſt $r\varepsilon$ gleich rl^1 zu machen und Linie a (Z) abermals durch eine von ε nach m gezogene Linie in e zu ſchneiden. — Um nun durch die Punkte k, l, r und e die der Linie a b perſpectiviſch parallelen Fugen ziehen zu können, wird nach Anleitung des §. 126 von k eine Horizontale k n bis zur Linie a b gezogen; es werden ferner die Linien $k\,m^1$ und $n\,m^1$ nach einem beliebigen Punkte m^1 des Horizontes gezogen und wird dadurch auf einer beliebigen horizontalen Linie (in der Figur iſt die Grundlinie gewählt) das Maß $n^1\,k^1$ abgeſchnitten. Trägt man dieſes Maß auf der Grundlinie vom Punkte s (in welchem ſie die a b ſchneidet) aus 4 mal neben einander auf, ſo werden dadurch auf ihr Punkte, wie s^1, s^2, s^3 bezeichnet, durch welche Linien von k, r, e aus als die geſuchten Fugenperſpectiven gezogen werden können. — Um für die Perſpectiven der mit der Linie A E parallelen Fugen die erſten Punkte zu ermitteln, conſtruirt man auch hier die Perſpective der Diagonale des Fußbodens, und kann man dazu die Lage des Diagonalpunktes entweder direct aus dem Grundriſſe entnehmen, oder aber dadurch finden, daß man den Winkel $y/_6\ O/_6\ z/_1$ halbirt, den Horizont in $dg/_6$ ſchneidet und das Maß $P\,dg/_6$ verſechsfacht in $P\,dg$ auf den Horizont aufträgt, wonach ſich hier dg als Diagonalpunkt ergiebt. Zieht man nun die Perſpective a dg der Diagonale A C, ſo ſchneidet man die Perſpectiven der mit A B parallelen Fugen in den Punkten u, i, g und c, durch welche die Perſpectiven der mit A E parallelen Fugen gehen müſſen. Zweite Punkte für die letzteren findet man wieder nach §. 126, indem man durch u eine die Linie a e im Punkte v ſchneidende Horizontale legt, von u und v Linien nach einem beliebigen Punkte m^1 des Horizontes Linien zieht, und das Maß q o, welches dieſe auf einer beliebigen, etwa durch e gelegten Horizontalen abtheilen, auf dieſer mehrmals von e aus neben einander in e w, $w\,w^1$ aufträgt. Durch

u und w und durch i und w^1 gezogene Linien ſind dann ſchon zwei der Perſpectiven der mit A E parallelen Fugen. Legt man nun noch durch g eine die über i verlängerte Fuge w^1 i im Punkte h ſchneidende Horizontale und macht auf ihr g h^1 geometriſch gleich g h, ſo kann durch c und h^1 die Perſpective der Linie C B gezogen werden; und legt man durch c eine die über h verlängerte Fuge w^1 h im Punkte j ſchneidende Horizontale, und halbirt c j im Punkte j^1, ſo ergiebt eine von j^1 durch g gezogene Linie die Perſpective der noch fehlenden mittelſten Fuge.

Wäre es hier nicht darauf angekommen, das Verfahren bei der Conſtruction auf engbegrenzter Conſtructionsfläche ohne vorliegenden Grundriß zu zeigen, ſo wären die letzten Operationen dadurch ſehr abzukürzen geweſen, daß man die Abſtände der Schnittpunkte der Fugen mit der Bildebene von P aus dem Grundriſſe verdoppelt in die Grundlinie der Conſtruction von p aus übertragen hätte, wodurch zweite Punkte für die zu ziehenden einzelnen Perſpectiven ſchneller gewonnen geweſen wären.

Beiſpiel 3.

§. 153. **Aufgabe.** In Fig. 6 (Taf. I) liegt der Grundriß zweier gleichen, aber verſchieden geſtellten **Prismen** vor, deren eines auf ſeiner Grundfläche J F G H ſteht, während das andere auf ſeiner Seitenfläche A B C L liegt. Die Grundflächen bilden Quadrate von je 5 Fuß Seite, die Längenkanten haben 12 Fuß Länge. Die Stellung der Bildebene iſt in der Linie Y (Z), und in einem normalen Abſtande von 24 Fuß von dieſer der Ort des Geſichtspunktes O gegeben — es ſollen unter Annahme einer Höhe des Auges von 9 Fuß die Perſpectiven der beiden Prismen in doppeltem Maßſtabe, alſo in dem der Conſtructionsfig. 7 beigefügten, conſtruirt werden.

§. 154. **Ausführung.** Nachdem in der Conſtruction (Fig. 7, Taf. I) der Horizont y z, 9 Fuß darunter die Grundlinie, und durch P die Verticale gezogen, nachdem auf letzterer in 24 Fuß Entfernung von P der herabgeſchlagene Geſichtspunkt O, und ebenſo weit von P auf dem Horizonte einer der Diſtanzpunkte in D^1 bezeichnet worden, wird, um die Perſpective des aufgerichteten Prismas und davon zunächſt die des Punktes F zu conſtruiren, der Abſtand P V des Prismas von der Verticalebene des Grundriſſes nach dem der Conſtruction beigefügten Fußmaßſtabe (d. i. verdoppelt) in p v auf der Grundlinie der Conſtruction aufgetragen; es wird ferner das Maß V F, um welches das Prisma vor der Bildebene vor-

ragt, in v φ auf der Grundlinie aufgetragen. Schneidet man dann eine von P durch v gezogene Linie durch eine andere von D^1 durch φ gezogene im Punkte f, ſo iſt dieſer die Perſpective von F. — Macht man nun v n gleich 5 Fuß des Maßſtabes und zieht von P durch n eine Linie, ſo liegen in dieſer und in der durch v gezogenen die Richtungen der Perſpectiven der zur Bildebene normalen Seiten F G und J H der Grundfläche J F G H vor. Da J F und H G der Bildebene parallel ſind, ſo müſſen auch ihre Perſpectiven der Grundlinie parallel ſein; eine durch f gelegte Horizontale f i iſt deshalb die Perſpective von F J, und ſchneidet man f P durch eine von i nach D^1 gezogene Linie in g, ſo hat man f g perſpectiviſch gleich f i gemacht, und eine durch g gelegte Horizontale g h iſt die Perſpective von G H. — Die Perſpectiven aller übrigen Kanten finden ſich nun leicht, wenn man durch die Punkte f, i, h, g und v lothrechte Linien zieht, die durch letzteren Punkt gelegte v v^1 gleich 12 Fuß des Maßſtabes macht, die durch f und g gelegten Lothe durch eine von P durch v^1 gezogene Linie in f^1 und g^1 ſchneidet, durch letztere beiden Punkte die Horizontalen f^1 i^1 und g^1 h^1 und endlich die nach P gerichtete Linie i^1 h^1 zieht.

Zur Perſpective des liegenden Prismas übergehend, iſt der (56° §. 155.
große) Winkel zu ermitteln, um welchen die Kante A B von der Verticalebene abweicht, derſelbe dann an die Verticale der Conſtruction in O anzutragen und danach der Horizont durch den Parallelſtrahl O z in z, dem Verſchwindungspunkte der mit A B parallelen Kanten, zu ſchneiden. Da ferner A L und alle ihr parallelen Kanten normal zu A B ſind, ſo bezeichnet ein zu O z normaler Parallelſtrahl O y in y des Horizontes ihren Verſchwindungspunkt; endlich ſchneiden nach §. 105 die Halbirungslinien O tz und O ty der Winkel P O y und P O z den Horizont in den Theilpunkten tz und ty für die mit A B und mit A L parallelen Linienſyſteme. — Um nun zunächſt die Perſpective a des Punktes A zu finden, trägt man die in U P und U A vorliegenden normalen Abſtände des letzteren von der Verticalebene und von der Bildebene in u p und u α auf der Grundlinie auf und ſchneidet eine von P durch u gezogene Linie durch eine andere von D^1 durch α gezogene in a. — Um hierauf die Richtungen und Längen der Perſpectiven der Kanten A B und A L zu conſtruiren, zieht man von a nach z und nach y, fertigt dann am Rande der Conſtruction einen perſpectiviſchen Längen-Maßſtab an, um aus ihm mittels einer durch a gezogenen Horizontalen die für den Ort a gültigen Längen von 12 Fuß und von 5 Fuß entnehmen und in a β und in a λ auftragen zu können. Schneidet man dann a z durch eine von β nach tz gezogene Linie in b, ſo iſt a b perſpectiviſch gleich a β;

ſchneidet man a y durch eine von λ nach ty gezogene Linie in l, ſo iſt a l perſpectiviſch gleich a λ, und a b iſt die Perſpective von A B, ſowie a l die von A L. — Macht man nun noch eine durch a gezogene Lothrechte a a¹ gleich 5 Fuß, d. i. geometriſch gleich a λ, ſo können die Perſpectiven aller anderen Kanten ohne Weiteres gezogen werden: man zieht dann nämlich von l nach z und von b nach y Linien, deren Schnittpunkt c die Perſpective von C ergiebt; man legt durch l, b und c lothrechte Linien, ſchneidet dieſelben, von a¹ nach y und nach z ziehend, in l¹ und b¹, und ſchneidet ſchließlich die durch c gezogene Lothrechte durch Linien, von b¹ nach y und von l¹ nach z gezogen, im Punkte c¹.

§. 156. Viel einfacher jedoch löſt man die Aufgabe, wenn man die durch den Grundriß gebotenen Vortheile folgendermaßen benutzt: Um das aufgerichtete Prisma (Fig. 8, Taf. 1) zu conſtruiren, überträgt man die Abſtände der Punkte V, N und des Punktes S (in welchem die Diagonale J G der Grundfläche die Bildebene ſchneidet) von P aus dem Grundriſſe (verdoppelt) auf die Grundlinie der Conſtruction in p v, p n und p s, zieht von P durch v und n Linien und ſchneidet dieſe durch eine von D¹ durch s gezogene Linie in g und i; man zieht i f und g h horizontal, zieht durch f, i, h, g und v lothrechte Linien, macht die durch v gezogene v v¹ geometriſch gleich 12 Fuß (d. i. 2 mal A B), ſchneidet ferner, von P durch v¹ ziehend, die durch f und g gezogenen Lothrechten in den Punkten f¹ und g¹, zieht f¹ i¹ und g¹ h¹ horizontal, und ſchließlich von P durch h¹ und i¹.

§. 157. Um die Perſpective des liegenden Prismas entſprechend zu conſtruiren, ſtellt man zuvörderſt die Verſchwindungspunkte y und z feſt, indem man entweder im Grundriſſe die Parallelſtrahlen O Y und O Z zieht und die Abſtände der Punkte Y und Z von P verdoppelt auf den Horizont der Conſtruction überträgt, oder indem man — wenn das in §. 155 gezeigte Verfahren nicht angewendet werden kann, weil etwa der herabgeſchlagene Geſichtspunkt außerhalb des Conſtructionsraumes fiele — die Abſtände der Verſchwindungspunkte z und y von P nach Anleitung des §. 59 berechnet. Es weichen nämlich die beiden Kanten A B und A L, die erſtere um 56°, die letztere um 34° von der Verticalebene ab. Die Tangente des Winkels von 56° iſt 1,4825; hiermit die gegebene Diſtanz von 24 Fuß multiplicirt, ergiebt für den Abſtand des Punktes z von P eine Länge von 35,58 Fuß, d. i. faſt gleich 35½ Fuß. Die Tangente des Winkels von 34° iſt 0,6745; hiermit die Diſtanz von 24 Fuß multiplicirt, ergiebt für den Abſtand des Punktes y von P eine Länge von 16,188 Fuß, d. i. beinahe 16⅕ Fuß. — Hierauf überträgt man die

Abſtände der Punkte K und E, in welchen die Längenkanten die Bildebene ſchneiden, und der Punkte R und Q, in welchen die Verlängerungen der kurzen Kanten die Bildebene ſchneiden, von P, verdoppelt von p aus auf die Grundlinie der Conſtruction und bezeichnet dadurch hier die Punkte r, k, e und q, zieht Linien von z durch e und k und ſchneidet dieſe durch Linien, von y durch r und durch q gezogen, in den Punkten l, a, b und c. Legt man durch dieſe Punkte und durch k und e lothrechte Linien, und macht davon $k\,k^1$ und $e\,e^1$, als in der Bildebene liegend, geometriſch gleich 5 Fuß (d. i. 2 mal A L) und zieht von z durch k^1 und e^1, ſo ſchneidet man die anderen Lothrechten in den Punkten b^1, a^1, c^1 und l^1, worauf, um die Perſpective zu vollenden, nur noch die nach y gerichteten Linien $b^1\,c^1$ und $a^1\,l^1$ zu ziehen ſind.

§. 158. Lägen jedoch bei dieſem Verfahren die Verſchwindungspunkte y und z zu weit außerhalb des Conſtructionsraumes, ſo daß man ſich ihrer nicht bedienen könnte, ſo müßte man die Perſpectiven der Punkte A, B, C und L einzeln ſo conſtruiren, wie dies in den vorhergehenden Paragraphen ſtets mit dem Punkte A geſchehen iſt. Man müßte alſo von den genannten Punkten im Grundriſſe normale Linien (Ordinaten) gegen die Bildebene ziehen, in dieſer dadurch die Punkte U, X, T und W bezeichnen, die Abſtände dieſer von P (die Abſciſſen) auf die Grundlinie der Conſtruction (Fig. 8) von p aus verdoppelt übertragen und dadurch die Punkte u, x, t und w bezeichnen; man müßte durch dieſe ſämmtlich nach P gerichtete Linien ziehen und auf dieſen die perſpectiviſchen Längen jener Normalen conſtruiren, indem man, um z. B. x b zu finden, die Länge X B verdoppelt auf die Grundlinie in $x\,\beta$ überträgt und x P durch eine von β nach D^1 gezogene Linie in b ſchneidet, und, um die Länge t c zu finden, die Länge T C verdoppelt in $t\,\gamma$ der Grundlinie überträgt und dann t P durch $\gamma\,D^1$ in c ſchneidet u. ſ. w. — Sind ſo die Eckpunkte a, b, c und l gefunden und die ſie verbindenden Kanten gezogen, ſo beſtimmt man die verſchiedenen perſpectiviſchen Höhen der durch dieſe Punkte nunmehr zu ziehenden lothrechten Kanten, indem man etwa in e, oder, wie in der Figur geſchehen, in k ein 5 Fuß hohes Loth $k\,k^1$ errichtet, von P durch k und k^1 Linien zieht und dadurch einen perſpectiviſchen Höhenmaßſtab für das Maß von 5 Fuß für alle Orte der Bildebene ſchafft, ähnlich dem in den §§. 83 und 84 empfohlenen. Zieht man nämlich von a horizontal bis a^2 in der von P durch k gezogenen Linie und legt durch a^2 eine Lothrechte, welche die von P durch k^1 gezogene in a^3 ſchneidet, ſo ergiebt $a^2\,a^3$ die perſpectiviſche Höhe für die lothrechte Kante $a\,a^1$ des Prismas. So auch hat man, um die perſpectiviſche Höhe $c^2\,c^3$ der in c ſtehenden lothrechten

Kante zu finden, von c bis c^2 horizontal zu ziehen, und durch c^2 die Lothrechte $c^2 c^3$ zu ziehen. Nachdem man in gleicher Weiſe die perſpectiviſchen Höhen der Kanten $b b^1$ und $l l^1$ beſtimmt, können die die Punkte a^1, b^1 c^1 und l^1 verbindenden Kanten gezogen werden. Es iſt dies ein Verfahren, welches im Grunde auf dem in §. 124 Geſagten beruht.

§. 159. Soll die Aufgabe unter der Vorausſetzung ausgeführt werden, daß der Conſtructionsraum ſo eng begrenzt iſt, wie das Fig. 9 (Taf. 2) einſchließende Rechteck zeigt, ſo daß alſo die Verſchwindungspunkte, ein Theilpunkt t_{γ} und der Diſtanzpunkt D^1 nicht benutzt werden können, ſo ſind, um zunächſt das aufgerichtete Prisma zu conſtruiren, die Maße P V, P S und P N aus dem Grundriſſe, Fig. 6, verdoppelt auf die Grundlinie der Conſtruction in p v, p s und p n zu übertragen und Linien von P durch v und durch n zu ziehen. Bezeichnet man hierauf in s_3 ein Drittel von n s und dem entſprechend in D_3 ein Drittel der gegebenen Diſtanz, und zieht von D_3 durch s_3 eine Linie bis i, wodurch n i perſpectiviſch gleich n s gemacht iſt (wegen der diagonalen Richtung der Linie J G in dem Quadrate F G H J müſſen N J und N S gleich ſein), ſo iſt i die Perſpective des Punktes J. Zieht man alsdann von i durch s bis g, und darauf i f und g h horizontal, ſo iſt i f g h die Perſpective der unteren Grundfläche des Prismas. Zieht man nun noch durch ihre Eckpunkte und durch v lothrechte Linien, macht $v v^1$ gleich 12 Fuß des Maßſtabes, ſchneidet die in f und g ſtehenden Lothe durch eine von P durch v^1 gezogene Linie in den Punkten f^1 und g^1, ſo bedarf es keiner weiteren Anleitung, um die Perſpective der oberen Grundfläche zu vollenden.

§. 160. Um die Perſpective des liegenden Prismas zu conſtruiren, iſt zunächſt die Perſpective des Punktes A wie in §. 155 zu ſuchen, mit dem Unterſchiede, daß hier die $1/3$-Diſtanz angewandt und dem entſprechend auch nur $1/3$ von dem verdoppelten Maße U A auf der Grundlinie aufgetragen wird. — Um die Richtungen der Perſpectiven der Kanten A B und A L zu finden, iſt gemäß §. 120 hier etwa $1/6$-Diſtanz in $P O_6$ auf der Verticale aufzutragen (es iſt dies in der Figur oberhalb des Horizontes geſchehen, um die Conſtruction ſo wenig als möglich durch Hülfslinien zu durchſchneiden); es ſind an letztere in O_6 die 56° und 34° betragenden Abweichungswinkel der Linien A B und A L von der Verticale anzutragen und iſt dadurch der Horizont in z_6 und y_6 zu ſchneiden. Bezeichnet man hierauf auf einer von a nach P gezogenen Linie $1/6$ ihrer Länge in a_6, legt durch dieſen Punkt eine Horizontale, macht auf ihr a_6 r gleich $P z_6$, und a_6 q gleich $P y_6$, und zieht dann von a durch r und durch q Linien, ſo ſind dieſe die Richtungen der geſuchten Perſpectiven. —

Um nun auf der Linie a r die 12 Fuß betragende Länge der Kante A B perſpectiviſch in a b darzuſtellen, benutzt man den Theilpunkt tz, welcher hier noch innerhalb des Conſtructionsraumes liegt (conſtruirt iſt derſelbe dadurch, daß die Länge z/6 O/6 um z/6 in den Horizont in z/6 t/6 übertragen und dann das Maß P t/6 verſechsfacht in P tz aufgetragen wurde); man trägt auf einer durch a Horizontalen das aus dem Maßſtabe neben der Conſtruction entnehmbare, für den Ort a gültige Maß von vorläufig nur 6 Fuß (da das Maß von 12 Fuß die Grenzen des Conſtructionsraumes überſchreiten würde) in a δ auf und ſchneidet die über r verlängerte Linie a r durch eine andere von δ nach tz gezogene in d, wonach a d perſpectiviſch gleich 6 Fuß iſt. Macht man nun noch d b perſpectiviſch gleich a d, ſo iſt a b perſpectiviſch gleich 12 Fuß. Zu dem Zweck iſt nach §. 143 durch d eine Horizontale zu legen, dieſelbe durch eine von a nach einem beliebigen Punkte m des Horizontes zu ziehende Linie in o zu ſchneiden, es iſt das Maß d β geometriſch gleich d o zu machen und die über r verlängerte Linie a r durch eine andere, von β nach m gezogen, in b zu ſchneiden. — Da der Theilpunkt für die Linie a q außerhalb des Conſtructionsraumes fällt, muß das perſpectiviſche Auftragen des Maßes von 5 Fuß auf dieſelbe nach §. 141 geſchehen und demnach der 56° große Abweichungswinkel der Linie A L von der Bildebene an eine durch a gelegte Horizontale a λ angetragen, der angetragene Schenkel a π gleich 5 Fuß, wie ſie der Maßſtab für den Ort a ergiebt, gemacht werden; es muß von π eine Normale π λ auf die a λ gefällt und die über q verlängerte a q durch eine von λ nach P gezogene Linie in l geſchnitten werden, wonach a l perſpectiviſch gleich 5 Fuß iſt. Auf eine kürzere Art hätte man die Perſpectiven b und l der Punkte B und L gefunden, wenn man wie in §. 158 im Grundriſſe von B und L aus Normalen B X und L W auf die Bildebene gefällt, die Maße P X und P W verdoppelt auf die Grundlinie der Conſtruction in p x und p w übertragen und die über r und q verlängerten Linien a r und a q durch Linien, von x und von w nach P gezogen, in den Punkten b und l geſchnitten hätte. — Die Perſpectiven der Kanten B C und L C kann man ziehen, wenn man zuvor die Perſpective des Punktes C wie eben die der Punkte B und L conſtruirt, nämlich im Grundriſſe C T normal zur Bildebene zieht, das Maß P T verdoppelt auf die Grundlinie der Conſtruction in p t überträgt, von P durch t zieht, dann γ t gleich 1/3 des verdoppelten Maßes C T macht und t P durch eine von γ nach D/3 gezogene Linie in c ſchneidet. — Die verſchiedenen perſpectiviſchen Höhen der nunmehr durch die Punkte a, b, c und l zu ziehenden lothrechten Kanten ergeben ſich aus dem Maßſtabe, wenn man

von jenen Punkten Horizontalen durch dieſen zieht und daraus das 5 Fuß-maß für jede Kante entnimmt. — Schließlich ſind a^1 und c^1 mit b^1 und l^1 durch gerade Linien zu verbinden.

§. 161. Endlich erſcheint es zweckmäßig, bei dieſer Aufgabe auch noch das Verfahren zu zeigen, welches der ſchon in §. 44 erläuterten Grundriß-methode entſpricht, weil ſich aus demſelben Vortheile für die Conſtruction im Allgemeinen und beſonders für die Conſtruction panoramatiſcher Bilder herleiten laſſen.

In Fig. 10 (Taf. 2) liegt in dem Rechtecke A B C L die in Fig. 6 gegebene Grundrißprojection des liegenden Prismas in einem willkührlich vergrößerten Maßſtabe vor; $\beta\lambda$ iſt dazu die Grundrißprojection der Bild-ebene, O die des Geſichtspunktes. Darüber iſt in dem Rechtecke $A^1 A^2 C^2 C^1$ die Aufrißprojection deſſelben Körpers, in $P^1 p$ die der Bildebene, in $C^1 S$ die der Grundebene und in O^1 die des 9 Fuß hoch über der Grundebene gegebenen Geſichtspunktes dargeſtellt.

Nach der Grundrißmethode iſt es nun erforderlich, ſowohl im Grund-riſſe als im Aufriſſe aus dem Geſichtspunkte die Geſichtslinien nach ſämmt-lichen Eckpunkten des Körpers zu ziehen; es ergeben dann die Schnitt-punkte der Geſichtslinien mit der Bildebene im Grundriſſe die in die Conſtruction (Fig. 11, Taf. 2) zu übertragenden Abſtände der Perſpectiven der Eckpunkte von der Verticale, während die Schnittpunkte der Geſichts-linien mit der Bildebene im Aufriſſe für die Conſtruction die Abſtände der Perſpectiven der entſprechenden Punkte vom Horizonte ergeben. Um z. B. die Perſpective der durch den Punkt A im Grundriſſe bezeichneten lothrechten Kante zu finden, hat man alſo das Maß $P\alpha$ des Grundriſſes in $P\alpha$ der Conſtruction (Fig. 11) zu übertragen, hier durch α eine Lothrechte zu ziehen und in dieſer αa^2 und αa^1 geometriſch gleich $P^1\alpha^2$ und $P^1\alpha^1$ des Aufriſſes (Fig. 10) zu machen. Um die Perſpective der Kante C des Grundriſſes zu finden, iſt aus dieſem das Maß $P\gamma$ in $P\gamma$ der Conſtruction zu übertragen, hier durch γ eine Lothrechte zu ziehen und in dieſer γc^2 und γc^1 gleich $P^1\gamma^2$ und $P^1\gamma^1$ des Aufriſſes zu machen u. ſ. w. — Die Per-ſpectiven der horizontalen Kanten ergeben ſich dann von ſelbſt dadurch, daß man Punkte, wie a^2 und a^1 mit b^2 und b^1 durch gerade Linien verbindet.

§. 162. Vergleicht man nun die in den §§. 154—161 gezeigten Con-ſtructionsarten mit einander, ſo ergiebt ſich auf den erſten Blick, daß die in den §§. 156—158 vorgeführten, welche das Vorhandenſein eines Grundriſſes vorausſetzen, und davon namentlich die erſtere, die einfachſten ſind; daß ferner das in §. 154 eingeſchlagene Ver-

fahren ſich beſonders für ſolche Fälle eignet, in welchen ein Grundriß nicht vorliegt und man vielmehr nach wörtlichen Beſchreibungen der Geſtalt und der Dimenſionen der gegebenen Objecte und ihrer Lage zur Bildebene conſtruiren muß. Bei dem in §. 159 gezeigten Verfahren wird die Bildfläche mit ſehr vielen Hülfslinien und Zirkelſtichen bedeckt und kommt man häufig in den Fall, die Richtung von Linien nur durch Punkte feſtſtellen zu können, welche zu dicht neben einander liegen, als daß die Richtigkeit der Richtung der ſo conſtruirten Linien nicht bezweifelt werden müßte. Das in §. 161 eingeſchlagene Verfahren iſt wegen ſeiner Vorbereitungen zwar umſtändlich, bietet jedoch, wie ſpäter folgende Aufgaben zeigen werden, mancherlei Vortheile, zumal man die hier gezeigte Anwendung des Aufriſſes durch andere Conſtructionen erſetzen kann. Beſonders zuverläſſig und nützlich iſt dieſes Verfahren, wie ſchon oben ausgeſprochen, bei der Conſtruction von Perſpectiven auf der gekrümmten Panorama-Bildfläche.

Hiernach muß im Allgemeinen dem in §. 156 gezeigten Verfahren der Vorzug gegeben werden. Faſt immer iſt ein Grundriß des darzuſtellenden Objectes ſchon vorhanden, oder doch ſchon deshalb anzufertigen nöthig, um Bildebene und Geſichtspunkt dazu orientiren zu können. In jedem Falle lohnt ſich die Mühe, die ſeine Anfertigung erfordert, durch Abkürzung und Genauigkeit der Conſtruction. Sollten aber bei dieſem empfohlenen Verfahren Verſchwindungspunkte ſo weit außerhalb des Conſtructionsraumes fallen, daß dies auch durch ein Conſtruiren in verkleinertem Maßſtabe behufs nachheriger vergrößerter Uebertragung auf die eigentliche Bildfläche nicht zu umgehen iſt, dann wird ſich die in §. 161 gezeigte Anwendung der Hülfsconſtructionen von ſelbſt empfehlen.

Es wird demnach in der Folge, wo nicht auch ein Aufriß des gegebenen Objectes erforderlich iſt, ſtets wenigſtens der Grundriß gegeben ſein und die Conſtruction meiſt den in §. 156 gezeigten Weg nehmen; doch ſoll, wo dies erwähnenswerth erſcheint, jedesmal auch der Weg für die anderen Conſtructionsarten gezeigt werden.

Beiſpiel 4.

§. 163. **Aufgabe.** In Fig. 12 (Taf. 3) liegt der geometriſche Grundriß eines Theiles eines **Fußbodens** vor, welcher aus rhombenförmigen Steinen zuſammengeſetzt iſt, deren je 3 zu einem regelmäßigen Sechseck von je 1 Fuß Seitenlänge geordnet ſind. In der Linie YZ iſt der Grundriß der Bildebene, im Punkte O der des Geſichtspunktes bei 10 Fuß Diſtanz gegeben; die Höhe des Auges betrage 5 Fuß — es ſoll die Perſpective des vorliegenden Theiles des Fußbodens in einem $1\frac{1}{2}$ mal größeren Maßſtabe conſtruirt werden.

§. 164. **Ausführung.** Faßt man die in dem Fußboden vorkommenden Fugenrichtungen an irgendeinem einzelnen der Sechsecke, welche ihn bilden, z. B. an dem Sechseck A B C E F G ins Auge, ſo findet man, daß hier 3 Syſteme von horizontalen Linien vorliegen: 1) ſolche Linien, wie A G, B H und C E, zu welchen O Y der Parallelſtrahl und demnach Y der Verſchwindungspunkt iſt, 2) Linien wie G F, H E und B C, zu welchen O Z der Parallelſtrahl und Z der Verſchwindungspunkt iſt, 3) Linien wie B A, H G und E F, zu welchen der Parallelſtrahl die Bildebene in einem ſehr entfernten Punkte ſchneiden würde, deren Verſchwindungspunkt aber auch entbehrlich iſt, da alle nach ihm gerichteten Linien doch gezogen werden können, wenn man nach vorangegangener Conſtruction der beiden anderen Linienſyſteme die entſprechenden Schnittpunkte derſelben durch Linien verbindet. — Zunächſt muß, weil in der Aufgabe $1\frac{1}{2}$ malige Vergrößerung vorgeſchrieben worden, ein geometriſcher Vergrößerungsmaßſtab, wie er neben Fig. 13 (Taf. 3) vorliegt, angefertigt werden und theilt man zu dem Zweck eine beliebig gerichtete und beliebig lange Linie $0, 1\frac{1}{2}$ in 3 gleiche Theile, wie dies die Punkte $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$ angeben, und zieht hierauf durch die Punkte 1 und $1\frac{1}{2}$ zwei beliebig gerichtete parallele Linien. Trägt man alsdann auf die durch Punkt 1 gezogene Linie irgendein Maß, beiſpielsweiſe das Maß n q auf und zieht von O Linien durch n und q bis zu n^1 und q^1 in der durch $1\frac{1}{2}$ gezogenen Linie, ſo iſt das Maß $n^1 q^1$ anderthalbmal größer als das Maß n q. Auf dieſe Weiſe wird hier nun jedes aus dem Grundriſſe auf die Grundlinie der Conſtruction zu übertragende Maß zuvor zu vergrößern ſein.

Nachdem man hiernach in der Conſtruction (Fig. 13) den Horizont, 5 Fuß darunter die Grundlinie und außerdem die Verticale gezogen, den Hauptpunkt P und den Grundpunkt p bezeichnet, und die Entfernungen P Y und P Z der Verſchwindungspunkte Y und Z von P aus dem Grund-

riſſe in entſprechender Vergrößerung in P y und P z auf den Horizont übertragen, verlängert man im Grundriſſe ſämmtliche Steinfugen, mit Ausnahme der wie B A gerichteten, bis zu ihren Schnittpunkten (wie z. B. J, K, L und M, N, Q) mit der Bildebene; überträgt dann die Entfernungen dieſer Schnittpunkte von P, alſo z. B. P J, P K, P L und P M, P N, P Q anderthalbmal vergrößert auf die Grundlinie der Conſtruction in p i, p k, p l und p m, p n, p q und zieht von Punkten wie i, k und l Linien nach z, von Punkten aber wie m, n und q Linien nach y. Verbindet man hierauf die entſprechenden Schnittpunkte dieſer Linien mit einander durch andere Linien, alſo z. B. e mit f, h mit g und b mit a, ſo entſtehen die Perſpectiven ſämmtlicher Sechsecke des Fußbodens wie hier die des Sechsecks A B C E F G entſtanden iſt.

§. 165. Während es bei dem in der vorhergehenden Aufgabe gegebenen Muſter des Fußbodens zweckmäßig war, die Schnittpunkte der bis in die Bildebene verlängerten Fugen der Steine zu benutzen, würde es ſich bei einem complicirteren Muſter, wie z. B. bei dem in Fig. 14 (Taf. 4) gegebenen, empfehlen, das Netz von Hülfslinien, welches man ſchon zur geometriſchen Conſtruction der den Fußboden bildenden Figuren brauchen würde, perſpectiviſch zu conſtruiren, indem man die Schnittpunkte dieſer Hülfslinien mit der Bildebene (Y) (Z) aus dem Grundriſſe wieder auf die Grundlinie der Conſtruction überträgt, von dieſen Punkten Linien nach den Verſchwindungspunkten y und z der beiden Hülfslinienſyſteme zieht und in dem ſo entſtandenen perſpectiviſchen Hülfslinienetz die dem Grundriſſe entſprechenden Punkte mit einander durch Linien verbindet.

Beiſpiel 5.

§. 166. **Aufgabe.** In Fig. 15 (Taf. 3) liegt der Aufriß eines **Monumentes** nebſt Maßſtab, in Fig. 16 der Grundriß deſſelben vor. In letzterem iſt die Bildebene als durch die Achſe A des Monumentes ſtehend, 21 Fuß von P entfernt der Geſichtspunkt O gegeben; die Höhe des Auges betrage 7 Fuß — es ſoll die Perſpective des Monumentes in doppeltem, d. h. in dem über der Conſtruction, Fig. 17, gegebenen Maßſtabe conſtruirt werden.

Da die Grundflächen der einzelnen Theile des Monumentes ſämmtlich Quadrate bilden, ſo möge jedes einzelne derſelben durch einen beſonderen Buchſtaben, wie dies im Aufriſſe, Fig. 15, angedeutet iſt, bezeichnet werden, ſeine vier Eckpunkte jedoch mögen, wie dies der Grundriß erläutert, durch die den Buchſtaben beigefügten Zahlen 1, 2, 3, 4 unterſchieden werden,

derart, daß die linke vordere Ecke des Quadrates B z. B. durch B^1, die rechte vordere Ecke durch B^2, die rechte hintere Ecke durch B^3, die linke hintere Ecke durch B^4 bezeichnet ist.

§. 167. **Ausführung.** Nachdem man in der Construction (Fig. 17, Taf. 3), den Horizont (y) (z), der Aufgabe gemäß 7 Fuß darunter die Grundlinie, und durch beide Linien die Verticale gezogen, den Hauptpunkt P und den Grundpunkt p bezeichnet, werden die Verschwindungspunkte y und z der hier vorkommenden beiden horizontalen Liniensysteme, des wie $B^1 B^4$ (Fig. 16) und des wie $B^1 B^2$ gerichteten, festgestellt und zwar, da der herabgeschlagene Gesichtspunkt in der Construction zu weit außerhalb des Constructionsraumes liegt, nach §. 111, durch Anwendung eines Bruchtheiles, hier etwa eines Drittels der Distanz. Da zufällig der (Grund-) Punkt p = 7 Fuß von P in der Verticale gelegen ist, so kann er gleich als $^1/_3$-Distanz angewendet werden, und wird deshalb an die Verticale in p der 38° große Abweichungswinkel der wie $B^1 B^4$ gerichteten Linien angetragen, der Horizont in $y/_3$ geschnitten, das Maß P $y/_3$ verdreifacht auf letzterem aufgetragen und dadurch der links außerhalb der Figur liegende Verschwindungspunkt y festgestellt. Ebenso wird der 52° große Abweichungswinkel der wie $B^1 B^2$ gerichteten Linien von der Verticale an diese in p angetragen, der Horizont in $z/_3$ geschnitten, das Maß P $z/_3$ auf dem letzteren aufgetragen und dadurch der Verschwindungspunkt z, welcher ebenfalls außerhalb der Figur fällt, bestimmt. Halbirt man alsdann den Winkel $y/_3$ p P durch die Linie p $t/_3$ und verdreifacht das Maß P $t/_3$, so ergiebt sich tz als Theilpunkt für die in z verschwindenden Linien; halbirt man den Winkel $y/_3$ p $z/_3$ durch die Linie p $dg/_3$ und verdreifacht das Maß P $dg/_3$ auf dem Horizonte, so ergiebt sich *dg* als Diagonalpunkt.

Da im Grundrisse die Bildebene durch die Achse des Monumentes stehend gegeben ist, so fällt in der Construction die Perspective a des Fußpunktes A der Achse in die Grundlinie, und zwar ist hier p a wegen der verlangten Verdoppelung des Maßstabes gleich 2 mal P A des Grundrisses. Zieht man nun $a a^1$ lothrecht und macht sie gleich 2 mal $A A^1$ des Aufrisses, so ist dies die Perspective der Achse.

Hinsichtlich des weiteren Verfahrens bei der Construction ist zuvor Folgendes anzuführen:

§. 168. Hat man, wie in der vorliegenden Aufgabe, die Perspective eines Objectes zu construiren, dessen obere Theile Formen enthalten, welche von denen der unteren Theile verschieden sind, oder fällt die Perspective eines Objectes dem Horizonte voraussichtlich so nahe,

daß die zur Conſtruction nöthigen Hülfslinien ſich wenig von der horizontalen Richtung unterſcheiden und daher ihre Schnittpunkte nicht ſicher erkennbar ſind, ſo iſt es vortheilhaft, lothrecht über oder unter der zu conſtruirenden Perſpective des Objectes zuvor die Perſpective des Grundriſſes deſſelben (den perſpectiviſchen Hülfsgrundriß) zu conſtruiren und die Punkte des letzteren unter Anwendung lothrechter Linien zur Conſtruction des perſpectiviſchen Aufriſſes, der eigentlichen Perſpective des Objectes, zu benutzen. Zur Conſtruction dieſes Hülfsgrundriſſes nimmt man eine beſondere Hülfsgrundebene an, deren Lage über dem Horizonte oder auch wohl unterhalb der eigentlichen Grundebene den Vortheil bietet, daß wegen der in ihr ſtärkeren Divergenz der Hülfslinien Schnittpunkte ſicherer zu erkennen ſind. Außerdem wird dabei die Perſpective des Objectes ſelbſt weniger durch Hülfslinien durchkreuzt.

Um Punkte des perſpectiviſchen Hülfsgrundriſſes als ſolche vorweg erkennbar zu machen, werden die ſie bezeichnenden Buchſtaben in der Folge mit einer Null, wie z. B. a^0 bezeichnet ſein, oder wie $a^{1\,0}$, wenn der Buchſtabe ſchon mit einer Zahl, wie a^1, verſehen wäre.

§. 169. Zur Conſtruction zurückkehrend denkt man ſich nun die Bildebene unterhalb bis zu einer circa $5\frac{1}{2}$ Fuß unter der eigentlichen Grundebene angenommenen Hülfs-Grundebene, in welcher $u^0\,w^0$ die (Hülfs-) Grundlinie ſein würde, und bis a^0 in dieſer die Achſe verlängert, und conſtruirt um a^0 die Perſpective des in Fig. 16 gegebenen geometriſchen Grundriſſes etwa folgendermaßen: Nachdem man im Grundriſſe durch den Achspunkt A eine der $B^1\,B^2$ parallele Linie $B^5\,B^6$ gezogen, zieht man durch den Punkt a^0 des perſpectiviſchen Grundriſſes eine nach z gerichtete Linie $b^{5\,0}\,b^{6\,0}$; man überträgt die Abſtände der Punkte B^5, D^5, F^5 u. ſ. w. (in welchen die Linie $B^5\,B^6$ die Grundrißquadrate der Stufen und der anderen Theile des Monumentes ſchneidet) von A verdoppelt von a^0 aus auf die Hülfs-Grundlinie $u^0\,w^0$ in $a^0\,\beta$, $a^0\,\delta$, $a^0\,\varphi$ u. ſ. w., und ſchneidet hier, von dem Theilpunkte tz durch β, δ, φ u. ſ. w. ziehend, die vorher gezogene Linie $b^{5\,0}\,b^{6\,0}$ in den Punkten $b^{5\,0}$ und $b^{6\,0}$, $d^{5\,0}$ und $d^{6\,0}$, $f^{5\,0}$ und $f^{6\,0}$ u. ſ. w., wodurch die Abſtände dieſer Punkte von a^0 den Abſtänden der entſprechenden Punkte des geometriſchen Grundriſſes von A perſpectiviſch gleich gemacht ſind. Zieht man hiernach von y durch die Punkte $b^{5\,0}$, $b^{6\,0}$, $d^{5\,0}$, $d^{6\,0}$, $f^{5\,0}$, $f^{6\,0}$ u. ſ. w. Linien und ſchneidet ſie durch eine von dem Diagonalpunkte *dg*

durch den Achspunkt a° gezogene Linie in $b^{1\circ}$ und $b^{3\circ}$, $d^{1\circ}$ und $d^{3\circ}$ u. ſ. w., ſo ſind dies Punkte, durch welche ſogleich die nach z gerichteten Linien $b^{1\circ}\,b^{2\circ}$, $b^{4\circ}\,b^{3\circ}$, $d^{1\circ}\,d^{2\circ}$, $d^{4\circ}\,d^{3\circ}$ u. ſ. w. zur Vervollſtändigung der Perſpectiven der Grundrißquadrate gezogen werden können. Auf gleiche Weiſe werden die Hülfsgrundriß-Perſpectiven aller anderen im geometriſchen Grundriſſe vorliegenden Quadrate und auch derer, welche die Kreuzesarme bilden, conſtruirt.

Um nach dieſer Vorbereitung die eigentliche Perſpective des Monumentes auszuführen, werden auf der Perſpective $a\,a^1$ der Achſe deſſelben die aus dem Aufriſſe (Fig. 15) entnehmbaren Höhenmaße der einzelnen Theile von a aus in a c, a d, a e u. ſ. w. bis zur Spitze a^1 verdoppelt aufgetragen, es werden durch ſämmtliche dadurch bezeichneten Punkte a, c, d, e u. ſ. w. Linien vom Diagonalpunkte *dg* aus gezogen, und dieſe durch lothrechte Linien, welche man durch die entſprechenden Punkte des Hülfsgrundriſſes legt, geſchnitten; alſo die von *dg* durch a und durch c gezogenen Diagonalen werden durch zwei durch die Punkte $b^{1\circ}$ und $b^{3\circ}$ gelegte Lothrechte in b^1 und c^1 und in b^3 und c^3 geſchnitten, die durch d und e gezogenen Diagonalen werden ferner durch zwei durch $d^{1\circ}$ und $d^{3\circ}$ gelegte Lothrechte in d^1 und e^1 und in d^3 und e^3 geſchnitten u. ſ. f. Zieht man hierauf von den Verſchwindungspunkten y und z Linien durch b^1, c^1, d^1, e^1 u. ſ. w. und durch b^3, c^3 u. ſ. w., ſo ergeben dieſe die Kanten $b^1\,b^4$, $b^3\,b^2$, $b^1\,b^2$, $b^3\,b^4$, $c^1\,c^4$, $c^3\,c^2$ u. ſ. w., wonach die lothrechten und die ſchiefen Kanten, wie $c^1\,d^1$ z. B., gezogen werden können. Die Richtigkeit der Kanten, wie $b^2\,c^2$ und $b^4\,c^4$, kann ſchließlich noch durch Lothe, durch $b^{2\circ}$ und $b^{4\circ}$ gelegt, controlirt werden. — Das Conſtruiren der Kreuzesarme, welche aus Würfeln beſtehen, wird durch die aus der Conſtruction erſichtliche Anwendung des Diagonalpunktes *dg* vereinfacht. Man conſtruirt zunächſt die Perſpective des dem Kreuzesſtamme angehörigen Quadrates T, welches mit den unteren Flächen der Würfel in gleicher Höhe liegt, verlängert die vier Seiten dieſer Perſpective und ſchneidet dieſe Verlängerungen durch entſprechend gezogene Diagonalen, oder auch durch Lothrechte, welche man durch die entſprechenden Punkte des Hülfsgrundriſſes zieht.

§. 170. Der Vortheil, welchen hier die Benutzung der Achſe des Objectes zur Auftragung der Höhenmaße bot, muß auch bei Aufgaben anderer Art ſtets ins Auge gefaßt werden, und zwar muß dieſes Auftragen, wenn nicht an irgendeiner lothrechten Kante des Objectes ſelbſt, welche in der Folge dann die Hauptkante heißen möge, doch an der Verlängerung einer ſolchen Kante, oder an einer

anderweitig im Objecte unter Rückſichtnahme auf den Maßſtab vortheilhaft auserſehenen lothrechten Linie geſchehen.

Beiſpiel 6.

Aufgabe. In Fig. 18 (Taf. 3) liegt abermals der Grundriß des in der vorhergehenden Aufgabe gegebenen **Monumentes** vor; die Stellung der Bildebene iſt, parallel zwei Seiten deſſelben, in der Linie PB^6 gegeben; O iſt die Projection des Geſichtspunktes bei abermals 21 Fuß Diſtanz; die Höhe des Auges betrage wieder 7 Fuß — es ſoll die Perſpective des Monumentes in doppeltem, d. i. in dem Maßſtabe der Fig. 17 conſtruirt werden. §. 171.

Ausführung. Nachdem in Fig. 19 Horizont, Grundlinie und Verticale gezogen und 21 Fuß von P rechts der Diſtanzpunkt D^1 (in die Figur nicht mit aufgenommen) bezeichnet worden, wird auf der Grundlinie die Perſpective a des Fußpunktes A der Achſe des Monumentes in einem 2 mal PA des Grundriſſes gleichen Abſtande von p aufgetragen, durch a die Perſpective aa^1 der Achſe lothrecht gezogen, und um dieſelbe ein lothrechter geometriſcher Durchſchnitt des Monumentes, wie derſelbe in der durch die Punkte ... $c^6\,b^6\,b^5\,c^5\,d^5\,e^5\,f^5$ u. ſ. w. theilweiſe bezeichneten Figur vorliegt, in dem dem Orte a zukömmlichen Maßſtabe gezeichnet. — Dem Grundriſſe nach iſt das wie B^1B^4 gerichtete Horizontallinien-Syſtem normal zur Bildebene, hat alſo P zum Verſchwindungspunkt; das andere Syſtem, wie B^1B^2 gerichtet, iſt parallel der Bildebene, deshalb in der Conſtruction parallel der Grundlinie, d. i. horizontal. Um nun die Perſpective des in der Grundebene liegenden Quadrates B zu conſtruiren, zieht man von P Linien durch b^5 und b^6, ſchneidet dieſelben durch eine von D^1 durch a gezogene Diagonale in b^3 und b^1 und zieht b^3b^4 und b^1b^2 horizontal. So auch wird die Perſpective des Quadrates C conſtruirt, indem man von P durch c^5 und c^6 gezogene Linien durch eine von D^1 durch c gezogene Diagonale in c^3 und c^1 ſchneidet und dann c^3c^4 und c^1c^2 horizontal zieht. Dieſes mit allen anderen horizontal liegenden Quadraten des Monumentes vorzunehmende Verfahren findet nur Schwierigkeit bei den ungefähr in der Höhe des Horizontes liegenden Quadraten, wie etwa Q und R, weil in ihren Perſpectiven die Schnittpunkte der Diagonalen mit den nach P gerichteten Linien wegen ihrer Nähe am Horizonte nicht ſicher erkennbar ſind, und bedarf es darum hier der theilweiſen Anwendung eines perſpectiviſchen Hülfsgrundriſſes. Nachdem man deshalb die Perſpective der Achſe bis zu Punkt a° in einer unterhalb der §. 172.

eigentlichen Grundebene beliebig angenommenen Hülfs-Grundebene verlängert hat, macht man hier $a^\circ q^{5\circ}$ und $a^\circ q^{6\circ}$ gleich $q q^5$ und $q q^6$, zieht von P Linien durch $q^{5\circ}$ und $q^{6\circ}$, ſchneidet dieſelben durch eine von D^1 durch a° gezogene Diagonale in $q^{3\circ}$ und $q^{1\circ}$, zieht $q^{3\circ} q^{4\circ}$ und $q^{1\circ}$ und $q^{2\circ}$ horizontal, und ſchneidet nach dieſer Vorbereitung die in der eigentlichen Perſpective von P durch q^5, q^6, r^5 und r^6 zu ziehenden Linien durch Lothrechte, welche man durch die Punkte $q^{1\circ}$, $q^{2\circ}$, $q^{3\circ}$ und $q^{4\circ}$ legt. — Die Perſpectiven der aus Würfeln beſtehenden Kreuzesarme findet man wie im vorhergehenden Beiſpiele, indem man zunächſt die Perſpective des dem Kreuzesſtamme angehörenden Quadrates T, welches mit den unteren Flächen der Kreuzesarme in derſelben Ebene liegt, conſtruirt, die vier Seiten dieſer Perſpective verlängert und die Verlängerungen durch entſprechend gezogene Diagonalen ſchneidet.

Beiſpiel 7.

§. 173. **Aufgabe.** In Fig. 21 (Taf. 2) ſind außer dem Horizonte PD^1, der Grundlinie pg°, der Verticale $P(O)$, dem Hauptpunkte P und dem Diſtanzpunkte D^1 die Stücke hh^1, aa^1 und gg^1 der Perſpectiven der drei ſichtbaren lothrechten Kanten eines in Fig. 20 im Grundriſſe in halbem Maßſtabe vorliegenden quadratiſchen **Pfeilers** HAGJ gegeben, deſſen Vorderfläche AG hier mit der Bildebene zuſammenfällt. Außerdem iſt an der bis f^1 verlängerten Kante aa^1 (Fig. 21) in der Figur $a^1 b^2 c^2 e^2 f^2 f^1$ das in der Ebene der Vorderfläche (in der Bildebene), im Grundriſſe alſo wie AF^2 liegende Profil des den Pfeiler ringsum **deckenden Geſimſes** gegeben — es ſoll die Perſpective des Geſimſes conſtruirt werden.

§. 174. **Ausführung.** Der hier an einer Kante des Objectes gegebene, mit der Bildebene zuſammenfallende Geſimsdurchſchnitt iſt in ähnlicher Weiſe zu verwenden, wie der in der vorhergehenden Aufgabe erſt neben der Achſe conſtruirte, und iſt es am förderlichſten, ihn ſofort zur Conſtruction der Perſpective der Gehrung über der Kante aa^1 zu benutzen. Die vier Gehrungen liegen hier offenbar in zwei lothrechten, zu einander rechtwinkligen Ebenen (Gehrungsebenen), welche die rechten Winkel, unter denen die lothrechten Pfeilerflächen an einander ſtoßen, halbiren, d. h. mit ihnen Winkel von 45° bilden, während ſie hier zugleich durch die Achſe X des Pfeilers gehen. Die Grenzlinien dieſer Gehrungsebenen würden deshalb lothrechte, durch die Diſtanzpunkte D und D^1 gehende Linien,

die Hauptpunkte darin aber, in welchen alle dieſen Ebenen angehörigen horizontalen Linien verſchwinden, müſſen D und D^1 ſelbſt ſein. Um alſo aus dem gegebenen Profile zuerſt Punkte der Gehrung über der Kante $a\,a^1$ zu conſtruiren, hat man, wegen der zur Bildebene normalen Richtung der Pfeilerfläche A H, zunächſt von P Linien durch die Punkte f^2, e^2, c^2 u. ſ. w. zu ziehen und dieſelben durch andere diagonal gerichtete Linien, von D^1 durch f^1, e^1, c^1 u. ſ. w. gezogen, in den Punkten f, e, c u. ſ. w. zu ſchneiden, wonach man durch letztere die ſogenannte Gehrungslinie zeichnen kann. Die zuletzt gezogenen Linien ſchneiden die Perſpective $x\varphi$ der Achſe des Pfeilers in den Punkten φ, ε, γ u. ſ. w.; zieht man durch dieſe Punkte Linien von dem andern Diſtanzpunkte D aus, ſo ſchneidet man damit die von f^2, e^2, c^2 u. ſ. w. nach P gezogenen Geſimskanten in den Punkten n, t, r u. ſ. w., und die von f, e, c u. ſ. w. horizontal zu ziehenden Kanten in m, s, q u. ſ. w., und kann nun durch die ſo beſtimmten Punkte auch die Gehrungslinien über den Kanten $h\,h^1$ und $g\,g^1$ des Pfeilers zeichnen. — Läge der zweite Diſtanzpunkt D zu entfernt, als daß man ihn benutzen könnte, ſo müßte man die in der verlängerten Kante $a\,a^1$ gegebenen Punkte f^1, e^1, c^1 u. ſ. w. vermittelſt horizontaler Linien auf die verlängerte Kante $g\,g^1$ in die Punkte f^4, e^4, c^4 u. ſ. w. übertragen, und würde dann durch dieſe Punkte und die ihnen entſprechenden φ, ε, γ u. ſ. w. der Achſe Linien zu ziehen haben und dadurch die vorhandenen horizontalen Geſimskanten ebenfalls in den Punkten n, t, r u. ſ. w. und in m, s, q u. ſ. w. ſchneiden.

Der der Conſtruction unterhalb beigefügte perſpectiviſche Hülfsgrundriß veranſchaulicht das Geſagte deutlicher und zeigt zugleich, auf welche andere Art man durch ihn zu Punkten wie n, t, r und m, s, q gelangen konnte.

Die ſtark verzerrte Perſpective der Gehrungslinie über der Kante $g\,g^1$ kann als ein Beleg zu der in §. 21 enthaltenen Regel dienen, daß man nicht, wie es in der Figur, um den Diſtanzpunkt D^1 in der Nähe und überhaupt ſtark divergirende Hülfslinien zu haben, geſchehen iſt, eine zur Größe des Objectes unverhältnißmäßig kleine Diſtanz annehmen ſoll.

Beiſpiel 8.

Aufgabe. In Fig. 23 (Taf. 2) [Horizont (y) (z), Grundlinie q p, Verticale P p, Hauptpunkt P, Theilpunkt tz, Diagonalpunkt *dg*] ſind wieder in den Linien $h\,h^1$, $a\,a^1$, $g\,g^1$ Stücke der Perſpectiven der drei ſichtbaren lothrechten Kanten eines in Fig. 22 im Grundriſſe in halbem Maßſtabe vorliegenden §. 175.

Pfeilers H A G J gegeben, durch deſſen Kante A (Hauptkante) hier die Bildebene ſteht. Außerdem iſt an der bis f^1 verlängerten Kante $a\,a^1$ (Fig. 23) in der Figur $a^1\,b^2\,c^2\,e^2\,f^2\,f^1$ das mit der Bildebene zuſammenfallende, im Grundriſſe alſo wie A F^2 liegende Profil des den Pfeiler **deckenden Geſimſes** gegeben; die Stellung der Bildebene und der Ort des Geſichtspunktes ſind aus dem Grundriſſe erſichtlich — es ſoll die Perſpective des Geſimſes conſtruirt werden.

§. 176. **Ausführung.** Die Aufgabe — welche ſich von der vorhergehenden nur dadurch unterſcheidet, daß 1) hier der Pfeiler nicht quadratiſchen, ſondern oblongen Horizontaldurchſchnittes iſt und daß 2) wegen der ſchiefen Stellung der Bildebene zu den Pfeilerflächen das gegebene Profil nicht wie vorher in der Ebene der vordern Pfeilerfläche liegt, oder auch nur dieſer parallel iſt — kann ähnlich der vorhergehenden auch ohne perſpectiviſchen Hülfsgrundriß gelöſt werden, wenn man zuvor das mit der Bildebene zuſammenfallend gegebene, im Grundriſſe wie A F^2 gerichtete Profil in die Ebene der vordern Pfeilerfläche G A, alſo in A F^3 überträgt, wie dies der der Conſtruction unterhalb beigefügte perſpectiviſche Hülfsgrundriß durch die Linie $a^\circ\,f^{3\circ}$ veranſchaulicht. Man hat zu dem Zwecke von dem außerhalb der Figur liegenden Verſchwindungspunkte z (der der Pfeilerfläche angehörigen horizontalen Linien) durch f^1, e^1 u. ſ. w. Linien zu ziehen und dieſe durch andere Linien, von dem Theilpunkte tz (für die in z verſchwindenden Linien) durch $f^2\,e^2$ u. ſ. w. gezogen, in f^3, e^3 u. ſ. w. zu ſchneiden, wonach $f^1\,f^3$ und $e^1\,e^3$ perſpectiviſch gleich $f^1\,f^2$ und $e^1\,e^2$, und das perſpectiviſche Profil $f^3\,e^3$ u. ſ. w. dem geometriſch gegebenen gleich gemacht iſt. Zieht man hiernach von dem außerhalb der Figur liegenden Verſchwindungspunkte y Linien durch f^3, e^3 u. ſ. w. und ſchneidet dieſelben durch Linien, von dem Diagonalpunkte *dg* (als dem Verſchwindungspunkte aller Horizontalen, welche den rechten Winkel der Pfeilerflächen an der Kante $a\,a^1$ halbiren) durch f^1, e^1 u. ſ. w. gezogen, in f und e, ſo ſind dies Punkte der Perſpective der Gehrungslinie an der Kante $a\,a^1$ des Pfeilers. — Während nun in der vorhergehenden Aufgabe, wegen der dort quadratiſchen Form des Pfeilers, die Gehrungsebenen ſich in der einen Achſe deſſelben ſchnitten und dieſe Achſe zur Conſtruction aller anderen Gehrungslinien verwendet werden konnte, ſchneidet ſich hier, wie der geometriſche Grundriß und der perſpectiviſche Hülfsgrundriß zeigen, die an ſich zu einander rechtwinkligen Gehrungsebenen in zwei verſchiedenen Achſen, die der Kanten A und G nämlich in einer durch Punkt X (reſp. x°), die Gehrungsebenen der Kanten H und J aber, in einer durch Punkt X^1 (reſp. $x^{1\circ}$) denkbaren lothrechten

Achſe. Um nun der vorhergehenden Conſtruction ähnlich zu verfahren, müßte man den ſehr entfernt-liegenden Verſchwindungspunkt dg^1 der horizontalen Linien ſuchen, welche normal zu den in dg verſchwindenden ſind; man müßte dann von dieſem Punkte Linien durch φ, ε u. ſ. w. (in welchen Punkten die von dg durch f^1, e^1 u. ſ. w. gezogenen Linien die Perſpective φx der Achſe X ſchneiden) ziehen und damit die von f, e u. ſ. w. nach z zu ziehenden horizontalen Geſimskanten in m, s u. ſ. w. ſchneiden, wonach dies Punkte der Gehrungslinie an der Kante g g^1 wären. Doch könnte man auch, um den entfernt liegenden Diagonalpunkt dg^1 entbehrlich zu machen, die in der verlängerten Kante a a^1 gegebenen Punkte f^1, e^1 u. ſ. w. vermittelſt durch ſie nach z zu ziehender Linien auf die verlängerte Kante g g^1 in die Punkte f^4, e^4 u. ſ. w. übertragen und nun, von φ, ε u. ſ. w. durch dieſe ziehend, die horizontalen Geſimskanten ebenfalls in den Punkten m, s u. ſ. w. ſchneiden. — So müßte man denn auch, um die Gehrungslinie an der Kante h h^1 zu finden, dem Vorigen entſprechend, in $\varphi^1 x^1$ die Perſpective der Achſe X^1 des geometriſchen Grundriſſes ($x^{1\circ}$ des perſpectiviſchen Hülfsgrundriſſes) darſtellen, auf ſie durch Linien, von y durch φ, ε u. ſ. w. gezogen, die letzteren Punkte in φ^1, ε u. ſ. w. übertragen; man müßte ferner die Punkte f^1, e^1 u. ſ. w. der Kante a a^1 durch nach y gezogene Linien in entſprechende Punkte der Kante h h^1 übertragen, und würde dann, durch dieſe Punkte von φ^1, ε^1 u. ſ. w. aus Linien (welche in dg^1 verſchwinden würden) ziehend, in n, t u. ſ. w. Punkte der Perſpective der Gehrungslinie der Kante h h^1 erzielen.

Ob nun das gezeigte Verfahren oder das mit Anwendung des perſpectiviſchen Hülfsgrundriſſes, deſſen Conſtruction ſelbſt hier wohl keiner Erläuterung bedarf, vorzuziehen iſt, hängt in anderen Fällen von der Beſchaffenheit des gegebenen Objectes ab; hier würde die Conſtruction der Gehrungen vermittelſt des perſpectiviſchen Hülfsgrundriſſes jedenfalls einfacher als die oben gezeigte ſein.

§. 177. Handelt es ſich um die Conſtruction der Perſpectiven von Gehrungslinien bei *einſpringendem Geſimswinkel*, ſo iſt dem Vorigen ähnlich unter Berückſichtigung der diagonalen Richtung der Gehrungsebenen zu verfahren. Stößt z. B., wie der Grundriß zeigt, der Pfeiler an eine mit ſeiner Vorderfläche A G parallele Wand K L, an welcher das Geſims fortläuft, ſo bildet dieſes über der Ecke K die Gehrungslinie K V mit einſpringendem Winkel und iſt die Ebene dieſer Gehrung parallel der Gehrungsebene der Kante A; d. h. die in ihr liegenden Horizontalen verſchwinden ebenfalls in dg. Iſt demnach die Perſpective k k^1 der Ecke K conſtruirt und oberhalb verlängert, ſo überträgt man auf ſie die Punkte f^1, e^1 u. ſ. w.

vermittelſt nach y zu ziehender Linien in die Punkte d u. ſ. w. und ſchneidet die in y verſchwindenden Geſimskanten durch Linien, von *dg* durch d u. ſ. w. gezogen, in v u. ſ. w., wonach vk^1 die Perſpective der Gehrungslinie VK iſt. Wie dieſelbe mit Anwendung des perſpectiviſchen Hülfsgrundriſſes zu conſtruiren wäre, ergiebt ſich aus Fig. 23 von ſelbſt.

Beiſpiel 9.

§. 178. **Aufgabe.** Es iſt in Fig. 24 (Taf. 4) der Grundriß einer **Freitreppe** von 3 Stufen, die je 7 Zoll Höhe und 10 Zoll Auftritt haben, gegeben. Die Linie (Y)(Z) giebt die Stellung der Bildebene, der Punkt O den Ort des Geſichtspunktes an — es ſoll bei einer Höhe des Auges von 6 Fuß die Perſpective der Freitreppe in dreifach größerem Maßſtabe, d. i. in dem über der Conſtruction, Fig. 25, vorliegenden conſtruirt werden.

§. 179. **Ausführung.** Die Bildebene iſt hier gleich als durch den Punkt, nämlich A, ſtehend gegeben worden, von welchem aus die Conſtruction am zweckmäßigſten anzufangen iſt. — Nachdem man den Horizont, 6 Fuß darunter die Grundlinie, und die Verticale gezogen, auf dem Horizonte die Verſchwindungspunkte y und z der um $48^1/_2°$ und $41^1/_2°$ von der Verticalebene abweichenden horizontalen Stufenkanten, außerdem die Theilpunkte *ty* und *tz* und den Diagonalpunkt *dg* feſtgeſtellt, conſtruirt man zuvörderſt auf der Grundlinie die Perſpective a des Punktes A, indem man pa gleich 3 mal PA des Grundriſſes macht. Durch a zieht man eine Linie nach y und macht darin unter Benutzung des Theilpunktes *ty* die Stücke ab, ag und gh perſpectiviſch gleich 3 mal AB, AG und GH, d. i. je 5 Fuß lang; man zieht ferner von z durch b, a, g und h, macht ea und ak vermittelſt des Theilpunktes *tz* perſpectiviſch gleich 3 mal EA und AK, d. i. je 4 Fuß lang, und zieht von y noch durch e und durch k. Es liegt dann in der Figur cbaefghi die Perſpective des Grundriſſes ohne die Stufen vor. Errichtet man darauf in allen Eckpunkten dieſer Figur lothrechte Linien, macht dann aa^1, a^1a^2 und a^2a^3 je gleich 7 Zoll (d. i. die gegebene Stufenhöhe), ſo kann man durch Linien, von y und von z durch a, a^1, a^2 und a^3 gezogen, die perſpectiviſchen Höhen der einzelnen Stufen an den Ecken bb^3, hh^3 und ee^3 beſtimmen, wonach auch cc^3, ii^3 und ff^3 ſich conſtruiren laſſen. — Um nun die Perſpectiven der Stufen ſelbſt zu finden, ſtellt man zuvor an der Lothrechten aa^3 in $a^3a^2l^2l^1m^1m$ das in der lothrechten Ebene bhh^3b^3 denkbare Stufenprofil perſpectiviſch dar, indem man al und lm vermittelſt des Theil-

punktes ty je 10 Zoll lang (d. i. die gegebene Breite des Auftrittes) macht und 11^2 und $m\,m^1$ lothrecht zieht; es ſind dann Linien, von z durch die Eckpunkte jenes Profiles gezogen, die Perſpectiven der horizontalen Kanten der Seite des Treppenvorſprunges. Schneidet man dieſe durch Linien, vom Diagonalpunkte *dg* durch a, a^1 und a^2 gezogen, ſo erhält man in a^2, n^2, n^1, q^1 und q die Punkte des einſpringenden Winkels der Stufen in der Ecke A; und zieht man ebenſo Linien von *dg* durch e, e^1 und e^2, ſo ergeben deren Schnittpunkte mit den horizontalen Stufenkanten die Perſpectiven der Stufenecken bei E. — Zieht man hierauf durch die ſo bei A und E erzielten Schnittpunkte Linien nach y, ſo ſind dieſe die Perſpectiven der nach y gerichteten horizontalen Stufenkanten, welche noch durch Linien, von *dg* durch b, b^1 und b^2 gezogen, zu ſchneiden ſind, um dadurch die Stufenecken bei B feſtzuſtellen. Linien, von hier aus nach z gezogen, und durch andere, von y durch c, c^1 und c^2 gezogen, geſchnitten, ergeben die Schnittfigur der Stufen mit der Wand. — Um nun die Perſpectiven der lothrechten Stufenkanten an den Ecken F und H conſtruiren zu können und dabei der Benutzung des ſehr entfernt liegenden zweiten Diagonalpunktes überhoben zu ſein, ſind auch hier, wie in der vorhergehenden Aufgabe, die Achſen X und X^4 (ſiehe den Grundriß) ins Auge zu faſſen, in welchen ſich die die Winkel bei B und E und bei H und F halbirenden Ebenen ſchneiden. Die Perſpectiven $x\,x^3$ und $x^4\,x^7$ derſelben findet man, wenn man a g zuvörderſt in r perſpectiviſch halbirt, dann von z durch r eine Linie zieht, dieſe durch Linien, von b und von e nach *dg* gezogen, in x^4 und x ſchneidet und endlich $x^4\,x^7$ und $x\,x^3$ lothrecht zieht. Theilt man dieſe Achſen je in 3 gleiche Theile und zieht von dieſen Theilungspunkten durch die entſprechend hoch gelegenen Theilungspunkte der Lothrechten $h\,h^3$ und $f\,f^3$ Linien, ſo ſchneiden dieſe die ſchon vorhandenen horizontalen Stufenkanten in ſolchen Punkten, durch welche man nunmehr die noch fehlenden Perſpectiven der lothrechten Kanten dieſer Ecken ziehen kann.

Ueberblickt man das hier eingeſchlagene Verfahren, ſo wird man finden, daß auch hier gewiſſermaßen mit der Conſtruction eines perſpectiviſchen Hülfsgrundriſſes, jedoch nicht auf einer beſondern Hülfs-Grundebene, ſondern auf der eigentlichen Grundebene ſelbſt und zudem unter Weglaſſung der Stufen vorgegangen worden. Hätte man auch dieſe in den perſpectiviſchen Grundriß aufgenommen, ſo würden die Perſpectiven der Stufengebrungen kaum umſtändlicher, jedenfalls aber nur deſto genauer erzielt worden ſein.

Beiſpiel 10.

§. 180. **Aufgabe.** In Fig. 26 (Taf. 5) liegt der Grundriß eines der **Potsdamer Thorgebäude** von Berlin vor; der Aufriß und die Höhenmaße ſind als bekannt vorausgeſetzt und hier aus der Conſtruction, Fig. 27, erkennbar — es ſoll die Perſpective des Gebäudes unter Weglaſſung alles Details und unter möglichſter Vereinfachung der Formen in dreifachem Maßſtabe des Grundriſſes, d. i. in dem unter Fig. 27 gegebenen, conſtruirt werden.

§. 181. **Ausführung.** Als Höhe des Auges (über der Grundebene, hier das Straßenpflaſter) erſcheint das Maß von 6 Fuß, die Augenhöhe eines großen Mannes, paſſend. Der Ort des Geſichtspunktes, und damit zugleich die Größe der Diſtanz (75 Fuß), wird feſtgeſtellt, wie dies in §. 25 (ſ. daſelbſt), wo gerade dieſes Beiſpiel ins Auge gefaßt iſt, gezeigt worden. Das dort eingeſchlagene Verfahren ergab zugleich in O G die Richtung der Hauptgeſichtslinie (d. i. die Richtung der Verticalebene) und dadurch die Richtung der Bildebene, inſofern dieſe normal zu jener ſein muß. Als Ort der Bildebene erſcheint der Ort der lothrechten vordern rechten Kante des Architraves, die, wenn man, um hier der Conſtruction krummer Linien auszuweichen, die doriſchen Säulen vorläufig als quadratiſche Pfeiler auffaßt, mit der vordern rechten Kante des äußerſten rechten Pfeilers ziemlich zuſammenfallen würde, am günſtigſten, da ſich hierauf, als Hauptkante (ſ. §. 170), die Höhenmaße aller Theile des Gebäudes bequem auf- und von hier durch Linien nach den Verſchwindungspunkten auf die betreffenden Theile des Gebäudes perſpectiviſch übertragen laſſen.

Nachdem man in der Conſtruction, Fig. 27, den Horizont gezogen, in ihm gleich weit von den Seitenrändern der Conſtructionsfläche den Hauptpunkt P bezeichnet und durch dieſen die Verticale gezogen, nachdem man ferner die Verſchwindungspunkte y (136½ Fuß links von P) und z (41 Fuß rechts von P) und dazu die Theilpunkte t_y und t_z (letzterer 44 Fuß links von P) und den Diagonalpunkt feſtgeſtellt, wird 6 Fuß unter dem Horizonte und in einer Entfernung von der Verticale gleich 3 mal P H die Perſpective h des Punktes H bezeichnet, in welchem die vorerwähnte Hauptkante auf der Grundebene, dem Straßenpflaſter, ſteht. Da hiernach die Perſpectiven der horizontalen Kanten der unteren Theile des Gebäudes dem Horizonte offenbar ſo nahe fallen müſſen, daß ſie von der horizontalen Richtung wenig verſchieden ſind und ihre Schnittpunkte deshalb nicht deutlich erkannt werden können, ſo wird zunächſt ein perſpectiviſcher Hülfs-

grundriß conſtruirt, zu deſſen Aufnahme man etwa 35 Fuß unterhalb der Grundebene eine Hülfs-Grundebene annimmt. Die Hauptkante wird demgemäß bis zum Punkte h°, d. i. ungefähr 35 Fuß unterhalb h, verlängert, und durch h° wird die Grundlinie jener Ebene gezogen.

Auf dieſer Hülfsgrundlinie trägt man nun von h° aus die Längen der einzelnen Theile beider ſichtbaren Seiten des Gebäudes geometriſch auf, und überträgt dieſelben vermittelſt der Theilpunkte perſpectiviſch auf von h° nach y zu ziehende Linien. Auf dieſe Weiſe werden z. B. auf der Linie h° y in h° n° und i° m° die Vorſprünge der unterſten Setzſtufen an den Seiten der Treppe, ferner die perſpectiviſchen Breiten der vorderen Pfeilerflächen, in q° ein Punkt der Ebene des Gitters, in s° der Halbirungspunkt der Breite der Façade u. ſ. w. feſtgeſtellt, ſo daß die Setzſtufen an der Seite, die Seitenflächen der Pfeiler, die die Richtung der Gitterpfeiler bezeichnende, und durch s° die den Grundriß des Gebäudes der Tiefe nach halbirende Linie gezogen werden können. Auf letztere können von der Hülfsgrundlinie aus auch die der Tiefe des Gebäudes angehörigen Maße vermittelſt des Theilpunktes tz perſpectiviſch übertragen werden. — Die Gehrungen der Stufen, ſowie die des Geſimſes werden vermittelſt des Diagonalpunktes und der Perſpectiven v^0, v^1, v^2 und v^3 der zuvor im geometriſchen Grundriſſe feſtzuſtellenden Achſen V, V^1, V^2 und V^3 conſtruirt. — Die lothrechten Kanten der Thür und der Fenſter unter der Halle werden gefunden, wenn man die Wand, welcher ſie angehören, bis in die Hülfsgrundlinie verlängert, vom Schnittpunkte w mit letzterer aus die entſprechenden Abſtände geometriſch aufträgt und vermittelſt des Theilpunktes ty perſpectiviſch in die Wand überträgt. So auch iſt die Mittellinie des Gitters bis in die Grundlinie zu verlängern und ſind auf gleiche Weiſe die perſpectiviſchen Orte der Gitterpfeiler und -Stangen feſtzuſtellen.

Nach dieſer Vorbereitung wird im perſpectiviſchen Aufriſſe die lothrechte Hauptkante gezogen. Es werden auf ihr von h aus die Höhen der 4 Stufen, des Pfeilerſchaftes, des Capitäles, des Architraves, des trennenden Gliedes, des Frieſes, der hängenden Platte und des bekrönenden Gliedes aufgetragen; durch die hierdurch bezeichneten Punkte werden Linien vom Diagonalpunkte aus gezogen und dieſe durch Lothe aus den entſprechenden Eckpunkten des Hülfsgrundriſſes in Punkten geſchnitten, durch welche nunmehr die Perſpective der Kante H in ihren Einzelheiten vollendet werden kann. — Zieht man von denſelben Schnittpunkten Linien nach y und z und ſchneidet dieſelben entſprechend durch Lothe aus den Punkten des Hülfsgrundriſſes, ſo findet man auch die Perſpectiven der meiſten anderen Kanten an dem Gebäude. — Auch die Höhen des Gitters, ſeines

Unterbaues, der Stangen und Pfeiler, werden zuerſt auf der Hauptkante aufgetragen und vermittelſt nach y gezogener Linien in das Gitter ſelbſt übertragen. — Die Höhe der Mauer hinter dem Gebäude wird ebenfalls zuerſt auf der Hauptkante aufgetragen, von hier durch eine Linie nach z auf die Kante B des Gebäudes, und von da wieder durch eine Linie nach y auf ein durch den entſprechenden Punkt des Hülfsgrundriſſes zu ziehendes Loth übertragen. So auch werden die Höhen der Thür und der Fenſter von der Hauptkante auf die Wand unter der Halle übertragen. — Um die Perſpective der Gehrung in der Spitze des Frontons zu conſtruiren, wird deſſen Höhe ſelbſt, ſowie die in der Gehrung ſelbſtverſtändlich ſich vergrößernde Breite der hängenden Platte und des bekrönenden Gliedes, zuerſt auf der Hauptkante aufgetragen und durch Linien nach y auf ein durch Punkt s^0 des Hülfsgrundriſſes gezogenes Loth in die Punkte 1, 2 und 3 übertragen. Zieht man dann durch dieſe Punkte Linien von z aus und ſchneidet ſie durch Lothe aus den entſprechenden Punkten des Hülfsgrundriſſes, welche hier in der Linie $v^0 v^3$ vorderhalb des Punktes s^0 liegen, ſo ergeben die Schnittpunkte die Gehrungslinie in der Spitze, und kann man hierauf die Perſpectiven der ſchiefen Frontonkanten ziehen. — Die hier angewandte einfache Art der Conſtruction der am Fronton aufſteigenden Linien iſt zu empfehlen, ſobald man nicht viele ſolcher ſchiefen Linien zu ziehen hat. Iſt deren Zahl aber eine größere, wie dies etwa bei der Darſtellung von Sparrwerken vorkommt, ſo iſt es, und wenn auch nur um die Genauigkeit zu controliren, rathſam, die Verſchwindungspunkte ſolcher Linien feſtzuſtellen, wie dies mit Bezug auf dieſes Beiſpiel in §. 289 bei den Conſtructionen ſchiefer Ebenen gezeigt werden wird.

Im geometriſchen Grundriſſe ſchneiden die Geſichtslinien OF und OE, welche nach der in §. 25 angeſtellten Ermittelung das Geſichtsfeld einſchließen, die Bildebene in den Punkten L und K, welche jeder etwa $24\frac{1}{2}$ Fuß von P entfernt ſind. Bezeichnet man nun in der Conſtruction im Horizonte die Punkte l und k ebenfalls $24\frac{1}{2}$ Fuß von P und zieht durch beide lothrechte Linien, ſo begrenzen dieſe die Darſtellung ſeitlich auf eine der Größe der Diſtanz angemeſſene Weiſe.

Beiſpiel 11.

§. 182. **Aufgabe.** In Fig. 28 (Taf. 6) liegt der Grundriß einer Kirche (der Johanniskirche in Moabit ohne Thurm und ſonſtige Umgebung) vor; der Aufriß und die Höhenmaße ſind als bekannt vorausgeſetzt und aus der Conſtruction, Fig. 29, erkennbar; der Ort des Geſichtspunktes O iſt (hier außerhalb

der Figur liegend) gegeben, die Höhe des Auges betrage 10 Fuß — es ſoll die Perſpective des Gebäudes unter Weglaſſung alles Details und unter möglichſter Vereinfachung der Formen conſtruirt werden.

Es möge dieſe Aufgabe benutzt werden, um das der Grundriß- §. 183. methode entſprechende, in vielen Beziehungen vortheilhafte Verfahren etwas ausführlicher darzulegen und zugleich zu zeigen, inwiefern durch Mitanwendung der Verſchwindungspunkt-Methode der in §. 161, Fig. 11, noch erforderlich geweſene geometriſche Aufriß des darzuſtellenden Objectes entbehrlich gemacht werden kann. Das darauf folgende zwölfte Beiſpiel wird dieſelbe Conſtructionsart ohne Anwendung von Verſchwindungs-, Theil- und Diagonalpunkten zeigen und zugleich eine Anleitung zu dem Verfahren geben, durch welches das Entſtehen des perſpectiviſchen Bildes in jeder beliebigen Größe im Voraus zu ſichern iſt.

Ausführung. Nimmt man als Hauptgeſichtslinie (Verticalebene) §. 184. die Linie (O) A und als Hauptkante die Kante K des Gebäudes an, ſo iſt eine durch Punkt K zu der (O) A normale Linie Y (Z) die Bildebene im Grundriſſe, und P O, die Diſtanz, beträgt alsdann 96 Fuß des dem Grundriſſe beigefügten Maßſtabes. Die Verſchwindungspunkte y und z, wovon der erſtere ſehr nahe liegt, und der Diagonalpunkt *dg* werden in der Conſtruction Fig. 29 (Taf. 6) vermittelſt der $^1/_6$-Diſtanz $O/_6$ gefunden.

In der Conſtruction wird zunächſt die Perſpective k des Punktes K = 10 Fuß unter dem Horizonte und gleich P K von der Verticale entfernt feſtgeſtellt und durch ſie die lothrechte Hauptkante gezogen. Hierauf werden von allen Punkten des Grundriſſes, welche eine dem Auge in O ſichtbare Kante des Gebäudes bezeichnen, gerade Linien (Geſichtslinien) nach O wenigſtens ſo weit, daß ſie die Bildebene Y (Z) ſchneiden, gezogen — zunächſt von ſolchen wie G und R, welche die Hauptformen des Gebäudes bezeichnen —, dann werden die Entfernungen dieſer Schnittpunkte von P, wie P γ und P ϱ, in die Conſtruction auf den Horizont in P γ und P ϱ übertragen und werden hier durch γ und ϱ lothrechte Linien gezogen, welche die einſtweilen ihrer Länge nach noch unbeſtimmten Perſpectiven der lothrechten Kanten G und R des Gebäudes ſind. So werden auch durch Uebertragung von Punkten wie ε und φ die Fenſter an der Seitenfaçade, durch Punkte wie σ und β die der Treppe angehörigen lothrechten Kanten, durch τ die lothrechte Halbirungslinie der Hauptfaçade, und ſo auch die

Säulen zwiſchen den Thüren und die Punkte der Gehrungen in den Geſimſen u. ſ. w. beſtimmt.*)

Iſt dies mit allen Punkten geſchehen, ſo werden, wie im vorhergehenden Beiſpiele, auf der Hauptkante von k aufwärts die Höhen der ihr angehörigen Theile, des Fuß- und des Hauptgeſimſes, aufgetragen; durch die ſie bezeichnenden Punkte werden Linien vom Diagonalpunkte *dg* aus gezogen und dieſe durch lothrechte Linien geſchnitten, welche durch die entſprechenden der vorher auf den Horizont übertragenen, die Geſimsgehrungen bezeichnenden Punkte gezogen werden. Nachdem ſo die Gehrungen beider Geſimſe an der Hauptkante entſtanden, werden von ihren Eckpunkten Linien nach y und z gezogen und deren perſpectiviſche Längen abermals durch Lothe, wie vorher, beſtimmt, was die Perſpectiven der horizontalen Geſimskanten und die Gehrungen an den Ecken G und R ergiebt. — Auf der Hauptkante werden ferner die Höhen der Thüren, und der Fenſter der Seitenfaçade aufgetragen und durch Linien nach z und nach y auf die entſprechenden Wände übertragen, während die perſpectiviſchen Breiten jener Objecte wieder durch Lothe, wie z. B. die durch ε und φ gelegten, beſtimmt werden. — Auch die Höhen der Stufen werden erſt auf der Hauptkante aufgetragen, durch Linien vom Diagonalpunkte in die lothrechte Gehrungskante des Fußgeſimſes, und von da durch Linien nach z in die Hauptfaçade übertragen. Sind dann dieſe Linien erſt durch Lothe, wie etwa σ s, entſprechend geſchnitten, ſodaß die Schnittfigur der Treppe mit dem Fußgeſimſe conſtruirt iſt, ſo werden durch ſämmtliche Eckpunkte dieſer Figur Linien von y aus, wie z. B. s c, gezogen und dieſe abermals durch Lothe, wie das durch Punkt c gehende, geſchnitten, was die Perſpective der Gehrung der Stufen bei C ergiebt. Linien, von den Eckpunkten dieſer Gehrung nach z gezogen und entſprechend durch Lothe, wie etwa β b, geſchnitten, ergeben endlich die Perſpective der Gehrung der Stufen bei B u. ſ. w. — Die Gehrung des Hauptgeſimſes in der Giebelſpitze wird conſtruirt, wie in dem vorhergehenden Beiſpiele. Die in der Gehrung größeren Breiten der einzelnen Glieder des Geſimſes werden

*) Das Ziehen der Geſichtslinien nach O und das Uebertragen ihrer Schnittpunkte mit der Bildebene Y (Z) wird am ſicherſten ausgeführt, wenn man, um auch Verwechſelungen zu vermeiden, für die Seitenfaçade, für die Hauptfaçade und für die Treppe je beſondere geradegeſchnittene Papierſtreifen an die Bildebene im Grundriſſe legt, vor allem P genau darauf markirt, dann die Geſichtslinien darüberzieht, ſie mit Buchſtaben oder Zahlen bezeichnet und, nachdem man die Streifen genau gegen den Horizont der Conſtruction gelegt, auf dieſen die fraglichen Punkte überträgt.

wieder auf der Hauptkante zwiſchen q und h auf- und von hier in die lothrechte Halbirungslinie r t der Hauptfaçade übertragen; durch die hierdurch bezeichneten Punkte werden Linien von y aus gezogen, und dieſelben durch Lothe, wie λ l u. ſ. w., geſchnitten.

Die Anleitung zur Conſtruction der Perſpectiven des runden Fenſters und der Bögen über den Thüren muß aus Kapitel 8, welches die Conſtruction krummer Linien behandelt, entnommen werden.

Beiſpiel 12.

Aufgabe. In Fig. 30 (Taf. 6) liegt der Grundriß einer Kirche vor; Aufriß und Höhenmaße ſind als bekannt vorausgeſetzt und aus der Conſtruction (Fig. 31) erkennbar. Im Punkte O, etwas unterhalb der Conſtruction gelegen, iſt der Ort des Geſichtspunktes, in der Linie O A die Richtung der Hauptgeſichtslinie (der Verticalebene) gegeben, die Höhe des Auges betrage 7 Fuß — es ſoll die Perſpective der Kirche conſtruirt werden. §. 185.

Als Hauptkante iſt hier wieder die Kante A, da ſie eine beiden Façaden zugleich angehörige Linie iſt, anzunehmen. Würde man nun durch A die Bildebene (T) (T) annehmen und auf ihr nach Anleitung der vorhergehenden Aufgabe die Conſtruction ausführen, ſo würde das perſpectiviſche Bild darauf eine geringe Breite, ungefähr wie ſie die Punkte i und l bezeichnen, bekommen, während es vielleicht erwünſcht wäre, daſſelbe in $1\frac{1}{2}$ mal größerer Breite, ungefähr wie ſie die Punkte ε und σ auf der Linie T T einſchließen, herzuſtellen. Um dies zu erreichen, hat man nur die 127 Fuß betragende Diſtanz (P) O des Geſichtspunktes von der Bildebene (T) (T) mit $1\frac{1}{2}$ zu multipliciren und der ſich hieraus ergebenden Diſtanz von $190\frac{1}{2}$ Fuß gemäß die Bildebene (T) (T) um $63\frac{1}{2}$ Fuß über (P) hinaus nach T T zu verlegen, wonach dann die äußerſten der wie in der vorhergehenden Aufgabe durch alle Eckpunkte des Grundriſſes zu ziehenden Geſichtslinien eine Bildbreite wie ε σ ergeben. §. 186.

Um außerdem der Anwendung der zum Theil ſehr entfernt fallenden Verſchwindungs- und anderen Hülfspunkte überhoben zu ſein, bedarf es auch hier nicht der Anwendung eines geometriſchen Aufriſſes des Objectes, wie in §. 161, Fig. 11; vielmehr ergeben ſich §. 187.

die Perſpectiven horizontaler Linien von ſelbſt, wenn man zuerſt die perſpectiviſchen Höhen ſämmtlicher lothrechten Linien, und zwar vermittelſt eines folgendermaßen neben der Conſtruction einzurichtenden perſpectiviſchen Höhenmaßſtabes beſtimmt:

Faßt man z. B. vorläufig nur die an ſich gleich langen lothrechten Kanten A, E und B der Kirche ins Auge, indem man einſtweilen von den Thürmen abſieht, und denkt ſich dieſelben unter Feſthaltung ihrer normalen Abſtände von der Bildebene T T in die Verticalebene, oder beſſer in eine mit dieſer parallele Ebene (a) $\varkappa$, alſo in (a), (e) und (b) verſetzt, und man hätte die Perſpectiven dieſer Ebene und der darin vorhandenen Kanten zu conſtruiren, ſo würden die perſpectiviſchen Längen (die Perſpectiven der Endpunkte) der letzteren vermittelſt nach dem Hauptpunkte gerichteter Linien abgeſchnitten werden müſſen, da die Ebene (a) $\varkappa$ normal zu der Bildebene T T iſt. Wenn man nun neben der Conſtruction die Perſpective der gedachten Ebene, oder wenigſtens der in ſie verſetzt gedachten Kanten wirklich conſtruirt, ſo ſind es hier die nach P gerichteten Linien $a^3 k^3$, $a^2 k^2$ u. ſ. w., welche den Maßſtab zur Beſtimmung der perſpectiviſchen Längen jener Kanten ergeben.

Der Fig. 30 nach fällt, wie die Geſichtslinien O (a) und O $\varkappa$ ergeben, die Perſpective der Ebene $\varkappa$ (a) in $\varkappa$ (a^1) der Bildebene T T, die perſpectiviſchen Projectionen der in Rede ſtehenden Kanten fallen aber in (a^1), (e^1) und (b^1). Ueberträgt man nun dieſe Projectionen unter Feſthaltung ihrer Abſtände von P auf den Horizont der Conſtruction (Fig. 31) in a^1, e^1 und b^1, und $\varkappa$ in k, und zieht hier durch dieſe Punkte lothrechte Linien, ſo iſt dem Vorhergehenden nach, wenn $a^2 a^3$ die in der Bildebene ſelbſt liegende Größe der Kante A iſt, durch von a^2 und a^3 nach P gezogene Linien in $a^2 k^2 k^3 a^3$ die Perſpective jener der verticalen parallel angenommenen Ebene conſtruirt. Durch dieſelben Linien ſind aber auch die verſchiedenen Längen $a^2 a^3$, $e^2 e^3$ und $b^2 b^3$ der Perſpectiven der Kanten A, E und B abgeſchnitten, ſo daß dieſelben unmittelbar in die Conſtruction in $a a^6$, $e e^6$ u. ſ. w. übertragen werden können.

§. 188. **Ausführung.** Wie in der vorhergehenden Aufgabe werden von O aus die Geſichtslinien durch alle Eckpunkte des Grundriſſes gegen die

Bildebene T T gezogen und ihre Schnittpunkte mit dieſer, wie z. B. α, ε und β, unter ſteter Berückſichtigung ihrer Abſtände von P in die Conſtruction in α, ε und β übertragen; durch dieſe Punkte gezogene lothrechte Linien ſind dann die Perſpectiven der gleichnamigen Kanten, deren perſpectiviſche Länge nun noch zu beſtimmen iſt. Macht man zu dieſem Behufe die durch a^1 lothrechte Maßſtabslinie unterhalb des Horizontes gleich $a^1 a^2$, d. i. $1^1/_2$ mal 7 Fuß (die gegebene Höhe des Auges) des dem Grundriß beigefügten Fußmaßſtabes, und $a^2 a^3$ gleich $1^1/_2$ mal der gegebenen Höhe der Kanten A, E und B, und zieht dann a^2 P und a^3 P, ſo ergeben dieſe in $a^2 a^3$ die perſpectiviſche Höhe der Kante A, und in $e^2 e^3$ und $b^2 b^3$ die der Kanten E und B bis zum Hauptgeſimſe. — In gleicher Weiſe werden der perſpectiviſche Ort und die perſpectiviſche Höhe jeder an dem Gebäude vorhandenen lothrechten Kante beſtimmt; der erſtere jedesmal durch eine Geſichtslinie gegen die Bildebene im Grundriſſe, die Höhe vermittelſt einer beſondern Höhenmaßſtabs-Linie.

Sind ſo die verſchiedenen perſpectiviſchen Höhen an ſich gleich hoher Kanten beſtimmt, ſo können die Perſpectiven der ſie verbindenden horizontalen Kanten leicht gezogen werden.

Bei dieſem Verfahren bieten ſich mancherlei Vortheile dar: Punkte der Perſpectiven der oberſten horizontalen Kanten des Hauptgeſimſes an der Haupt- oder Seitenfaçade kann man nämlich auch in den Perſpectiven m und n der jenen Kanten angehörigen Punkte M und N finden, weil dieſe mit A in gleichem normalen Abſtande von der Bildebene T T liegen und für ſie deshalb in der Conſtruction die Lothrechte durch a^1 ebenfalls die Maßſtabslinie iſt. Hat man daher zuvor vermittelſt der entſprechenden Geſichtslinien die Punkte μ und ν in der Conſtruction feſtgeſtellt, ſo ergiebt eine Horizontale, durch a^4 ($a^3 a^4$ iſt die geometriſche Breite des Hauptgeſimſes) gezogen, in m und n die Perſpectiven der Punkte M und N. — Die Perſpective des Gehrungspunktes F findet ſich von ſelbſt — allenfalls iſt ſie noch zu controliren durch die entſprechende Geſichtslinie — im Schnittpunkte f der oberſten Hauptgeſimskanten beider Façaden, nachdem man für dieſe Kanten außer den ſchon vorhandenen n und m noch zweite Punkte, wie u und q, folgendermaßen feſtgeſtellt: Um zur Conſtruction des Punktes u zugleich die Maßſtabslinie $b^1 b^4$ benutzen zu können, verlängert man F U bis S, in welchem Punkte ſie gleichen Abſtand von der Bildebene T T mit B hat, überträgt die Schnittpunkte der durch U und S zu ziehenden Geſichtslinien in die Conſtruction, giebt hier dem Punkte s eine $b^1 b^4$ gleiche Höhe über dem Horizonte, zieht von s durch n, und ſchneidet dadurch u und f als Gehrungspunkte des Haupt-

gesimses ab. — Um zur Construction von q zugleich die Maßstabslinie $e^1 e^4$ benutzen zu können, wird der mit E in gleichem Abstande von der Bildebene T T liegende Punkt R ins Auge gefaßt, der Schnittpunkt seiner Gesichtslinie mit der Bildebene in die Construction übertragen, r gleich $e^1 e^4$ hoch über dem Horizonte bestimmt, es wird von m durch r gezogen, und q in dieser Linie vermittelst der durch k Lothrechten abgeschnitten. — Wie im Grundrisse der Punkt V der Treppe mit dem in der verlängerten B A anzunehmenden Punkte X in gleichem Abstande von der Bildebene T T liegt, so ist auch in der Construction in der verlängerten b a der Ort des Punktes x vermittelst der dem Punkte X entsprechenden Gesichtslinie zu bestimmen, x v horizontal zu ziehen, und v darin wieder vermittelst der dem Punkte V entsprechenden Gesichtslinie zu bestimmen. — Um durch eine Linie v w den Vorsprung der untersten Setzstufen der Seitentreppen, und dieserhalb zunächst Punkt w bestimmen zu können, zieht man W Y parallel der Bildebene T T, construirt in dem in der Linie b a liegenden Punkte y die Perspective des in der Linie B A liegenden Punktes Y vermittelst einer Gesichtslinie, zieht y w horizontal, und bestimmt darin w abermals vermittelst einer Gesichtslinie durch W u. s. f.

§. 189. Wäre nicht eine Vergrößerung des perspectivischen Bildes beliebt worden, so hätte die perspectivische Projicirung der in die Ebene (a) α versetzten Kanten selbstverständlich nicht auf der Bildebene T T, sondern auf (T) (T) stattfinden müssen; und hätte das Bild verkleinert ausfallen sollen, so würde man die dieser Bestimmung entsprechende Bildebene dem Gesichtspunkte näher anzunehmen und die perspectivische Projicirung auf dieser auszuführen gehabt haben.

§. 190. Es versteht sich von selbst, daß man bei Anwendung der Verschwindungspunkt-Methode einfach durch Vergrößerung oder Verkleinerung des geometrischen Fußmaßstabes es in der Hand hat, das perspectivische Bild nach Belieben größer oder kleiner ausfallen zu lassen. Da es aber häufig vorkommt, daß diese Vergrößerung oder Verkleinerung in einem Verhältnisse stattfinden soll, welches sich nicht durch eine Zahl ohne Bruch ausdrücken läßt, wonach man den Maßstab verändern könnte, während man doch den Ausfall der Breite des perspectivischen Bildes gern vorher übersehen und in jedem Falle den Hauptpunkt von Anfang an in möglichst richtiger Entfernung von

den seitlichen Grenzen des Bildes hinsetzen möchte, so erweist sich, auch bei ausschließlicher Anwendung der genannten Methode, für die Ermittelung des einer Vergrößerung oder Verkleinerung entsprechenden Ortes der Bildebene und der damit zusammenhängenden Maßstabsgröße durch geometrische Construction die Anwendung des geometrischen Grundrisses von Neuem als vortheilhaft. Wäre z. B. in Fig. 32 (Taf. 6) der Grundriß der eben construirten Kirche, durch deren Ecke A, als Hauptkante, die Bildebene, und in O der Gesichtspunkt gegeben, und bezeichneten die Punkte 0, 10′, 20′ u. s. w. auf der Bildebene den Zehnfuß-Maßstab, so würde, wenn die Perspective des Gebäudes nebst seiner Umgebung bis zu den Punkten E und F construirt werden soll, das perspectivische Bild die Breite e f einnehmen. Käme es nun darauf an, daß dasselbe, um etwa als Pendant zu einem andern Bilde zu passen, nur die Breite B R bekomme, deren Verhältniß zu e f nur sehr umständlich durch einen Bruch zu bezeichnen wäre, so findet man den dieser kleineren Construction angemessenen Zehnfuß-Maßstab, wenn man zuvor in einer Nebenconstruction, Fig. 33 (Taf. 6) $\varepsilon\varphi$ (gleich e f) parallel $\beta\varrho$ (gleich B R) zieht, von ε durch β und von φ durch ϱ Linien bis zu ihrem Schnittpunkte x zieht, auf der Seite $\varepsilon\varphi$ des entstandenen Dreiecks $\varepsilon\pi$ gleich eP macht und, von P nach x ziehend, $\beta\varrho$ in π^1 schneidet, wodurch $\beta\varrho$ proportional $\varepsilon\varphi$ getheilt ist. Ueberträgt man dann $\pi^1\beta$ und $\pi^1\varrho$ in die Bildebene des Grundrisses in $P\beta^1$ und $P\varrho^1$, zieht hier β^1 b und ϱ^1 r parallel P O, außerdem b r, und schneidet diese durch Linien, von den Maßstabspunkten 0, 10′, 20′ u. s. w. nach O gezogen, so erhält man dadurch auf b r den der Breite B R des perspectivischen Bildes angemessenen Zehnfuß-Maßstab, und hat außerdem in b P^1 und r P^1 zugleich den Abstand, in welchem man in der nunmehr auszuführenden verkleinerten Construction den Hauptpunkt P von den seitlichen Grenzen des Bildes hinzusetzen hat.

Beispiel 13.

Aufgabe. In Fig. 34 (Taf. 4) ist in halbem Maßstabe der Grundriß eines zehnseitigen **Vogelhauses** angedeutet, dessen äußere Anordnung aus der Construction, Fig. 35, ersichtlich §. 191.

ist. Die durch die Achse M gehende Linie N Q bezeichnet die um 14° von dem Durchmesser F L abweichende Richtung der Bildebene, O den Ort des 46 Fuß von P entfernten Gesichtspunktes — es soll, bei einer Höhe des Auges von 11 Fuß, die Perspective des Vogelhauses in dem über der Construction gegebenen Maßstabe construirt werden.

§. 192. Wird in einer Aufgabe, wie in der vorliegenden, voraussichtlich die Anwendung vieler und zum Theil sehr entfernt fallender Verschwindungs- und Theilpunkte nothwendig, so ist in der Anwendung eines perspectivischen Höhenmaßstabes, wie er in der vorhergehenden Aufgabe benutzt worden, verbunden mit einem perspectivischen Hülfsgrundrisse, bei dessen Entstehen der Gebrauch der Verschwindungs- und Theilpunkte durch das in §. 141 gezeigte Verfahren ersetzt wird, ein Mittel zu finden, um die Construction auszuführen, ohne die Grenzen der Bildfläche zu weit zu überschreiten und ohne ganz auf die in Kap. 5 gezeigten Hülfsconstructionen angewiesen zu sein.

§. 193. **Ausführung.** Nachdem in der Construction, Fig. 35 (Taf. 4), Horizont und Verticale gezogen, auf letzterer in $O/_2$ die halbe, d.i. 23 Fuß große Distanz, welche hier genügen wird, bezeichnet worden, wird 11 Fuß unter dem Horizonte die Grundlinie gezogen und in ihr, indem man p m gleich 2 mal P M macht, im Punkte m die Perspective des Fußpunktes M der Achse des Käfigs bezeichnet, und darauf durch m die Perspective der Achse lothrecht gezogen. — Den perspectivischen Hülfsgrundriß zu construiren genügt es, wenige, etwa 4 Fuß unterhalb der Grundebene in der verlängerten Achse den Punkt m° als Fußpunkt anzunehmen. Nachdem man durch ihn die Hülfsgrundlinie n° q° gezogen und, um alle Maße geometrisch bei der Hand zu haben, um denselben Punkt einen geometrischen Grundriß des Gebäudes derart gezeichnet, daß dessen Durchmesser der Fig. 34 gemäß um 14° von der Richtung der Linie n° q° abweicht, wandelt man diesen Grundriß in einen perspectivischen um, indem man, um dabei zugleich der Anwendung der Verschwindungs- und der diesen entsprechenden Theilpunkte überhoben zu sein, nach den §§. 118 und 141 verfährt. Man behandelt demgemäß alle Punkte, wie dies hier mit den der Ecke E des Vogelhauses entsprechenden Punkten geschehen wird: man zieht nämlich von den Punkten E, E^6, E^5, E^4, E^3, E^2 und E^1 (von denen der erste die Ecke des Unterbaues, der zweite die des Daches, die drei folgenden die der drei Stufen, der vorletzte die des Sockels, der letzte die des Käfigs

ſelbſt bedeutet). Ordinaten gegen $n^\circ q^\circ$, zieht ferner durch die Schnittpunkte mit dieſer Linien von P aus, und macht dieſelben jenen Ordinaten perſpectiviſch gleich, indem man, z. B. von $O/_2$ durch den Halbirungspunkt der Ordinate $E\,u$ ziehend, $u\,e^\circ$ in e° ſchneidet, und darauf $e^\circ\,m^\circ$ zieht. Die Schnittpunkte e^6, e^5, e^4 u. ſ. w. ſind dann die Perſpectiven der Punkte E^6, E^5, E^4 u. ſ. w. Auf gleiche Weiſe werden auch die den anderen Ecken des Gebäudes angehörigen Punkte des perſpectiviſchen Hülfsgrundriſſes conſtruirt. — Lothrechte Linien, durch dieſe Punkte, hier beiſpielsweiſe durch e°, e^6, e^5 u. ſ. w. gezogen, ergeben die Perſpectiven der der Ecke E angehörigen lothrechten Kanten des Gebäudes, deren perſpectiviſche Höhen nun noch durch einen folgendermaßen einzurichtenden perſpectiviſchen Höhenmaßſtab zu beſtimmen ſind: Durch einen beliebigen Punkt n° der Hülfsgrundlinie $n^\circ q^\circ$ wird eine Lothrechte gezogen und $n^\circ\,\mu$ darin gleich $m^\circ\,m$ gemacht; von μ aus aufwärts werden die Höhen der einzelnen Theile des Gebäudes, des Unterbaues, der Stufen, des Käfigs und ſeines Sockels, des ſchrägen Daches u. ſ. w. aufgetragen, und durch ſämmtliche hierdurch bezeichneten Theilungspunkte und auch durch n° Linien von P aus, wie $P\,\varepsilon^\circ$, welche der Ebene des Hülfsgrundriſſes, und $P\,\varepsilon$, welche der eigentlichen Grundebene entſpricht, gezogen. Zieht man darauf — um hier wieder bei der Ecke E zu bleiben — horizontale Linien von allen Punkten e°, e^6, e^5 u. ſ. w. des Hülfsgrundriſſes gegen $P\,\varepsilon^\circ$ und errichtet in den Schnittpunkten mit dieſer wieder Lothe, ſo ſchneiden dieſe zwiſchen den in dieſem Maßſtabe nach P gerichteten Linien die perſpectiviſchen Höhen für die einzelnen der Ecke E angehörigen lothrechten Kanten des Gebäudes ab. So ergiebt $\varepsilon\,\varepsilon^1$ die perſpectiviſche Höhe der in e ſtehenden Kante des Unterbaues, $\varepsilon^6\,\varepsilon^6$ die Höhe der Dachecke u. ſ. w. Auf dieſelbe Weiſe wird mit ſämmtlichen lothrechten Kanten verfahren, wobei natürlich die nach P gerichteten Linien des Höhenmaßſtabes für ſämmtliche zehn Ecken benutzbar ſind. — Die Spitze der Pyramide, welche das Dach bildet, liegt im Punkte m 7 der Achſe.

Scheint dieſes Verfahren auch auf den erſten Blick umſtändlich, ſo finden ſich bei weiterem Eingehen doch manche daſſelbe ſehr vereinfachende Vortheile; namentlich wird man, nachdem man auf die angegebene Art erſt einige der vorderen lothrechten Kanten conſtruirt, andere dadurch leichter beſtimmen können, daß man zum Ziehen der Perſpectiven der horizontalen Kanten Verſchwindungspunkte wie v^a, v^f, v^l, v^a u. ſ. w. benutzt, welche ſich bei Verlängerung von Seiten, Durchmeſſern und Querlinien des perſpectiviſchen Zehnecks, wie $a^\circ\,l^\circ$, $b^\circ\,k^\circ$, $c^\circ\,i^\circ$, $e^\circ\,h^\circ$, $f^\circ\,g^\circ$ — $e^\circ\,f^\circ$, $c^\circ\,g^\circ$, $b^\circ\,h^\circ$ u. ſ. w. — $b^\circ\,l^\circ$, $f^\circ\,h^\circ$ u. ſ. w. — $b^\circ\,a^\circ$, $e^\circ\,k^\circ$ u. ſ. w. als in der Nähe liegend ergeben.

Es darf hiernach dieſe Conſtructionsart im Allgemeinen und insbeſondere in den Fällen, wo viele Verſchwindungs- und Theilpunkte außerhalb der Bildfläche fallen, wohl empfohlen werden, da ſie, wie die Figur zeigt, nur in geringem Maße ein Ueberſchreiten der Grenzen der Bildfläche erfordert, ja, wenn man es nicht ſcheut, dieſe mit vielen Hülfslinien zu durchziehen, ſogar ſtreng innerhalb ihrer Grenzen ausgeführt werden kann. Im Grunde iſt dieſes Verfahren nur eine weitere Ausführung des ſchon in den §§. 124 und 158 gezeigten.

Beiſpiel 14.

§. 194. **Aufgabe.** In Fig. 36 (Taf. 7) liegt in kleinem Maßſtabe der geometriſche Grundriß des **Gebäudes der Berliner Sternwarte** vor; Aufriß und Höhenmaße ſind als bekannt vorausgeſetzt und aus der Conſtruction, Fig. 37, erſichtlich. In der Linie PA iſt die durch die Hauptkante A geſtellte Bildebene, in O der Ort des Geſichtspunktes bei einer Diſtanz OP von 219 Fuß gegeben — es ſoll mit Uebergehung alles Details, bei einer Höhe des Auges von 7 Fuß, die Perſpective des Gebäudes nach dem unterhalb der Conſtruction vorliegenden Maßſtabe conſtruirt werden.

Es ſoll dieſe Aufgabe zugleich dazu benutzt werden, die Anwendung der in den §§. 115, 120, 138 und 141 erörterten Hülfsconſtructionen zu zeigen.

§. 195. **Ausführung.** Nachdem der Horizont gezogen, wird darin zunächſt der Punkt P beſtimmt. Damit dies der etwa gegebenen ſeitlichen Begrenzung der Bildfläche (in der Conſtruction bezeichnet durch die durch die Punkte r^1 und r des Horizontes gezogenen Lothrechten) ſogleich möglichſt genau entſprechend geſchehe, zieht man im Grundriſſe die Geſichtslinien OR^1 und OR nach den ſeitlich äußerſt ſichtbaren Punkten R^1 und R der mit darzuſtellenden Umgebung des Gebäudes, ſchneidet dabei die Bildebene in (R^1) und (R), und bezeichnet nun auf dem Horizonte den Punkt P ſo viel Fuß rechts von r^1, wie im Grundriſſe der Punkt P rechts von (R^1) liegt. Durch P wird die Verticale gezogen und in ihr, da unterhalb des Horizontes der Conſtructionsraum ſehr beſchränkt iſt, oberhalb des Horizontes ein Bruchtheil, etwa $^1/_6$ der 219 Fuß großen Diſtanz (d. i. $36^1/_2$ Fuß des Maßſtabes der Conſtruction), in $O/_6$ aufgetragen. — Hiernach wird zunächſt im Horizonte 83 Fuß (d. i. das Maß von PA) rechts von P der

Punkt a bestimmt, durch ihn die Perspective der Hauptkante lothrecht gezogen, in dieser 7 Fuß (d. i. die Höhe des Auges) unterhalb des Horizontes in a^1 ihr Fußpunkt auf der Grundebene bestimmt und, da bei dieser Construction wieder ein perspectivischer Hülfsgrundriß von großem Nutzen ist, möglichst weit oberhalb des Horizontes in der Verlängerung der Hauptkante, etwa in a°, der Ausgangspunkt für die Construction dieses Grundrisses angenommen und durch a° vorläufig die der Ebene desselben entsprechende Grundlinie horizontal gezogen. — Um hierauf durch denselben Punkt zunächst die Perspectiven der Hauptfaçade und der langen Seitenfaçade ziehen zu können, bedarf es, da ihre Verschwindungspunkte y und z zu entfernt liegen und doch sehr viele Linien nach diesen zu ziehen sind, der nach §. 138 auszuführenden Theilung der seitlichen Grenzen der Construction, nachdem man zuvor die Richtungen der Perspectiven zweier durch einen beliebigen, der Mitte der Bildfläche nahen Punkt α gehenden, jenen beiden Façaden parallel gedachten horizontalen Linien nach Anleitung des §. 120 folgendermaßen festgestellt hat: An die Verticale trägt man in $O/_6$ rechts den 37° großen Abweichungswinkel der Hauptfaçade von der Verticalebene und schneidet dadurch den Horizont in $z/_6$. Durch Halbirung dieses Winkels erhält man sogleich in $ty/_6 \ldots {}^1/_6$ des Abstandes des Theilpunktes der in y verschwindenden Linien von P, und, trägt man das Maß dieses Abstandes sechsfach auf dem Horizont auf, so erhält man nach §. 115 in ty den Theilpunkt selbst. Wollte man nun auch den 53° großen Abweichungswinkel der Seitenfaçade von der Verticalebene links von dieser in $O/_6$ antragen, wie es angemessen wäre, so würde sein angetragener Schenkel den Horizont außerhalb der Grenzen der Bildfläche schneiden, und muß man daher, um den hier zunächst vorliegenden Zweck zu erreichen, den genannten Winkel rechts an die Verticale antragen und den Horizont in $(y/_6)$ schneiden. Zieht man die Linie αP, theilt auf ihr in $\alpha/_6 \ldots {}^1/_6$ ab, zieht durch Punkt $\alpha/_6$ eine Horizontale und macht in dieser $\alpha/_6\,[z/_6]$ gleich $P\,z/_6$, und $\alpha/_6\,[y/_6]$ gleich $P\,(y/_6)$, so sind nach §. 120 von α durch $[z/_6]$ und durch $[y/_6]$ zu ziehende Linien nach den Verschwindungspunkten z und y gerichtet. — Diese beiden Linien genügen, um nach §. 138 eine Richtungsscala für andere nach z und nach y gerichteten Linien anfertigen zu können. Nachdem man nämlich die Linie $\alpha\,[y/_6]$ zu beiden Seiten bis in die Ränder der Bildfläche, d. h. bis zu den durch die Punkte r^1 und r des Horizontes lothrecht gezogenen Linien verlängert, theilt man die Abstände ihrer beiden Schnittpunkte mit dem Rande von dem Horizonte in gleichviele (in der Figur in 24) gleiche Theile, numerirt diese derart, daß die Nullpunkte

im Horizonte in r^1 und r liegen und trägt noch einige dieſer Theile unterhalb des Horizontes und auch oberhalb der Nummer 24 auf. Jede alsdann durch gleiche Nummern gezogene Linie iſt nach y gerichtet. Für die in z verſchwindenden Linien, deren Richtung, wie $\alpha\,[z/_6]$ zeigt, auffallender von der horizontalen abweicht, erſcheint es zweckmäßig, zur Scala zwei andere, näher bei einander liegende lothrechte Linien, etwa die durch die Punkte m^1 und m des Horizontes gezogenen, zu benutzen. Auf ihnen ſind ebenfalls die Abſtände ihrer Schnittpunkte 16 und 16 mit der $\alpha\,[z/_6]$ von dem Horizonte in gleichviele (in der Figur in 16) gleiche Theile zu theilen und dieſe Theilungen oberhalb der Nummer 16 und unterhalb des Horizontes fortzuſetzen, wonach dann, wie vorher, alle durch gleiche Nummern dieſes Maßſtabes gezogenen Linien nach z gerichtet ſind. — Der Theilpunkt t_y für die in y verſchwindenden Linien iſt ſchon weiter oben feſtgeſtellt worden. Da der Theilpunkt t_z für die in z verſchwindenden Linien außerhalb der Grenzen des Conſtructionsraumes fällt, ſo muß die perſpectiviſche Theilung der genannten Linien nach Anleitung des §. 141 geſchehen. Der Diagonalpunkt *dg*, welcher den Grenzen der Bildfläche noch zu nahe fällt, um nicht benutzt werden zu ſollen, wird gefunden, wenn man an den Parallelſtrahl $z/_6\,O/_6$ in $O/_6$ einen halben rechten Winkel legt, den Horizont in $dg/_6$ ſchneidet, und das Maß $P\,dg/_6$ verſechsfacht in $P\,dg$ auf dem Horizont aufträgt.

Nach dieſer Vorbereitung wird zur Conſtruction des perſpectiviſchen Hülfsgrundriſſes geſchritten, und zwar werden dabei nur die Theile des Gebäudes berückſichtigt, welche der Aufgabe nach ſichtbar ſind. Es werden dabei alle Horizontalmaße der Theile der langen Seitenfaçade zuvor auf der Hülfsgrundlinie $a^\circ\,l^\circ$ auf-, und von da vermittelſt des Theilpunktes t_y auf die Linie $a^\circ\,(y)$ übertragen. Die Gebrungen der Geſimſe werden mit Hülfe des Diagonalpunktes *dg* und gewiſſer entſprechend angenommenen Achspunkte, wie u°, v°, w°, conſtruirt. — Die perſpectiviſche Uebertragung der Horizontalmaße der einzelnen Theile der Hauptfaçade auf die Linie $a^\circ\,(z)$ geſchieht, wie geſagt, nach §. 141, indem man nämlich den 53° großen Abweichungswinkel der Hauptfaçade von der Bildebene an die Hülfsgrundlinie in a° anträgt, jene Maße von a° aus auf den angetragenen Schenkel $a^\circ\,x$ aufträgt, von den hierdurch beſtimmten Theilungspunkten Ordinaten gegen die Hülfsgrundlinie zieht und, von den Schnittpunkten derſelben mit dieſer nach P ziehend, die Linie $a^\circ\,k^\circ$ ſchneidet. — Die Conſtruction der Kuppel muß einſtweilen außer Betracht bleiben.

Iſt der perſpectiviſche Hülfsgrundriß vollendet, ſo wird die Conſtruction des perſpectiviſchen Aufriſſes von der Hauptkante a aus begonnen.

Auf dieſer werden von a^1 aus die Höhen des Fußgeſimſes, der Fenſter, des Frontons u. ſ. w. aufgetragen; es werden durch die ſo bezeichneten Höhenpunkte je nach Erfordern nach y und nach z gerichtete Linien gezogen und dieſe entſprechend durch Lothe aus dem Hülfsgrundriſſe geſchnitten. Die Höhe der Kuppel und ihrer einzelnen Theile würde ebenfalls von der Hauptkante aus auf eine durch Punkt q (in der Mitte der Hauptfaçade) lothrechte Linie und von hier in die Achſe der Kuppel übertragen werden müſſen. Die perſpectiviſche Höhe der Vorderfläche DE des ſeitlichen und die des hintern Ausbaues werden desgleichen durch Uebertragung ihrer Höhen von der Hauptkante aus auf die lothrechten Linien, welche durch die vermittelſt des Hülfsgrundriſſes beſtimmten Punkte n und o gehen, feſtgeſtellt, u. ſ. w.

Beiſpiel 15.

Aufgabe. In Fig. 38 (Taf. 5) liegen Grund- und Aufriß eines **umgeſtürzten**, auf dreien ſeiner Ecken, R, U und H ruhenden, aus acht Würfeln zuſammengeſetzten **Doppelkreuzes** vor — es ſoll die Perſpective deſſelben in dem Maßſtabe der gegebenen Projectionen conſtruirt werden und dazu P in Fig. 39 der Hauptpunkt, PD^1 die Diſtanz, $\varphi\beta$ die Grundlinie und die Punkte r und u in dieſer die Perſpectiven der zwei Stützpunkte R und U des Kreuzes ſein. §. 196.

Die Aufgabe hat den Zweck, zu zeigen, inwiefern die bis hierher gegebenen Regeln ausreichen, um auch die Perſpectiven ſolcher Objecte conſtruiren zu können, deren Flächen und Kanten ſchief ſtehen. Dem Abſchnitte über die Conſtruction ſchiefer Linien und Ebenen iſt es dabei freilich vorbehalten, nachzuweiſen, auf welche Weiſe derartige Conſtructionen ſicherer und weniger umſtändlich auszuführen ſind.

Ausführung. Aus dem Grundriſſe iſt der geometriſche Abſtand eines jeden einzelnen Punktes des Objectes von der Bildebene, die hier als durch die Punkte R und U ſtehend angenommen iſt, und aus dem Aufriſſe die geometriſche Höhe jedes Punktes über der Grundebene entnehmbar. Da in den längeren Kanten des Kreuzes ſtets mehrere zu conſtruirenden Punkte zugleich liegen, erſcheint es vortheilhaft, von jenen immer zuerſt die Endpunkte zu conſtruiren, und die zwiſchen dieſen liegenden Punkte alsdann durch entſprechende Lothe von der Grundebene aus zu beſtimmen. So enthält z. B. die Kante RB zugleich den zu conſtruirenden §. 197.

Punkt A. Sie ſelbſt liegt, dem Grundriſſe nach, in einer von der Verticalebene um 60° abweichenden lothrechten Ebene. Beſtimmt man nun erſt den Verſchwindungspunkt z für alle dieſer Ebene angehörigen Horizontalen und zieht dann r (z) längs der Grundebene nach z, ſo müſſen die Perſpectiven gewiſſer Punkte der Linie R B durch Lothe aus den entſprechenden Punkten der horizontalen Linie r (z) zu ermitteln ſein. Trägt man deshalb zuvor die im Grundriſſe vorliegenden Maße R A und R B auf der Grundlinie in r α und r β geometriſch auf und überträgt dieſelben vermittelſt des Theilpunktes tz perſpectiviſch auf die Linie r (z) in r α^1 und r β^1, errichtet in r, α^1 und β^1 Lothe, macht das erſtere r β^2 geometriſch gleich B^1 B des Aufriſſes, ſchneidet das letztere durch eine von β^2 nach z gezogene Linie in b und zieht r b, ſo iſt dieſe zunächſt die Perſpective von R B, und ein im Punkte α^1 errichtetes Loth ſchneidet ſie in der Perſpective a des Punktes A. — Ebenſo iſt die Perſpective u v der Kante U V zu finden. Auch dieſe liegt in einer lothrechten Ebene, deren horizontale Schnittlinie u (y) mit der Grundebene, ſo wie r (z), von der Verticalebene um 60° abweicht. Nachdem man deshalb wieder den Verſchwindungspunkt y der dieſer lothrechten Ebene angehörigen Horizontalen, alſo auch jener Schnittlinie, und dazu den Theilpunkt ty geſucht, zieht man u (y), macht u v^1 perſpectiviſch gleich u φ (gleich (U) V des Grundriſſes), errichtet in u und in v^1 Lothe, macht erſteres u d — Punkt V liegt dem Aufriſſe nach mit D und G in gleicher Höhe, D dabei dem Auf- und Grundriſſe nach lothrecht über U, wie G lothrecht über R liegt, weshalb auch die Perſpectiven d und g lothrecht über u und r liegen müſſen — geometriſch gleich U D des Aufriſſes, und ſchneidet letzteres Loth durch eine von d nach y gezogene Linie in v. Es iſt alsdann u v die Perſpective von U V, während der Punkt a derſelben Kante ſchon conſtruirt vorliegt. — Die Kante H J nebſt den in ihr liegenden Punkten A und C liegt dem Grund- und Aufriſſe nach in einer der Verticalebene parallelen Ebene, deren horizontale Linien demnach in P verſchwinden. Von dieſer Kante iſt zunächſt Punkt h in einer der Grundebene angehörigen von α^1 nach P zu ziehenden Linie vermittelſt des Diſtanzpunktes D^1 zu conſtruiren; es iſt dann von h durch die ſchon vorhandene Perſpective a des Punktes A zu ziehen und die Lage der Punkte c und i darin durch Lothe zu beſtimmen, wie dies vorher mit den Punkten b und v geſchehen iſt. — Da die Punkte c, d und g ſchon vorhanden ſind, ſo können die Perſpectiven der durch C und D, und durch C und G gehenden Kanten gezogen und die ferner in dieſen liegenden Punkte q und f, und p^1 und w wieder durch Lothe aus der Grundebene beſtimmt werden u. ſ. w. — Daß hier die Kante f c durch den Theilpunkt ty geht, iſt eine Zufälligkeit.

Die Umständlichkeit dieſes Verfahrens ſpringt zu deutlich in die Augen, als daß man nicht das Bedürfniß erkennen ſollte, für die dreierlei Richtungen von ſchiefen Linien, welche in dem Objecte vorkommen, nämlich R B, U V und J H, Verſchwindungspunkte wie z^1, y^1 und x zu benutzen, wie dies bei den Conſtructionen horizontaler Linien geſchieht. Es ſoll deshalb in dem die Conſtructionen ſchiefer Linien und Ebenen behandelnden Abſchnitte die Conſtruction ſolcher Verſchwindungspunkte gezeigt und auch dieſes Beiſpiels beſonders gedacht werden (ſ. §. 312).

Siebentes Kapitel.

Nachträgliche Ermittelung der zur Conſtruction erforderlichen Hülfspunkte u. dgl. aus dieſer ſelbſt.

§. 198. In den Fällen, in welchen man genöthigt iſt, die zum perſpectiviſchen Conſtruiren nöthigen Stücke: den Horizont, den Hauptpunkt, die Diſtanz, die Verſchwindungspunkte u. ſ. w. aus der vollendeten Darſtellung nachträglich zu ermitteln — wie z. B., wenn es darauf ankommt, die Perſpective einer nach der Natur angefertigten Zeichnung durch Conſtruction zu berichtigen, oder Aenderungen in vollendeten Bildern vorzunehmen, nachdem man die Hülfslinien ſchon beſeitigt hat, oder während des Conſtruirens verlorene Conſtructionspunkte wiederzufinden — ſtehen folgende Hülfsmittel zu Gebote:

§. 199. In bildlichen Darſtellungen bezeichnet die Grenze zwiſchen Himmel und Ebene oder Meer ſelbſt den Horizont. Iſt dieſer durch Berge oder Bäume u. dgl. verdeckt, ſo iſt man darauf angewieſen, aus den Linien des Terrains oder aus der perſpectiviſchen Größe von Objecten, deren Größe zufällig bekannt iſt und die ſich auf einer und derſelben horizontalen Ebene befinden, auf den perſpectiviſchen Ort des Horizontes zu ſchließen. Finden ſich jedoch Gebäude in der Darſtellung, ſo hat man nur zwei der daran als horizontal und

einander parallel erkennbaren Linien, wie in Fig. 57 etwa die Linien a b und c d, oder a b und e f, bis zu ihrem Schnitt- oder Verſchwindungspunkte y zu verlängern, um dann durch dieſen den Horizont ziehen zu können.

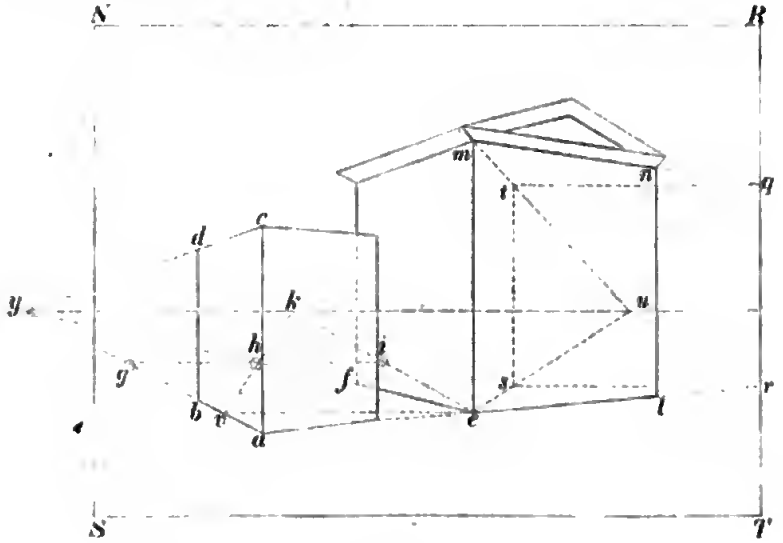

Fig. 57.

Fällt hierbei der Schnittpunkt der ins Auge gefaßten beiden Linien a b und e f außerhalb der durch die Linie N S bezeichneten Bildgrenze, ſo verfährt man umgekehrt wie in §. 126. Man zieht nämlich e v horizontal, an einer beliebigen andern Stelle g h ebenfalls horizontal durch die beiden Linien, verlängert g h über h hinaus und macht in ihr h i geometriſch gleich g h, wonach eine von v durch h und eine von e durch i gezogene Linie ſich in einem im Horizonte gelegenen Punkte k ſchneiden müſſen.

§. 200. Ständen zur Ermittelung des Horizontes nur die beiden als horizontal und parallel erkennbaren Linien e l und m n zu Gebote, deren Schnitt- und Verſchwindungspunkt jedoch ebenfalls außerhalb der durch die Linie R T bezeichneten Bildgrenze fiele, ſo verfährt man umgekehrt wie in §. 124. Man verlängert die beiden Linien bis zu den in der Bildgrenze liegenden Punkten r und q, zieht durch dieſe horizontale Linien, zieht ferner e u beliebig, legt durch ihren Schnittpunkt s eine Lothrechte s t, und zieht dann von m durch t eine Linie. Der Schnittpunkt u derſelben mit der Linie e u iſt dann ein Punkt des Horizontes.

Sind von zwei neben einander liegenden Strecken b a und a c (Fig. 58) der Perspective b c einer als horizontal bekannten, der Bildebene nicht parallelen Linie B C deren geometrische Längen zufällig, z. B. als gleich b α und α γ, bekannt, so findet man, wenn §. 201.

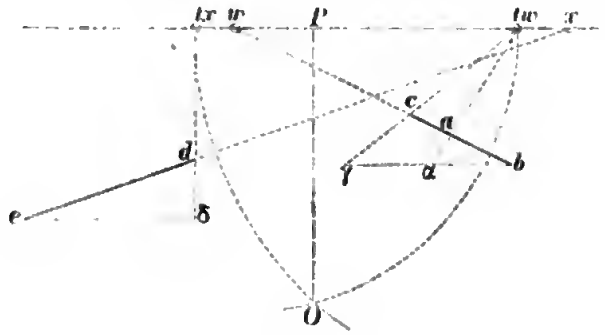

Fig. 58.

man auf eine durch b gezogene Horizontale von b aus die bekannten Längen b α und α γ neben einander geometrisch aufträgt und Linien von α durch a, und von γ durch c bis zu ihrem Schnittpunkte tw zieht, in einer durch diesen gezogenen Horizontalen den Horizont; denn tw ist den gegebenen Umständen nach der Theilpunkt für b c.

Ist der perspectivische Ort des Horizontes außer Zweifel, so §. 202. kann man aus der perspectivischen Größe etwa vorhandener Objecte von bekannter Größe, etwa menschlicher Figuren, nachdem man durch sie das Fußmaß für den Ort ihres Standpunktes festgestellt hat, berechnen, wie viel Fuß der Horizont über oder unter ihrem Standpunkte liege; indem man nämlich ermittelt, wieviel mal die vorliegende perspectivische Größe des Objectes in dem normalen Abstande seines Fußpunktes von dem Horizonte enthalten ist, und dann mit der gefundenen Zahl ihre bekannte Größe multiplicirt. (S. §. 363.) Hierdurch ist der Fußmaßstab und zugleich das Maß der Höhe des Auges leicht zu ermitteln, besonders wenn man dabei beachtet, daß in den Perspectiven von lothrechten Linien, welche auf einer und derselben horizontalen Ebene stehen, die Strecken von ihren Fußpunkten bis zum Horizonte stets einander geometrisch gleichen Längen entsprechen.

§. 203. Sind die Perſpectiven a c und b d (Fig. 59) horizontaler Linien mit der Grundlinie der Bildebene parallel, ſo ſind nach §. 54 die Perſpectiven a e und b f der als zu jenen rechtwinklig erkennbaren Horizontalen nach dem Hauptpunkte P gerichtet und iſt dieſer durch Verlängerung der letzteren beſtimmbar.

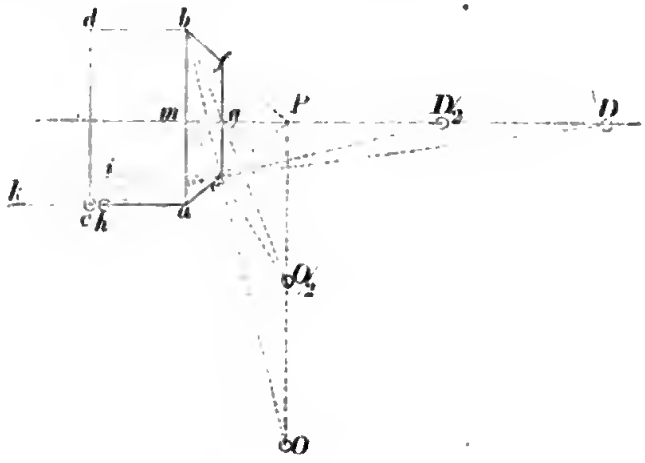

Fig. 59.

§. 204. Liegt die Perſpective a e i k (Fig. 59) eines horizontal liegenden, oder die Perſpective a e f b eines lothrecht ſtehenden, zur Bildebene normalen Quadrates vor, oder gelingt es durch Combination derartige Quadrate zu bilden, ſo ergiebt eine Quadrat-Diagonale k e in ihrem Schnittpunkte D mit dem Horizonte einen Diſtanzpunkt (die Diſtanz); ebenſo eine Diagonale b e in ihrem Schnittpunkte O mit der Verticale den herabgeſchlagenen Geſichtspunkt (die Diſtanz). Zieht man von dem Halbirungspunkte h der Quadratſeite a k durch e eine Linie, ſo ergiebt ihr Schnittpunkt $D/_2$ mit dem Horizonte die halbe Diſtanz, ſo wie eine von dem Halbirungspunkte m der Quadratſeite a b durch e, oder eine von b durch den Halbirungspunkt g der Quadratſeite e f gezogene Linie in ihrem Schnittpunkte $O/_2$ mit der Verticale auf dieſer die halbe Diſtanz ergiebt.

§. 205. Liegt nur die Perſpective a e (Fig. 59) einer Linie vor, deren Richtung als zur Bildebene normal, und deren Länge als geometriſch etwa gleich a k bekannt iſt, ſo ergiebt die Verlängerung der Linie bis zum Horizonte hierin zunächſt den Hauptpunkt;

legt man darauf durch a eine Horizontale von der bekannten Länge a k, so ſchneidet eine von k durch e bis zum Horizonte gezogene Linie dieſen im Diſtanzpunkte.

Liegt die Perſpective eines horizontal liegenden rechten Winkels §. 206.
c a b (Fig. 60), deſſen Schenkel ſchief zur Bildebene ſind, vor, und iſt der Hauptpunkt des Bildes aus anderen Umſtänden bekannt,

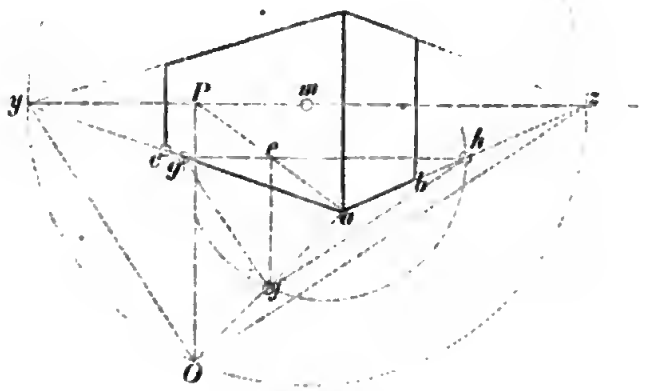

Fig. 60.

ſo findet man den herabgeſchlagenen Geſichtspunkt, die Diſtanz, wenn man das Stück des Horizontes zwiſchen den beiden Verſchwindungspunkten y und z der Winkelſchenkel als Durchmeſſer eines Kreiſes anſieht, dieſen, nachdem man in m ſeinen Mittelpunkt feſtgeſtellt hat, mit dem Radius m y ſchlägt, und durch den Hauptpunkt eine zum Horizonte normale Linie P O zieht. Es iſt dieſe dann ſelbſtverſtändlich die Verticale, und ihr Schnittpunkt O mit der Peripherie des Kreiſes der herabgeſchlagene Geſichtspunkt (die Diſtanz). Zieht man nämlich O y und O z, welche mit einander einen rechten Winkel bilden, da ſie einen Peripheriewinkel über einem Durchmeſſer (y z) bilden, ſo hat man in ihnen die Parallelſtrahlen zu den Winkelſchenkeln a c und a b vor ſich.

Liegen hierbei die Verſchwindungspunkte y und z außerhalb des §. 207.
Bildes, ſo zieht man a P, theilt darauf einen Bruchtheil, in e z. B. die Hälfte ab, und ſchneidet durch eine durch e gezogene Horizontale die Winkelſchenkel in g und h, wonach g h gleich der Hälfte von y z iſt (§. 120); man ſchlägt ferner um g h, dieſe Linie als Durchmeſſer

angeſehen, einen Kreis, und errichtet auf ihr in e eine Normale, welche den Kreis in f ſchneidet. e f iſt alsdann die halbe Diſtanz. Denn da a e die Hälfte von a P iſt, ſo muß in dem wegen Parallelität der Seiten dem Dreieck a P O ähnlichen Dreieck a e f auch die Seite e f die Hälfte von P O ſein. Der herabgeſchlagene Geſichtspunkt ſelbſt iſt hiernach in dem Punkte zu finden, in welchem eine von a durch f gezogene Linie die Verticale ſchneidet.

§. 208. Der Hauptpunkt und die Diſtanz ſind in Darſtellungen, in welchen die Perſpectiven horizontal liegender rechter Winkel vorliegen, deren Schenkel ſchief zur Bildebene und von unbekannter Länge (ſ. §. 213) ſind, durch Conſtruction nur aufzufinden, wenn

1) jene rechten Winkel Quadraten angehören, ſo daß man durch dieſe zugleich den Diagonalpunkt; oder wenn man dieſen doch aus anderen Umſtänden beſtimmen kann; oder wenn

2) wenigſtens zweierlei horizontal, aber verſchieden liegende rechte Winkel vorliegen.

§. 209. Iſt, was den erſten Fall betrifft, etwa durch Verlängerung einer Quadrat-Diagonale, allenfalls durch eine durch die Gehrung einer rechtwinkligen Ecke hindurchgezogene Linie, der Diagonalpunkt *dg* (Fig. 61) beſtimmt, ſo hat man zunächſt die Verſchwindungspunkte y und z der Schenkel a d und a b des vorliegenden rechten Winkels feſtzuſtellen, um das zwiſchen ihnen liegende Stück des Horizontes, dieſes als Durchmeſſer angeſehen, einen Kreis zu ſchlagen, deſſen obere Hälfte durch den lothrechten Radius m r in zwei gleiche Bogen y r und z r zu theilen, und dann, von r durch den Diagonalpunkt ziehend, die Peripherie im Punkte O zu ſchneiden. Dieſer iſt alsdann der herab-

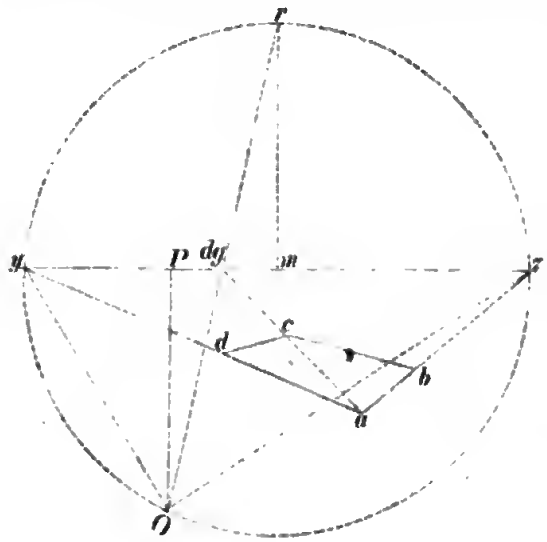

Fig. 61.

geſchlagene Geſichtspunkt; eine von ihm auf den Horizont gefällte Normale O P iſt die Verticale und zugleich die Diſtanz, P der Hauptpunkt, und O y, O z und O *dg* ſind die Parallelſtrahlen zu den Winkelſchenkeln a d und a b und zu der Diagonale a c. Indem man nämlich r *dg* verlängert bis zur Peripherie zog, bezeichnete man im Punkte O, was dieſen als herabgeſchlagenen Geſichtspunkt charakteriſirt, den Scheitelpunkt des über dem Halbkreiſe y r z liegenden rechten Peripheriewinkels y O z und zugleich der beiden neben deſſen Halbirungslinie r O über den gleichen Bogen y r und z r liegenden gleichen Peripheriewinkel y O r und z O r.

Ergeben ſich hierbei die Verſchwindungspunkte y und z als außerhalb der Bildfläche liegend, ſo kann man dieſelbe Conſtruction in kleinerem Maßſtabe ausführen, wenn man von einer beliebig, am beſten normal von a zum Horizonte gezogenen Linie a h (Fig. 62) §. 210.

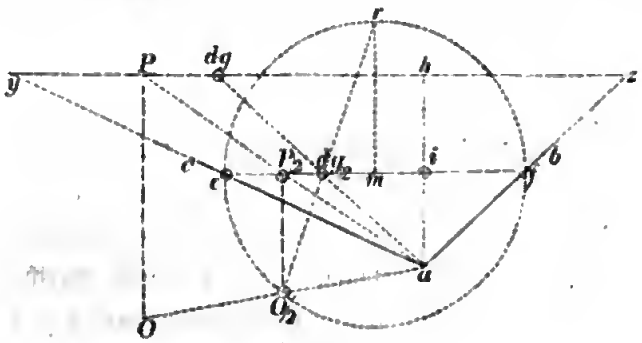

Fig. 62.

einen Bruchtheil, etwa $^1/_2$ im Punkte i abtheilt, durch letzteren eine Horizontale zieht, welche die Schenkel des vorliegenden rechten Winkels c a b in e und f und die Diagonale a *dg* in $dg_{1/2}$ ſchneidet, dann über der Linie e f, dieſe als Durchmeſſer genommen, einen Kreis ſchlägt, in ihm den lothrechten Radius m r und von r eine Linie durch $dg_{1/2}$ bis $O_{1/2}$ in der Peripherie zieht. Fällt man darauf von $O_{1/2}$ auf e f eine Normale $O_{1/2} P_{1/2}$, ſo iſt dieſe die Hälfte der Diſtanz, ſo wie $P_{1/2} dg_{1/2}$ die Hälfte des wirklichen Abſtandes des Hauptpunktes vom Diagonalpunkte iſt. Es iſt deshalb, wenn man von a durch $P_{1/2}$ bis Punkt P im Horizonte und von a durch $O_{1/2}$ bis O in der Verticale zieht, erſterer der Hauptpunkt und letzterer der herabgeſchlagene Geſichtspunkt.

§. 211. Liegen, was den zweiten der in §. 208 gedachten Fälle betrifft, die Perſpectiven a b c und d e f (Fig. 63) zweier horizontal liegenden rechten Winkel vor, deren Schenkel nach verſchiedenen Verſchwindungs-

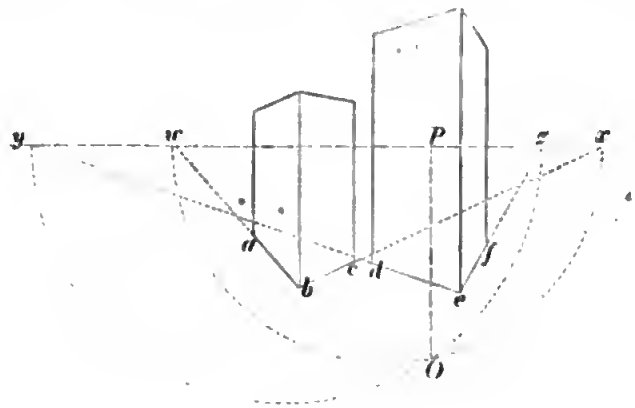

Fig. 63.

punkten y und z, und w und x gerichtet ſind, ſo findet man den Hauptpunkt und die Diſtanz folgendermaßen:

Da der herabgeſchlagene Geſichtspunkt jedesmal der Scheitelpunkt des rechten Winkels iſt, welchen die Parallelſtrahlen zu den Perſpectiven der Schenkel eines rechten Winkels bilden, ſo iſt er in der Peripherie des Kreiſes gelegen, welchen man durch die beiden Verſchwindungspunkte, ihren Abſtand von einander als Durchmeſſer angeſehen, ſchlagen kann. In der Figur muß daher der herabgeſchlagene Geſichtspunkt ſowohl in dem Kreiſe, welchen man um den Durchmeſſer y z, wie in dem Kreiſe, welchen man um den Durchmeſſer w x conſtruiren kann, d. h. in dem Schnittpunkte O beider Kreiſe, liegen. Eine von O normal zum Horizonte gezogene Linie O P (die Verticale) ergiebt demnach an ſich die Diſtanz und in P den Hauptpunkt.

§. 212. Die Perſpectiven zweier rechten Winkel mit verſchiedenen Verſchwindungspunkten liegen vor, ſobald es nur glückt, die Perſpective eines horizontal liegenden Quadrates aufzufinden. Es bieten dann nämlich je zwei Quadratſeiten den einen und die Diagonalen des Quadrates den andern rechten Winkel dar. Da aber hierbei von den vier Verſchwindungspunkten gewöhnlich zwei ſehr entfernt liegen, ſo

muß die Conſtruction in kleinerem Maßſtabe und zwar am beſten folgendermaßen ausgeführt werden:

Iſt a b c d in Fig. 64 die Perſpective eines Quadrates, ſo iſt a b c der eine zur Conſtruction dienliche rechte Winkel, und der Winkel d m c, welchen die Diagonalen des Quadrates bilden, der andere.

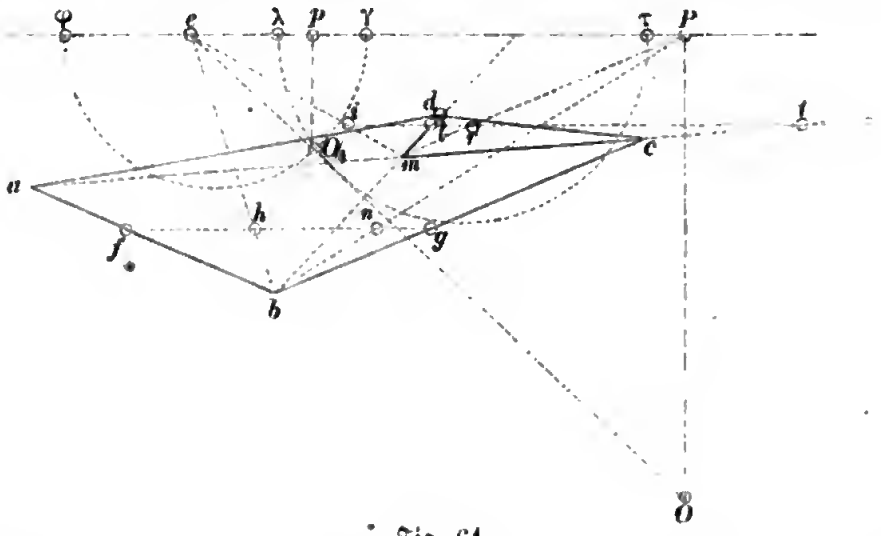

Fig. 64.

Man zieht nun von den Scheitelpunkten b und m beider nach einem beliebigen Punkte e des Horizontes Linien, ſteckt auf der Linie b e einen Bruchtheil von ihr, etwa $^1/_4$ in h, und den gleichnamigen Bruchtheil von m e in i ab, legt durch h eine Horizontale, welche die entſprechenden Winkelſchenkel in f und g, und durch i eine Horizontale, welche die entſprechenden Winkelſchenkel in l und t ſchneidet. Macht man darauf im Horizonte e φ und e γ geometriſch gleich h f und h g, und ebenſo e λ und e τ gleich i l und i t, und ſchlägt dann durch φ und γ, und durch λ und τ, die Abſtände dieſer Punkte von einander als Durchmeſſer angeſehen, Kreiſe, ſo ſchneiden ſich dieſe im Punkte O_4, deſſen normaler Abſtand O_4 p vom Horizonte $^1/_4$ der Diſtanz ergiebt. Vervierfacht man alsdann e p zu e P, ſo iſt P der Hauptpunkt und P O (gleich 4 mal p O_4) die Diſtanz. Doch iſt P auch dadurch zu finden, daß man h n auf der Linie f g, oder i r auf der Linie i t geometriſch gleich e p macht, und dann von b durch n, oder von m durch r bis zum Horizonte zieht. So auch

iſt O dadurch zu finden, daß man von e durch $O/_4$ eine Linie zieht und dieſelbe von e aus gleich 4 mal e $O/_4$ macht.

§. 213. Iſt der Horizont bekannt, und ſind im Bilde die Perſpectiven von wenigſtens zwei ihrer geometriſchen Länge nach bekannten horizontalen, zur Bildebene ſchiefen Linien aufzufinden, ſo ſind hierdurch Diſtanz und Hauptpunkt, und zwar wegen der in §. 101 hervorgehobenen Beziehungen der Theilpunkte zu den Verſchwindungspunkten, zu ermitteln.

Sind z. B. (Fig. 58) die Perſpectiven e d und b a zweier horizontalen Linien E D und B A vorhanden, von denen die erſtere als etwa 30 Fuß, die letztere als etwa 20 Fuß lang bekannt iſt, ſo ergeben ſich zunächſt die Verſchwindungspunkte x und w ihrer Perſpectiven durch deren Verlängerung bis zum Horizonte. Die dieſen Linien entſprechenden Theilpunkte t_x und t_w aber werden gefunden, wenn man durch e die 30 Fuß lange Horizontale e δ, und durch b die 20 Fuß lange Horizontale b α legt und dann δ d und α a beide verlängert bis zum Horizonte zieht. Schlägt man hiernach um x einen Kreisbogen mit dem Radius x t_x, und um w einen Kreisbogen mit dem Radius w t_w, ſo ſchneiden ſich beide Bogen in dem herabgeſchlagenen Geſichtspunkte O, woraus ſich Hauptpunkt und Diſtanz nun leicht ergeben.

---

b. Krummlinige geometriſche Figuren und Körper, welche von krummen Flächen begrenzt ſind.

Achtes Kapitel.

Perſpectiven krummer Linien.

§. 214. Um die Perſpective einer krummen Linie zeichnen zu können, reicht ſelbſtverſtändlich nicht, wie bei den Perſpectiven gerader Linien, die Conſtruction nur zweier ihrer Punkte aus; es müßte vielmehr, ſtreng genommen, jeder einzelne ihrer Punkte conſtruirt werden. Da

dies jedoch unausführbar ist, läßt man es bei der Construction mehrerer womöglich charakteristisch gelegenen, etwa durch leicht zu construirende Tangenten bestimmten Punkte der Curve bewenden und zeichnet die Perspective der letztern durch jene hindurch aus freier Hand. Nachdem man nämlich für die Curve zuvor an irgendeiner beliebig angenommenen, am besten lothrechten oder horizontalen geraden Linie (Abscissenachse) Anhalt gesucht, zieht man von jenen als charakteristisch befundenen Punkten Ordinaten zu dieser, construirt die Perspectiven der Abscissen, darauf die der Ordinaten, und erzielt so in den Endpunkten der letzteren die Perspectiven jener Punkte.

§. 215. Sollte z. B. die Perspective der in Fig. 40 (Taf. 8) gegebenen, bei Tunnel-Eingängen vorkommenden Curve construirt werden, so würden wohl als charakteristisch und vortheilhaft für die Construction gelegen ins Auge zu fassen sein zunächst die Endpunkte A und G, dann C und E, in welchen lothrechte, durch A und G gezogene Linien die Curve schneiden; ferner D, in welchem eine horizontale Linie die Curve berührt; endlich B und F, in welchen lothrechte Linien die Curve berühren. Nach Feststellung dieser Punkte müßte man dann außer den schon vorhandenen Ordinaten CA, EG, BJ und FK noch DH gegen die Abscissenachse KJ, in welcher zugleich die Ebene der Curve die Grundebene schneidet, ziehen, man müßte die Perspectiven der Punkte J, A, H, G und K, und darauf die Perspectiven der in diesen Punkten lothrecht stehenden Ordinaten construiren, wonach dann deren Endpunkte a, b, c, d, e, f und g Punkte der Perspective der Curve wären.

§. 216. Wenn die gegebene Curve sich dazu eignet, wie etwa die in Fig. 41 (Taf. 8) vorliegende Verzierung, so kann man dieselbe auch vorweg in ein Netz von Quadraten oder gleichen Rechtecken, wie die Figur es zeigt, einschließen, die Perspective dieser Rechtecke, deren Seiten als die gedachten Ordinaten anzusehen sind, construiren, und darin die Perspective der Curve nach dem Augenmaße einzeichnen.

§. 217. Mittels der Ordinaten ist auch die am häufigsten vorkommende Curve, der Kreis, zu construiren, und gestattet dabei die

große Regelmäßigkeit dieſer Curve die Anwendung gewiſſer, in allen Fällen ähnlich liegenden Ordinaten. Bevor jedoch das dabei einzuſchlagende Verfahren erörtert wird, erſcheint es zweckmäßig, feſtzuſtellen, welche Figuren möglicherweiſe die Perſpective eines Kreiſes bilden könne:

§. 218. Die Perſpective eines Kreiſes, deſſen Ebene mit der Bildebene ſelbſt zuſammenfällt oder dieſer parallel iſt, iſt ebenfalls ein *Kreis*; denn ſie iſt die Durchſchnittsfigur der Bildebene mit dem dem Kreiſe ſelbſt entſprechenden Geſichtslinienkegel und muß, weil ſie hier parallel der Grundfläche dieſes Kegels iſt, eine dieſer Grundfläche mathematiſch ähnliche Figur bilden.

Iſt die Ebene des gegebenen Kreiſes jedoch nicht der Bildebene parallel, ſo iſt Folgendes zu bemerken: Schon in §. 63 iſt erwähnt worden, daß in der Standebene oder rückwärts derſelben liegende Punkte nicht darſtellbar ſind, da ihre Perſpectiven in unendlicher Entfernung liegen. Während nun die Perſpective eines Kreiſes, deſſen ſämmtliche Punkte vorwärts der Standebene liegen und deſſen Ebene der Bildebene nicht parallel iſt, eine *Ellipſe* iſt, weil hier die Bildebene den Geſichtslinienkegel nicht parallel mit deſſen Grundfläche durchſchneidet, muß in dem Falle, daß ein ſolcher Kreis *mit einem Punkte in der Standebene liegend* gegeben iſt, ſeine Perſpective ein Kegelſchnitt mit einem in unendlicher Entfernung liegenden, nicht darſtellbaren Punkte, alſo eine *Parabel* ſein. In dem Falle aber, daß ein Kreis *mit zwei Punkten in der Standebene* liegend gegeben iſt, muß ſeine Perſpective ein Kegelſchnitt mit zwei in unendlicher Entfernung liegenden, nicht darſtellbaren Punkten, alſo eine *Hyperbel* ſein (§. 235).

Die Perſpective eines Kreiſes ſchließlich, *deſſen Ebene durch den Geſichtspunkt geht*, muß eine *gerade Linie* ſein, denn zwei Ebenen, die Ebene der Geſichtslinien nach dieſem Kreiſe und die Bildebene, können ſich nur in einer geraden Linie ſchneiden.

§. 219. Um die Perſpective eines Kreiſes — wenn dieſelbe nicht ſelbſt ein Kreis iſt — zu conſtruiren, faßt man, was das Einfachſte iſt, zunächſt dasjenige der *ihn einſchließenden Quadrate* ins Auge, deſſen eines Seitenpaar parallel der Bildebene iſt. Wäre z. B. in

Fig. 42 (Taf. 8) der Kreis, und in deſſen Durchmeſſer II. IV die Richtung der Bildebene gegeben, ſo würde J F G H das gedachte Quadrat ſein. Durch Conſtruction der Perſpective dieſes Quadrates erzielt man nämlich nicht allein in den Halbirungspunkten I, II, III und IV ſeiner Seiten vier Punkte der Perſpective des Kreiſes, ſondern auch in den Seiten ſelbſt, was bei der Conſtruction von Curven unentbehrlich iſt, die Tangenten zu dieſen Punkten. Noch vier andere leicht conſtruirbare Punkte bieten ſich dar in den Schnittpunkten V, VI, VII und VIII der Diagonalen deſſelben Quadrates mit der Peripherie des Kreiſes. Sie ſind die Eckpunkte des vom Kreiſe eingeſchloſſenen, dem erſten ähnlich liegenden Quadrates. Die Tangenten dazu werden gebildet durch die Seiten eines einſchließenden Quadrates S R T U, deſſen Seiten wie die Diagonalen des erſten Quadrates gerichtet ſind.

Iſt alſo P in Fig. 43 (Taf. 8) der Hauptpunkt, P D die Diſtanz, §. 220.
a die Perſpective des Mittelpunktes A des gegebenen Kreiſes, und 2. 4 die ſeines der Bildebene parallelen Durchmeſſers, ſo ſind, um ſeine Perſpective zu conſtruiren, von P aus Linien durch die Punkte a, 2 und 4 zu ziehen und dieſelben durch eine von D durch a zu ziehende Diagonale in f und h zu ſchneiden. Es liegt dann, nachdem man noch f g und h i horizontal gezogen, in der Figur f g h i. die Perſpective des erſten den Kreis einſchließenden Quadrates vor, deren Seiten Tangenten zu den vier der Kreisperſpective angehörigen Punkten 1, 2, 3, 4 ſind. — Die zweiten vier, in den Diagonalen f h und g i der Quadratperſpective liegenden Punkte der Kreisperſpective werden gefunden, wenn man — nachdem man zuvor, wie über der Fig. 43 geſchehen iſt, einen Quadranten des Kreiſes geometriſch dargeſtellt, denſelben durch den Radius a° 5° halbirt, die Ordinate 5° q° gezogen, und das Maß a° q° auf den horizontalen Durchmeſſer der Conſtruction von a aus nach beiden Seiten in a q^1 und a q aufgetragen hat — Linien von P durch q^1 und q zieht; es ſchneiden dieſe dann die Diagonalen in den geſuchten vier Punkten 5, 6, 7 und 8. — Die perſpectiviſchen Tangenten zu dieſen Punkten findet man, wenn man auf dem horizontalen Durchmeſſer q^1 u und q r geometriſch gleich a q macht und darauf Linien von u

durch 6 und 7, und von r durch 5 und 8 zieht. Da dieſe Linien jedoch nach den Diſtanzpunkten D und D^1 gerichtet ſind, kann man ſie, wenn dieſe vorhanden ſind, gleich von dieſen aus, ohne Anwendung der Punkte u und r, durch 7 und 5, und durch 6 und 8 ziehen.

Als die zu dieſem Verfahren erforderliche Abſciſſenlänge a q kann man übrigens, wie der Quadrant veranſchaulicht, ſofort die halbe Diagonale, a° (q°) oder 1° (q°), des Quadrates verwenden, welches den Quadranten einſchließt, oder, was daſſelbe ſagt, die Hälfte der Sehne 1° 4° des Quadranten. Da ſich ferner die Länge des Radius a° 4° zur Länge der Abſciſſe a° q° verhält wie die Hypotenuſe (a° 5°) eines gleichſchenklig-rechtwinkligen Dreiecks (a° 5° q°) zur Kathete (a° q°), alſo wie etwa 17 : 12, oder wie 10 : 7, ſo könnte man auch, um den Punkt q in der Conſtruction zu finden, den Radius a 4 in 10 Theile theilen und, ohne erheblich zu irren, q als 7 dieſer Theile von a entfernt liegend beſtimmen.

§. 221. In den meiſten Fällen werden die ſo conſtruirten acht Punkte nebſt ihren Tangenten genügen, um durch ſie die Perſpective des Kreiſes aus freier Hand zeichnen zu können. Fällt die Perſpective jedoch ſo groß aus, daß noch mehr Punkte wünſchenswerth ſind, ſo kann man noch acht je zwiſchen zweien der ſchon vorhandenen acht Punkte gelegene andere Punkte der Peripherie, welche durch Linien zwiſchen ſchon vorhandenen Hülfspunkten beſtimmbar ſind, benutzen. Es liegen dieſelben alle entſprechend dem Punkte IX (Fig. 42), welcher der Schnittpunkt der Linien Q X und III R iſt und deſſen Tangente die Linie W IX iſt. In der Conſtruction liegen die Punkte q, x, 3 und r ſchon vor; nur w iſt noch auf der Quadratſeite i h durch Verlängerung der Linie 5. 8 zu beſtimmen. Nachdem hier alſo dann vermittelſt der Linien q x und 3 r der Punkt 9 ſelbſt feſtgeſtellt iſt, ergiebt ſich in der Linie w 9 die Tangente dazu u. ſ. w.

Andere zur Conſtruction der Kreisperſpective ins Auge zu faſſenden Punkte ſind die wie Punkt XVII in Fig. 42 gelegenen (acht) Punkte der Kreisperipherie. XVII iſt der Schnittpunkt der Diagonale F IV des Rechtecks F G IV. II, welches die Hälfte des den Kreis einſchließenden Quadrates iſt, mit einer Linie, welche man von Punkt II nach Punkt Y, dem Halbirungspunkte von F I, zieht.

Derartig zu verwendender Punkte giebt es noch viele in der Kreisperipherie; doch iſt die Conſtruction ihrer Tangenten zu umſtändlich, als daß man ſie zur Benutzung empfehlen könnte.

Noch andere Punkte der Perſpective der Kreiscurve kann man §. 222. erzielen, wenn man die Perſpective noch irgendeines andern der den Kreis einſchließenden Quadrate, deren eines Seitenpaar der Bildebene nicht parallel iſt, darſtellt und dabei für die in den Diagonalen liegenden Punkte die Abſciſſenlängen mittels der Theilpunkte conſtruirt. Das Verfahren hierbei iſt ähnlich dem in der folgenden Figur befolgten, wo indeſſen die Ebene des darzuſtellenden Kreiſes nicht horizontal, ſondern lothrecht und zur Bildebene ſchief iſt.

Iſt nämlich, wenn P in Fig. 44 (Taf. 8) als Hauptpunkt und §. 223. P O als Diſtanz gegeben ſind, um den Mittelpunkt a die Perſpective eines Halbkreiſes zu conſtruiren, zu welchem h g f i die Perſpective des einſchließenden ganzen Quadrates iſt, und deſſen Ebene alſo die durch Punkt z lothrechte Linie zur Grenzlinie hat, ſo bezeichnen zunächſt die perſpectiviſch-horizontale Halbirungslinie 3. 1 und die lothrechte Halbirungslinie 4. 2 des Quadrates auf deſſen Seiten ſchon drei Punkte: 3, 4 und 1 der Perſpective der Curve. Die Perſpectiven der beiden in den Diagonalen liegenden Punkte findet man, wenn man die beiden Diagonalen zieht, dann in i C B den Quadranten des Kreiſes und vermittelſt der Linien B E und E K in E K die ihm entſprechende Abſciſſenlänge geometriſch darſtellt; darauf vermittelſt des Theilpunktes tz (für die in z verſchwindenden Linien) 2 k und 2 k^1 perſpectiviſch gleich B K macht, und k 8 und k^1 5 lothrecht zieht. Zieht man dann noch 8. 5 und macht q r gleich q a, ſo ſind von r durch 8 und 5 gezogene Linien r u und r s die Tangenten an letzteren Punkten. Beide Linien weichen von der der Grenzlinie z D^3 entſprechenden Verticale z tz (dem Horizonte) um einen halben rechten Winkel ab und verſchwinden daher in den jener Grenzlinie entſprechenden Diſtanzpunkten D^2 und D^3. Um zwiſchen den Punkten 8 und 3 noch einen Punkt 9 der Curve zu finden, hat man nach §. 221 die Punkte c mit e, und 4 mit u durch Linien zu verbinden, und durch deren Schnittpunkt 9 die Tangente v 9 zu ziehen.

§. 224. Bedarf man außer den bei der vorher gezeigten Conſtructionsart benutzten Punkten für gewiſſe Stellen der Kreisperſpective noch mehrerer, ſo kann man dieſerhalb das der Eigenthümlichkeit der Kreiscurve am meiſten entſprechende Verfahren einſchlagen, nämlich die Perſpectiven beliebiger Radien conſtruiren.

Iſt z. B. a in Fig. 45 (Taf. 8) die Perſpective des Mittelpunktes, c b die Perſpective des der Bildebene parallelen Durchmeſſers eines gegebenen horizontalen Kreiſes, und zieht man durch a einen beliebigen Radius a h, ſo iſt v deſſen Verſchwindungspunkt, tv ſein Theilpunkt. Wird nun a h durch eine von tv durch c gezogene Linie perſpectiviſch gleich a c gemacht, ſo iſt h ein Punkt der Kreisperſpective. — Der Verſchwindungspunkt der Tangente an dem Punkte h würde der mit dem Punkte v correſpondirende Verſchwindungspunkt ſein.

§. 225. Dem mathematiſchen Lehrſatze zufolge, daß alle Peripheriewinkel über einem Durchmeſſer rechte Winkel ſind, iſt die Kreiscurve als durch eine Reihe von Scheitelpunkten der über dem Durchmeſſer denkbaren rechten Winkel gebildet anzuſehen, und kann man ihre Perſpective, wenn der der Bildebene parallele Durchmeſſer gegeben iſt, auch demgemäß conſtruiren.

Iſt z. B. c b in Fig. 45 ein ſolcher Durchmeſſer eines gegebenen horizontalen Kreiſes, und man zieht durch c eine beliebig gerichtete perſpectiviſch horizontale Linie c z, conſtruirt durch Punkt b die Perſpective b y einer zu c z rechtwinkligen horizontalen Linie, ſo iſt der Schnittpunkt e beider Linien c z und b y ein Punkt der dem Durchmeſſer c b entſprechenden Kreisperſpective, weil er der Scheitelpunkt eines rechten Winkels c e b iſt, deſſen Schenkel durch die Endpunkte des Durchmeſſers gehen. Aus demſelben Grunde muß auch der Schnittpunkt f der beiden Linien y c und z b ein Punkt der Kreisperſpective ſein. Ebenſolche Punkte ſind auch i und g als Schnittpunkte der zu einander rechtwinkligen Linien c D^1 und b D, und D c und D^1 b. Noch mehr Punkte als die nun ſchon vorhandenen c, e, i, b, f und g ergeben ſich aus der Fortſetzung dieſes Verfahrens, das nur wegen der Punkte in der Nähe von c und b unzureichend wird, da hierzu je ein Verſchwindungspunkt der Schenkel

der rechten Winkel zu entfernt fällt. Aushülfe gewährt hier die zuerſt empfohlene Ordinaten-Conſtruction §. 217.

Die Tangente an einem Punkte wie f findet man, wenn man den Radius a f zieht, denſelben bis w im Horizonte verlängert, zu w den correſpondirenden Verſchwindungspunkt x ermittelt und x f zieht. Die Tangenten an i und g ſind, da die Radien nach dieſen Punkten in P verſchwinden, ſelbſtverſtändlich mit c b parallel.

Auf Grund des mathematiſchen Lehrſatzes, daß jeder Peripherie- §. 226.
winkel über einer Sehne halb ſo groß iſt wie der Centriwinkel über der Sehne, kann man, wenn die Perſpective einer der Bildebene parallelen Sehne, deren Centriwinkel man kennt, gegeben iſt, Punkte der entſprechenden Kreisperſpective auch in den Scheitelpunkten der Perſpectiven ſolcher Winkel finden, welche halb ſo groß wie der Centriwinkel ſind und deren Schenkel durch die Endpunkte der Sehne gehen.

Iſt z. B. k f in Fig. 45 eine ſolche Sehne, welche als einem Centriwinkel (k a f) von 62° entſprechend bekannt iſt, und man zieht k P, trägt dann an P O in O die Hälfte des Centriwinkels, alſo den Winkel P O w von 31°, an und zieht die Linie f w, ſo iſt ihr Schnittpunkt e mit k P ein Punkt der Kreisperſpective; denn der Winkel k e f entſpricht den obigen Bedingungen. Zieht man ebenſo k u, trägt an den Parallelſtrahl O u in O den Winkel u O r von 31° an und zieht die Linie f r, ſo ſchneidet ſie die k u ebenfalls in einem Punkte n der Kreisperſpective u. ſ. w. — Die Perſpectiven der Tangenten an den Punkten e und n müſſen wie in dem vorhergehenden Paragraphen perſpectiviſch normal zu den Radien a e und a n conſtruirt werden.

Punkte der Kreisperſpective unter der Sehne ſind in den Perſpectiven der Scheitelpunkte von Peripheriewinkeln zu finden, welche 180° — 31°, d. i. 149°, groß ſind.

Iſt die Perſpective eines Kreiſes oder eines Theiles deſſelben §. 227.
in ſehr großem Maßſtabe darzuſtellen, ſo kann dies auch ausſchließlich durch Conſtruction einer Folge von leicht conſtruirbaren Tangenten des Kreiſes geſchehen, deren Lage, ſ. Fig. 46 (Taf. 8), folgendermaßen beſtimmt wird: In dem Quadranten A B M z. B. theilt man die

Seite C B des ihn einſchließenden Quadratviertels in eine beliebige Anzahl, etwa 8, geometriſch gleicher Theile, zieht dann B A über A verlängert und macht darin A F gleich B A, wobei Punkt F in die dem getheilten Stücke gegenüberliegende verlängerte Quadratſeite und zwar ſo weit entfernt von E fällt, wie C von B liegt. Schneidet man darauf die Seite C A durch Linien, aus dem Punkte F nach den Theilungspunkten der Seite C B gezogen, und verbindet die Schnittpunkte durch Linien mit den entgegengeſetzt bezifferten Theilungspunkten der Seite C B, ſo ſind dieſe Linien Tangenten des Quadranten. Die auf dem Stück C A einmal ausgeführte Theilung iſt dann leicht durch Linien, parallel C B gezogen, auf das Stück J K, und durch andere Linien, durch den Mittelpunkt M gezogen, auf das Stück K H zu übertragen, während B J, H G u. ſ. w. wieder wie C B getheilt werden.

§. 228. Soll nun demgemäß in Fig. 47 (Taf. 8) in der Perſpective i c e h eines in einer lothrechten, zur Bildebene normalen Ebene liegenden Quadrates, ein Stück der Perſpective des eingeſchloſſenen Kreiſes conſtruirt werden, ſo theilt man c b und b i je in eine beliebige Anzahl, etwa 8, geometriſch gleicher Theile, zieht von b durch a bis f in der verlängerten Quadratſeite h e, und ſchneidet c a durch Linien, von den Theilungspunkten des Stückes b c nach f gezogen. Es ſind dann Linien, durch die entgegengeſetzt gelegenen Theilungspunkte der Stücke b c und a c gezogen, Tangenten der Quadrantenperſpective a b m. Die Theilung des Stückes a c kann auch durch Linien von dem Punkte g nach den Theilungspunkten des Stückes c l bewirkt werden. Die Theilung des Stückes e a iſt durch Linien, von den gleichentfernten Theilungspunkten des Stückes g e nach dem Punkte l gezogen, zu bewirken, aber auch durch Linien, welche von den gleichentfernten Theilungspunkten des Stückes e f nach b gezogen werden. Die Theilung des Stückes i k kann durch Linien, von den Theilungspunkten des Stückes e a durch den Mittelpunkt m gezogen, geſchehen; doch kann man einen Theil der Tangenten in dem Quadranten b k m auch dadurch erlangen, daß man, von f durch die Theilungspunkte des Stückes c l ziehend, die verlängerte c c ſchneidet, und von dieſen Schnittpunkten durch die Theilungspunkte des Stückes b i zieht u. ſ. w. —

Nachdem im Vorhergehenden das bei der Conſtruction der Perſ- §. 229.
pectiven krummer Linien einzuſchlagende Verfahren gezeigt worden, bleibt noch übrig, an einer Reihe von Beiſpielen die Anwendung der gegebenen Rathſchläge beim Conſtruiren der Perſpectiven von Körpern, welche ganz oder theilweiſe von krummen Flächen begrenzt ſind, zu zeigen. Daß zur perſpectiviſchen Conſtruction ſich vorzüglich regelmäßige geometriſche Körper, wie Kegel, Cylinder, Kugel, und die aus dieſen zuſammengeſetzten eignen, und daß man unregelmäßigen Körpern gegenüber, wenn man dieſelben nicht wenigſtens in ihren Theilen auf regelmäßige zurückführen kann, der großen Umſtändlichkeit wegen auf das Conſtruiren verzichten muß und auf die freie Auffaſſung angewieſen iſt, ergiebt ein Blick auf die dargelegten Conſtructionsmittel.

Neuntes Kapitel.

Beiſpiele. Perſpectiven von Körpern, welche von krummen Flächen begrenzt ſind.

Beiſpiel 16.

Aufgabe. In Fig. 48 (Taf. 9) iſt in dem gleichſchenkligen §. 230.
Dreiecke KGL der Aufriß eines Kegels, und in Fig. 49 in der lothrechten Linie ka die Perſpective ſeiner Achſe, wozu P in Fig. 52 der Hauptpunkt und PD die Diſtanz iſt, gegeben — es ſoll, die Bildebene durch die Achſe ka angenommen, die Perſpective des Kegels conſtruirt werden.

Ausführung. Nachdem man in Fig. 49 durch a den hier mit der §. 231.
Bildebene zuſammenfallenden Durchmeſſer lg der Grundfläche gezogen, conſtruirt man die elliptiſche Perſpective lhgi der Peripherie der letztern mittels des ſie einſchließenden Quadrates und der in deſſen Diagonalen liegenden Punkte, wie dies in §. 220 gezeigt iſt. Die Perſpectiven der beiden als Umriſſe auftretenden Kegelſeiten ergeben ſich in den beiden Tangenten, welche man von der Spitze k an die Ellipſe zieht.

Um hierfür die Berührungspunkte u und t durch eine Lineal-construction, die bei allen Kegelschnitten zutrifft, genau festzustellen, zieht man von k aus zwei beliebige gerade Linien, etwa k l und k q durch die Ellipse, verbindet die vier Schnittpunkte l mit m, und q mit n durch gerade, sich hier im Punkte s schneidende Linien, zieht ferner von m durch n, und von q durch l Linien, welche sich im Punkte r schneiden, und findet dann in den Schnittpunkten u und t einer von r durch s gezogenen Linie mit der Ellipse die gesuchten Berührungspunkte.

Beispiel 17.

§. 232. **Aufgabe.** In Fig. 50 (Taf. 9) ist in den beiden kleineren um Punkt A geschlagenen Kreisen der Grundriß eines **cylindrischen Fontainenbassins**, in Fig. 51 dazu der Aufriß gegeben; ferner ist in den beiden größeren Kreisen der Fig. 50 der Grundriß eines 5 Fuß breiten und in 8 Fuß Entfernung um das Bassin laufenden Weges, außerdem in der durch die Achse A des Bassins gehenden Linie $\varrho 5$ der Grundriß der Bildebene, im Punkte P der des Hauptpunktes, im Punkte O der des Gesichtspunktes gegeben — es soll unter Annahme einer Höhe des Auges von 7 Fuß die Perspective des Bassins und eines Theiles des Weges in doppeltem Maßstabe des Grundrisses, d. i. in dem unter der Construction (Fig. 52) vorliegenden, construirt werden.

§. 233. **Ausführung.** Nachdem in der Construction der Horizont gezogen, der Hauptpunkt P, der herabgeschlagene Gesichtspunkt O und die Distanzpunkte D und D^1 bezeichnet worden, wird 7 Fuß unter dem Horizonte die Grundlinie gezogen, darin die Perspective a des Achspunktes A gleich zweimal A P von der Verticale entfernt bestimmt, und über b g der mit der Bildebene zusammenfallende Durchschnitt des Bassins gezeichnet. Die beiden Cylinder c h g b und f l i e, welche die Bassinwände bilden, und der Kegel k c h, welchen die obere Fläche des Bassins bildet, enthalten in ihren Grundflächen im Ganzen 4 Kreise, deren Radien für den ersten Kreis a e, für den zweiten a^1 f, für den dritten a b und für den vierten a^2 c sind. An dem Wege möge der innere Kreis der fünfte, der äußere der sechste heißen. — Man construirt nun am sichersten nach Anleitung des §. 220, mittels der die Kreise einschließenden Quadrate, zuerst die Perspectiven der beiden in der Grundebene liegenden Kreise durch ihre acht Punkte nebst Tangenten dazu, und darauf auf gleiche Art die Perspectiven des zweiten

und vierten Kreiſes. Doch kann man die letzteren auch dadurch erzielen, daß man in beliebigen Punkten der Perſpectiven der beiden in der Grundebene liegenden Kreiſe Lothe (Cylinderſeiten) errichtet und deren perſpectiviſche Höhen ſämmtlich, wie dies in der Figur für die Cylinderſeite $m\,m^2$ geſchehen iſt, vermittelſt horizontaler Linien aus dem Höhenmaßſtabe entlehnt, welchen die von P durch die Mittelpunkte a^2, a^1 und a gezogenen Linien bilden. Außerdem kann man die perſpectiviſche Höhe ſolcher beliebig angenommenen Cylinderſeite, wie z. B. $n\,n^2$, auch dadurch beſtimmen, daß man aus n durch a eine Linie nach dem Horizonte, und aus dem Schnittpunkte mit dieſem wieder eine Linie durch a^2 gegen die Cylinderſeite zieht, wodurch zugleich die perſpectiviſche Höhe der dieſer Cylinderſeite diametral gegenüberliegenden beſtimmt wird. Die Perſpective des zweiten Kreiſes iſt dem entſprechend zu finden; doch kann man Punkte von ihr auch dadurch conſtruiren, daß man in der Peripherie der erſten Kreisperſpective ſolche Cylinderſeiten errichtet, welche radial zu ſchon vorhandenen Seiten des äußern Cylinders ſtehen, wie z. B. $q\,q^2$ zu $n\,n^2$, und ihre perſpectiviſche Höhe ($q\,q^2$) durch Linien (Kegelſeiten), wie $n^2\,k$, nach der Perſpective k der Spitze des Kegels gezogen, welchen die obere Baſſinfläche bildet, beſtimmt, ſo wie im Verticaldurchſchnitte ſelbſt die Höhen $e\,f$ und $i\,l$ durch Linien, aus e und h nach k gezogen, beſtimmt ſind. — Sind die Perſpectiven der vier Kreiſe conſtruirt, ſo ergeben lothrechte Tangenten, zu beiden Seiten an die dritte und vierte Kreisperſpective gezogen, die Perſpectiven der Cylinderſeiten, welche den ſcheinbaren Umriß bilden. — Auch die Perſpectiven der dem Wege angehörigen Kreiſe, von denen überhaupt nur Stücke dargeſtellt werden können, werden unter Anwendung der entſprechenden Stücke der ſie einſchließenden Quadrate conſtruirt. In der Conſtruction ſind für jeden derſelben fünf Punkte: I, II, III, IV, V und 1, 2, 3, 4, 5 nach Anleitung des §. 220 conſtruirt. Sollten dieſe jedoch nicht ausreichend befunden werden, ſo kann man im Grundriſſe noch beliebige andere Punkte auswählen und vermittelſt der ihnen entſprechenden Ordinaten ihre Perſpectiven nebſt Tangenten conſtruiren, wie dies z. B. mit Punkt r im ſechsten Kreiſe, wozu $\varrho\,r$ die Tangente iſt, geſchehen iſt. Fielen bei der Conſtruction der den fünften und ſechsten Kreis einſchließenden Quadrate die Punkte 1, I, 5 und V etwa ſchon ſeitlich außerhalb des Conſtructionsraumes, ſo daß man die Quadrate nicht unter Anwendung dieſer Punkte conſtruiren könnte, ſo fängt man jene bei den Punkten 3 und III an, indem man $a\,3$ perſpectiviſch 21 Fuß und $a\,III$ perſpectiviſch 16 Fuß lang macht. Die in der Conſtruction fortgelaſſenen Ordinaten zu den in den Diagonalen liegenden Punkten dieſer Kreiſe ſind dann auch dadurch zu beſtimmen, daß

man bei der Ermittelung der ihnen entſprechenden Abſciſſenlängen nicht a 5 und a V, ſondern 3 w und III u als Radien nimmt, die gefundenen Abſciſſenlängen auf v w und t u aufträgt und nun, von P aus die Ordinaten ziehend, die Diagonalen in 2 und 4, und in II und IV ſchneidet. Oder man zieht — was ſich hier deutlicher an dem Grundriſſe, Fig. 50, erklären läßt — aus dem Mittelpunkte, alſo aus A eine Linie durch Punkt X, in welchem die eine verlängerte Ordinate des dritten Kreiſes deſſen einſchließendes Quadrat ſchneidet, und bezeichnet dadurch auf den Quadratſeiten des fünften und ſechsten Kreiſes Punkte wie Y und Z, welche ſo gelegen ſind, daß durch ſie zur Bildebene normal gezogene Linien ſelbſt die in Rede ſtehenden Ordinaten ſind.

§. 234. In Bezug auf den Ort der Perſpective der durch den Punkt III liegenden Quadratſeite des fünften Kreiſes, deren Durchgangspunkt Δ durch die Verticalebene ſo weit hinter der Bildebene liegt, wie der Geſichtspunkt davor, iſt zu bemerken, daß dieſelbe wie die aller ähnlich gelegenen Objecte genau in die Mitte zwiſchen der Grundlinie und dem Horizonte fallen muß.

Stellt man nämlich in Fig. 53 (Taf. 8) in P p die Bildebene, in O den Geſichtspunkt, und in Δ jenen Durchgangspunkt im Aufriſſe geometriſch dar, und zieht hier die Geſichtslinie O Δ, ſo ſchneidet dieſe die Bildebene im Punkte δ, welcher der Halbirungspunkt von P p ſein muß, da P δ und p δ ſich gleich ſind als entſprechende Seiten zweier Dreiecke P O δ und p Δ δ, die wegen Gleichheit je einer Seite (P O und p Δ) und der beiden daranliegenden Winkel congruent ſind.

§. 235. Was die Geſtalt der Curven, welche die Perſpectiven des fünften und ſechsten Kreiſes bilden, betrifft, ſo muß, dem Inhalte des §. 218 nach, die des fünften Kreiſes, weil einer ſeiner Punkte, nämlich S (Fig. 50), in der Standebene liegend gegeben iſt, ein Kegelſchnitt mit einem in unendlicher Entfernung gelegenen nicht darſtellbaren Punkte, d. i. eine Parabel ſein; die Perſpective des ſechsten Kreiſes aber muß, weil zwei ſeiner Punkte in der Standebene liegend gegeben ſind, ein Kegelſchnitt mit zwei in unendlicher Entfernung liegenden, nicht darſtellbaren Punkten, d. i. eine Hyperbel, ſein.

Unterſucht man nun die Conſtruction (Fig. 52), in wiefern dieſelbe dies zu beſtätigen vermag, ſo findet man:

1) hinſichtlich der Perſpective des fünften Kreiſes, daß hier die durch den Achspunkt a gehenden Perſpectiven der Diagonalen des einſchließenden Quadrates je geometriſch parallel den durch die Punkte I und V liegenden Perſpectiven zweier Quadratſeiten ſind und ſich deshalb mit dieſen, dem früher (§. 47) über Parallelität Geſagten gemäß, erſt in unendlicher Entfernung ſchneiden, woſelbſt alſo auch die Perſpective der vierten Quadratſeite, und demzufolge auch die Perſpective des davon tangirten Kreispunktes S liegen muß;

2) hinſichtlich der Perſpective des ſechsten Kreiſes findet man, daß hier die Perſpectiven der Diagonalen des einſchließenden Quadrates mit den durch die Punkte 1 und 5 liegenden Perſpectiven zweier Quadratſeiten nach der Richtung, in welcher man die vierte Quadratſeite vermuthen möchte, nicht allein nicht convergiren, oder etwa mit ihnen parallel ſind, ſondern nach der bezeichneten Richtung ſogar divergiren, und daß daher die Perſpective der vierten Quadratſeite und des von ihr tangirten Kreispunktes (im andern Zweige der Hyperbel, welchen die Perſpective des ſechsten Kreiſes bildet) in der Richtung der Convergenz der genannten Stücke, alſo oberhalb des Horizontes auftreten würde, an einer Stelle, wo ſie nur einer mathematiſchen Auffaſſung genügen würde.

§. 236.

Aus dem im Vorhergehenden Geſagten iſt aber auch das Verfahren abzuleiten, welches man einzuſchlagen hat, wenn man die Perſpectiven des fünften und ſechsten Kreiſes nach Anleitung des §. 227 conſtruiren will. Jenem Paragraphen nach hat man, um die Perſpective des fünften Kreiſes und davon zunächſt die ſeines Quadranten I. III A zu finden, das Stück t III (Fig. 54, Taf. 8) in beliebig viele, etwa 8, geometriſch gleiche Theile zu theilen und dieſe Theilung durch Linien, nach einem gewiſſen Punkte (φ) gezogen, auf das Stück t I zu übertragen, wonach Linien, durch die entſprechenden Punkte der beiden Stücke t III und t I gezogen, die Quadranten-Perſpective ergeben. Jener Punkt φ würde aber zu finden ſein im Schnittpunkte der diagonalen Linie III. I mit der dem Stücke t III gegenüberliegenden Quadratſeite. Da dieſe jedoch dem vorigen Paragrapheu nach in unendlicher Entfernung liegt, ſo muß auch Punkt φ daſelbſt liegen und die nach ihm gezogenen, die Theilung des Stückes t I verrichtenden Linien, wie $\beta\gamma$ eine iſt, müſſen untereinander und mit III. I geometriſch parallel ſein und deshalb auch das Stück t I in geometriſch gleich entfernten Punkten ſchneiden. Man kommt hiernach kürzer zum Zwecke, wenn man das Stück t I vorweg ebenfalls in 8 geometriſch gleiche Theile theilt. In Bezug auf den Quadranten III. V A iſt natürlich ebenſo zu verfahren.

Um die in Fig. 54 nicht wiederholte Perſpective des ſechsten Kreiſes,

und davon zunächſt etwa die feines Quadranten 3. 5 A ebenfalls nach Anleitung des §. 227 zu conſtruiren, hätte man das Stück 3 w in Fig. 54 gleichfalls in beliebig viele geometriſch gleiche Theile zu theilen und dieſe Theilung auf das Stück w 5 durch Linien zu übertragen, welche nach einem gewiſſen Punkte ε, dem Schnittpunkte der über Punkt 5 verlängerten diagonalen Linie 3. 5 mit der dem Stücke 3 w gegenüberliegenden Quadratſeite gezogen werden. Punkt ε würde in letzterer perſpectiviſch ſo weit rechts von der verlängerten Seite w 5 entfernt liegen müſſen, wie 3 w lang iſt. Er wäre demnach dadurch zu conſtruiren, daß man auf der über 5 verlängerten Grundlinie das Maß a 5 (welches perſpectiviſch gleich 3 w iſt) rechts von 5 noch einmal in 5 η auftrüge und dann, von P durch η ziehend, die Linie 3. 5 ſchnitte. Dieſer Schnitt fände jedoch, wie die Figur zeigt, nicht in der vermutheten Richtung — nach welcher die Linien P η und 3 ε vielmehr divergiren — ſondern in der entgegengeſetzten Richtung in einem ziemlich entfernt oberhalb des Horizontes liegenden Punkte λ ſtatt, durch welchen hiernach alſo die Verlängerung der Perſpective der vierten Quadratſeite (Tangente an dem andern Zweige der Hyperbel, welchen die Perſpective des ſechsten Kreiſes bildet) läge und vermittelſt deſſen nun die Uebertragung der Theilung auf das Stück w 5 auszuführen wäre. — Wegen der großen Entfernung dieſes Punktes iſt es jedoch gerathen, hier für den ſechsten Kreis auf die Anwendung der im §. 227 gezeigten Conſtructionsart zu verzichten, und ſeine Perſpective ſo zu conſtruiren, wie es im §. 233 geſchehen iſt.

Beiſpiel 18.

Aufgabe. Conſtruction der Perſpective der **Kugel.**

§. 237. Unterſucht man, welche Figuren die Perſpectiven von Kugeln möglicherweiſe bilden können, und erwägt dabei, daß die aus dem Auge nach der Kugel denkbaren Geſichtslinien einen Kegel bilden, deſſen Spitze im Auge liegt und deſſen Baſis ein Kreis (Berührungskreis der Geſichtslinien) der Kugel iſt, ſo ergiebt ſich, daß die Perſpective der Kugel im Allgemeinen ein Kegelſchnitt ſein muß. Sie iſt demnach ein Kreis, wenn die Bildebene den Geſichtslinienkegel normal zu ſeiner Achſe ſchneidet, d. h. wenn die Ebene jenes Berührungskreiſes parallel der Bildebene iſt, und die Perſpective des Mittelpunktes der Kugel in den Hauptpunkt fällt. Iſt die Kugel ſo gelegen, daß ein Punkt des Berührungskreiſes der

Geſichtslinien in der Standebene liegt, ſo iſt die Perſpective eine Parabel. Iſt die Kugel ſo gelegen, daß zwei Punkte jenes Kreiſes in der Standebene liegen, ſo iſt die Perſpective eine Hyperbel. Eine ſolche Figur bildet z. B. die Perſpective des durch das Meer gebildeten Erdhorizontes, inſofern dieſer der Berührungskreis der Geſichtslinien an der Erdkugel iſt und mit zwei Punkten in der durch das Auge denkbaren unendlichen Standebene liegt. Da die Krümmung dieſer Hyperbel jedoch eine ſehr geringe iſt und die perſpectiviſche Conſtruction auch immer nur ein verhältnißmäßig kleines Geſichtsfeld umfaßt, ſo iſt das Zuſammenfallen jener mit dem geradlinigen Horizonte einer perſpectiviſchen Conſtruction gerechtfertigt.

In allen anderen, von den obigen abweichenden, Fällen iſt das perſpectiviſche Bild einer Kugel eine Ellipſe.

§. 238. In dem erſten der oben angeführten Fälle, daß die Perſpective des Mittelpunktes der Kugel mit dem Hauptpunkte zuſammenfällt und die Perſpective der letztern einen Kreis bildet, iſt daran zu denken, daß man den Durchmeſſer der Kugel ſelbſt nicht ſofort als den Durchmeſſer des Kreiſes, welchen ihre Perſpective bildet, nehmen darf. Dieſer iſt vielmehr ſtets größer als jener. Iſt z. B. in Fig. 55 (Taf. 4) dem Kreiſe um M der geometriſche Aufriß einer Kugel, in O der des Geſichtspunktes gegeben, und man zieht aus O die berührenden Geſichtslinien an die Kugel, ſo ergiebt ſich, daß der Berührungskreis derſelben in K L liegt und daß, wenngleich der Durchmeſſer deſſelben an ſich kleiner iſt, als der des größten Kreiſes U E der Kugel, wegen ſeiner größeren Nähe zum Auge ſeine Perſpective (1k) größer ausfallen muß, als die (e u) des größten Kugelkreiſes — die Bildebene mag nun in B J, oder in $B^1 J^1$, oder in $B^2 J^2$ ſtehen.

§. 239. Iſt eine Reihe neben einander liegender gleich großen Kugeln perſpectiviſch darzuſtellen, ſo wachſen zum Theil aus demſelben Grunde die Durchmeſſer der Perſpectiven der Kugeln an Größe, je weiter dieſe ſeitlich entfernt liegen; ſowohl, weil für dieſe die Berührungskreiſe von an ſich immer größerem Durchmeſſer werden, als auch, weil die ihnen entſprechenden Geſichtslinienkegel von der Bildebene immer ſchiefer geſchnitten werden. So würde z. B. für die Kugel A in Fig. 56 (Taf. 4) K L der Durchmeſſer des Berüh-

rungskreises und k l der seiner Perspective sein; für die Kugel C würde F G der schon größere Berührungskreis und f g der noch größere Durchmesser seiner Perspective sein u. s. w.

Das Wachsen der scheinbaren Durchmesser der Objecte, je weiter diese seitlich entfernt liegen, und der Durchmesser ihrer Perspectiven ist selbstverständlich auch zu berücksichtigen, wenn Cylinder oder Kegel, etwa Säulenschafte, an Stelle der Kugeln gegeben sind.

§. 240. **Ausführung.** Ist P D^1 in Fig. 57 (Taf. 9) der Horizont, O der herabgeschlagene Gesichtspunkt, und es soll die Perspective einer auf einem Cylinder ruhenden Kugel, deren Mittelpunkt mit dem Hauptpunkte zusammenfällt und deren Halbmesser P c ist, construirt werden, so kann durch Gesichtslinien, aus einem der Distanzpunkte berührend an den gegebenen Kugelkreis gezogen, sofort in K L der Durchmesser des Berührungskreises und in k l der seiner Perspective, und somit der Perspective der Kugel selbst festgestellt werden. Die Perspective der Kugel und die des ihr an Durchmesser geometrisch gleichen Cylinders zeigen hiernach auch perspectivisch gleiche Durchmesser.

§. 241. Ist eine Kugel in der Lage zum Gesichtspunkte gegeben, daß ihre Perspective ein anderer Kegelschnitt als ein Kreis, z. B. eine Ellipse werden muß, so construirt man diese am einfachsten unter Anwendung eines gewissen, sie einschließenden Vierecks folgendermaßen:

Ist P in Fig. 58 (Taf. 17) der Hauptpunkt, O der herabgeschlagene Gesichtspunkt, und es soll die Perspective einer Kugel von dem Durchmesser des um den Mittelpunkt k geometrisch gegebenen Kreises construirt werden, so zieht man von P durch k eine Linie und errichtet auf ihr in P eine Normale P D^2 von der Länge der gegebenen Distanz. Schneidet man hierauf die verlängerte P k durch von D^2 an den gegebenen Kreis gezogene Tangenten in den Punkten 1 und 3, so bezeichnen diese die Länge des erwähnten Vierecks, und durch sie parallel der P D^2 gezogene Linien sind zwei Seiten desselben. Zwei andere, von P aus gezogene, den Kreis in 2 und 4 berührende Linien v x und w u sind die beiden anderen Seiten des Vierecks; die Berührungspunkte 2 und 4 aber, so wie die schon vorhandenen Punkte 1 und 3 sind Punkte der

Kugelperſpective. Vier andere Punkte derſelben findet man, wenn man das Viereck x u w v wie die Perſpective eines eine Ellipſe einſchließenden Rechtecks behandelt, zu deſſen Ebene P D² die Grenzlinie, mit dem Hauptpunkte P, iſt; wenn man demnach für den perſpectiviſchen Durchmeſſer 2.4 die entſprechenden Abſciſſenlängen y m und y g ermittelt und auf ihn aufträgt, und die Diagonalen v u und w x durch Linien, von P durch m und g gezogen, in den Punkten 8, 7, 5 und 6 ſchneidet. Linien, aus den Schnittpunkten a und b der verlängerten Diagonalen mit der Grenzlinie P D² durch die in den Diagonalen liegenden Punkte gezogen, können als Tangenten für dieſe benutzt werden. Sehr willkommene Punkte ſind noch 9 und 10. Man findet ſie, wenn man 3 (y) geometriſch gleich 1 y macht, 9. 10 parallel der Linie 4. 2 zieht, und (y) 9 und (y) 10 geometriſch gleich y m macht. Tangenten zu dieſen Punkten ſind aus dem Punkte (P) zu ziehen, welcher in der verlängerten P k ſo weit vom Punkte 3 entfernt liegt, wie P vom Punkte 1.

Dem Vorigen entſprechend iſt auch zu verfahren, wenn die Perſpective der Kugel eine Parabel oder Hyperbel iſt.

Weiter unten in Beiſpiel 34, in dem die ſchiefen Ebenen behandelnden Abſchnitte, iſt die Kugelperſpective ähnlich und zwar derart conſtruirt, daß, nachdem die Neigung der ſchiefen Ebene des Berührungskreiſes geometriſch ermittelt worden, zu dieſer Ebene die Grenzlinie nebſt entſprechendem Hauptpunkte, und dann die Perſpective des Berührungskreiſes vermittelſt der Perſpective des ihn einſchließenden Quadrates conſtruirt wurde.

Ein Vergleich beider Conſtructionsarten ergiebt, daß in der vorliegenden Fig. 58 das die elliptiſche Perſpective einſchließende Trapez v w u x als die Perſpective eines in einer einfach-ſchiefen, zur Bildebene normalen Ebene liegenden Oblongums anzuſehen iſt.

In dem §. 357 iſt Anleitung zur Conſtruction der Kugelperſpective vermittelſt ihrer Brennpunkte gegeben.

Andere Conſtructionsarten wendet man noch an, wenn man zugleich andere Zwecke, wie z. B. die Conſtruction des Schattens der Kugel, oder die von Meridianlinien im Auge hat, oder wenn etwa bei der vorhergehenden Conſtructionsart die Gren- §. 242.

zen des Conſtructionsraumes vorausſichtlich weit überſchritten werden müßten.

Soll z. B. außer der Perſpective einer Kugel ſelbſt auch die ihrer Schattengrenze conſtruirt werden, ſo nimmt man am zweckmäßigſten in der Kugelfläche mehrere ſolche Kreiſe an, welche in lothrechten, durch den Lichtpunkt gehenden Ebenen liegen, conſtruirt ihre Perſpectiven, und zeichnet dann durch deren äußerſte Punkte die Perſpective der Kugel.

§. 243. Am einfachſten iſt dieſe Conſtruction, wenn die Sonne als in der verlängerten Bildebene ſtehend angenommen wird, weil dann jene lothrechten, durch den Lichtpunkt gehenden Ebenen, wegen der unendlichen Entfernung der Sonne, ſämmtlich der Bildebene parallel, und deshalb die Perſpectiven der in ihnen angenommenen Kugelkreiſe ſelbſt Kreiſe ſind.

Iſt z. B. P in Fig. 59 (Taf. 9) der Hauptpunkt, D^1 ein Diſtanzpunkt, und der um M geſchlagene Kreis von dem Durchmeſſer A B der der Bildebene parallele Durchſchnitt der Kugel, deren Perſpective conſtruirt werden ſoll, ſo hat man, um jene Kreisperſpectiven ſchlagen zu können, zunächſt die Perſpectiven ihrer Mittelpunkte und ihrer Halbmeſſer feſtzuſtellen. Zuvor ergeben eine von P durch M gezogene Linie die Perſpective des zur Bildebene normalen Durchmeſſers der Kugel, und die auf ihm durch Linien, von D^1 durch A und B gezogen, beſtimmten Punkte a und b die Perſpectiven der ihm entſprechenden Pole der Kugel. Als einer der Kreiſe der genannten Art ſei hier einer von dem geometriſchen Halbmeſſer F G angenommen. Ueberträgt man letztern geometriſch auf den lothrechten Kugeldurchmeſſer in M E, zieht von P durch E, macht durch eine von D^1 durch F gezogene Linie M m perſpectiviſch gleich M F, legt durch m eine Lothrechte m e, ſo iſt deren Länge m e der perſpectiviſche Halbmeſſer, und m der Mittelpunkt für den gewählten Kreis. Macht man auch $M m^1$ perſpectiviſch gleich M F, legt durch m^1 ebenfalls eine Lothrechte, ſo ergiebt ſich in m^1 der Mittelpunkt und in $m^1 e^1$ der perſpectiviſche Halbmeſſer für den gleichgroßen, auf der entgegengeſetzten Seite der Kugel annehmbaren Kreis. In der Figur ſind auf dieſe Weiſe die Mittelpunkte und Halbmeſſer von ſechs Kreiſen conſtruirt, die Peripherien der letzteren, ſo weit ſie gebraucht werden, geſchlagen, und iſt dann um ſie die elliptiſche Kugelperſpective, ſie alle berührend, aus freier Hand gezeichnet worden.

Iſt die Sonne nicht in der Bildebene ſtehend, oder iſt §. 241.
eine Kerzenflamme als Lichtquelle angenommen, ſo ſind die durch ſie und die Kugel lothrecht anzunehmenden Hülfskreiſe nicht parallel der Bildebene, und ihre Perſpectiven ſind Ellipſen, zu deren Conſtruction man die verſchiedenen Durchmeſſer wie in folgendem Beiſpiele findet:

In Fig. 60 (Taf. 9) ſei P der Hauptpunkt, $P D_2$ die halbe Diſtanz §. 245.
— es ſoll die Perſpective einer im Punkte C auf der Grundebene ruhenden Kugel, deren größter, der Bildebene paralleler Durchſchnitt der Kreis um M iſt, unter der Annahme conſtruirt werden, daß hernach auch die Perſpective der Schattengrenze an der Kugel zu conſtruiren ſei, welche der Flamme L einer im Punkte F auf der Grundebene ſtehenden Kerze F L entſpricht. — Von den verſchiedenen anzunehmenden Hülfskreiſen, welche lothrechten Ebenen angehören, die durch den Lichtpunkt und die Kugel gehen, conſtruirt man am zweckmäßigſten, vermittelſt des einſchließenden Quadrates, zuerſt die Perſpective h E g C des größten Kugelkreiſes, deſſen Ebene, durch die Flamme und den lothrechten Kugeldurchmeſſer gehend, die Grundebene in der Linie F C ſchneidet. Verlängert man zu dem Zwecke C F bis in den Horizont, ſo iſt der Schnittpunkt φ mit dieſem der Hauptpunkt in der lothrechten Grenzlinie der eben bezeichneten Ebene, ſein Abſtand vom herabgeſchlagenen Geſichtspunkte O die Diſtanz dazu. Wegen der Auswahl des Ortes der anderen beliebig anzunehmenden Hülfskreiſe iſt es vortheilhaft, zuvörderſt unter Anwendung des Hauptpunktes P die Perſpective A k B i des horizontal liegenden größten Kugelkreiſes zu conſtruiren, da die Mittelpunkte der Hülfskreiſe in den Radien dieſes Kreiſes gefunden werden. Schneidet man danach, von M nach φ ziehend, die Kerze in F^1, ſo bezeichnen Linien, wie $v(\beta)$ und $m(\tau)$, durch die letztconſtruirte Kreisperſpective und dieſen Punkt F^1 gezogen, perſpectiviſch die Richtungen, welche die Ebenen der weiter anzunehmenden Hülfskreiſe haben ſollen, und ihre Schnittpunkte β und τ mit dem Horizonte die Hauptpunkte in den lothrechten Grenzlinien dieſer Ebenen. Um nun die Perſpective etwa des Hülfskreiſes conſtruiren zu können, deſſen Ebene die des größten horizontalen Kugelkreiſes in der Linie m n ſchneidet, bedarf es der Ermittelung der Perſpective ſeines Mittelpunktes und der ſeines lothrechten Halbmeſſers. Jene findet man, wenn man den Verſchwindungspunkt ϱ für alle zu der m n rechtwinkligen horizontalen Linien ſucht und dann von ϱ durch M den Radius M s zieht, im Schnittpunkte p deſſelben mit der m n. Stellt man aber unter Anwendung des Theil-

punktes t_ϱ (für den in ϱ verſchwindenden Radius) in $M p^1$ die geometriſche Länge des Stückes $M p$ dar, und ſchneidet mit einer durch p^1 lothrechten Ordinate den gegebenen Kugelkreis in q^1, ſo iſt $p^1 q^1$ die geometriſche Länge des geſuchten Halbmeſſers, die nun durch eine von t_ϱ durch q^1 gezogene Linie perſpectiviſch in $p q$ übertragen wird. Die Perſpective $m q n r$ des Hülfskreiſes kann hiernach vermittelſt des einſchließenden Quadrates conſtruirt werden, deſſen eines Seitenpaar im Hauptpunkte τ der durch τ lothrechten Grenzlinie verſchwindet. — So auch iſt der dem Hülfskreiſe $v t w u$ entſprechende Mittelpunkt z gefunden, indem $v w$ durch den zu ihr perſpectiviſch normalen Radius $M x$ in z geſchnitten wurde; und der Halbmeſſer $z u$ wurde beſtimmt, indem $A B$ durch eine Linie, vom Theilpunkte t_ε (für den Radius $M x$) durch z gezogen, im Punkte z^1 geſchnitten, und dann die Länge einer durch z^1 lothrechten Ordinate $z^1 u^1$ vermittelſt deſſelben Theilpunktes perſpectiviſch in $z u$ übertragen wurde.

Durch die äußerſten Punkte der ſo conſtruirten Hülfskreis-Perſpectiven kann ſchließlich die elliptiſche Perſpective der Kugel ſelbſt gezeichnet werden und kann man außerdem durch Tangenten, aus dem Lichtpunkte an dieſe Kreiſe gezogen, in letzteren Punkte beſtimmen, durch welche die Grenze des Schattens an der Kugel geht.

§. 246. Wäre hier nicht Kerzenlicht, ſondern das der Sonne, wenn dieſe z. B. hinter der Bildebene ſtände, gegeben worden, ſo würde ſich die Löſung ſehr vereinfachen. Es würden dann nämlich die auf der Kugeloberfläche anzunehmenden lothrechten Hülfskreiſe wegen der unendlichen Entfernung der Sonne mit einander parallel ſein. Stände die Sonne z. B. lothrecht über dem rechts im Horizonte liegenden Punkte φ, ſo würde dieſer der Hauptpunkt der einen Grenzlinie für alle Hülfskreis-Ebenen ſein; die Mittelpunkte der Hülfskreiſe lägen ſämmtlich in dem zu $M\varphi$ perſpectiviſch normalen horizontalen Kugeldurchmeſſer, und ihre lothrechten Halbmeſſer wären als Ordinaten aus der Perſpective eines lothrechten Kreiſes zu entnehmen, deſſen Ebene normal zu $M\varphi$ iſt.

§. 247. Fordert die Aufgabe außer der Conſtruction der Kugel ſelbſt auch die gewiſſer Meridianlinien auf der Oberfläche derſelben, ſo conſtruirt man entweder die Perſpectiven der Kreiſe, denen die Meridianlinien angehören, mittels der ſie einſchließenden Quadrate nach Anleitung des §. 223, um dann durch die äußerſten Punkte jener die elliptiſche Kugelperſpective aus freier Hand zu zeichnen, oder man conſtruirt, wenn die Hauptpunkte der Ebenen, welchen dieſe

Kreiſe angehören, zu entfernt fallen, die Perſpectiven mehrerer beliebig angenommenen — wenn die Meridianlinien lothrechten Kugelkreiſen angehören — horizontalen Kreiſe der Kugeloberfläche, wie dies Fig. 61 (Taf. 9) zeigt, zeichnet um dieſe die Perſpective der Kugel, und conſtruirt dann die Durchgangspunkte der Meridianlinien durch jene Kreiſe folgendermaßen:

Sind in Fig. 62 (Taf. 9) der größte Kreis um M und die drei §. 248.
kleineren Kreiſe die Grundrißprojectionen der Kugel und der in Fig. 61 perſpectiviſch conſtruirten ſieben horizontalen Kugelkreiſe — wozu P in Fig. 57 der Haupt- und D^1 ein Diſtanzpunkt iſt — und iſt die gerade Linie M E in Fig. 62 die Grundrißprojection einer Meridianlinie, deren Perſpective in Fig. 61 conſtruirt werden ſoll, ſo zieht man im Grundriſſe von den Schnittpunkten E, L, R u. ſ. w. der Meridianlinie mit den Kreiſen Ordinaten gegen den Durchmeſſer A B und conſtruirt die Perſpectiven derſelben, indem man die Maße M ε, M λ u. ſ. w. aus Fig. 62 in die entſprechenden Kreisdurchmeſſer der Fig. 61, in m ε, m λ u. ſ. w. überträgt und dann von P Linien durch die Punkte ε, λ u. ſ. w. zieht; es kann dann durch die Schnittpunkte r, l, e, l u. ſ. w. dieſer perſpectiviſchen Ordinaten mit den Kugelkreiſen die Perſpective der verlangten Meridianlinie gezeichnet werden.

Ohne Anwendung der horizontalen Kreisperſpectiven, die hier zugleich §. 249.
zur Zeichnung der Kugelperſpective ſelbſt dienen ſollten, kann man die Punkte e, t u. ſ. w. auch erzielen, wenn man die Ordinatenlängen E ε, L λ u. ſ. w. aus Fig. 62 geometriſch auf die entſprechenden Durchmeſſer in Fig. 61 in ε ε^1, λ λ^1 u. ſ. w. überträgt und hier die perſpectiviſchen Ordinaten durch Linien, aus D^1 durch ε^1, λ^1 u. ſ. w. gezogen, ſchneidet.

Beiſpiel 19.

Aufgabe. Es iſt in Fig. 63 (Taf. 10) in den Punkten 1 A B C §. 250.
E R G H J K der halbe, der Bildebene parallele Verticaldurchſchnitt eines geſchweiften Thurmdaches gegeben — es ſollen, außer der Perſpective des letztern um ſeine perſpectiviſch vorliegende Achſe 1 K, die Durchſchnittsfiguren des Daches mit einigen ſolchen lothrechten Ebenen conſtruirt werden, welche durch die Sonne gehen, deren Perſpective lothrecht über einem rechts außerhalb der Figur im Horizonte gegebenen Punkte F (Sonnen-Fußpunkt) angenommen iſt. P in Fig. 64 ſei der Hauptpunkt und $PD/_2$ die halbe Diſtanz.

§. 251. **Ausführung.** Man nimmt in verſchiedenen Höhen des Daches, an charakteriſtiſchen Stellen deſſelben, horizontal liegende Kreiſe an, wie z. B. diejenigen, welche den bei der Bezeichnung des Verticaldurchſchnittes genannten Punkten entſprechen und deren Mittelpunkte durch die Ziffern 1 bis 9 bezeichnet ſind, conſtruirt deren Perſpectiven und zeichnet durch die äußerſten Punkte derſelben die Perſpective des Daches aus freier Hand — ein Verfahren, welches ſchon bei der Conſtruction des Cylinders, des Kegels und der Kugel angewandt wurde und überhaupt bei der Conſtruction der Perſpectiven aller Umdrehungsflächen anwendbar iſt.

§. 252. Um hiernach etwa diejenige Durchſchnittsfigur zu conſtruiren, welche das Dach mit einer durch ſeine Achſe und den gegebenen Punkt f gehenden Ebene bildet, hat man nur von f aus Linien durch die Mittelpunkte 1, 2, 3 u. ſ. w. zu ziehen, wonach die Schnittpunkte derſelben mit den entſprechenden Kreisperſpectiven Punkte der gedachten Durchſchnittsfigur ſind. — Um eine andere, z. B. die in der Figur durch kurze Striche bezeichnete Durchſchnittsfigur zu conſtruiren, nimmt man in den der Bildebene parallelen Durchmeſſern der angenommenen Kreiſe eine Reihe lothrecht über einander liegender Punkte, wie z. B. die Punkte 11, 12, 13 u. ſ. w., an, ſchneidet, von f durch dieſe Punkte ziehend, wieder die entſprechenden Kreiſe und zeichnet dann durch die Schnittpunkte die Durchſchnittsfigur. — Noch ein anderer Durchſchnitt, wie z. B. der durch ſtarke Punkte bezeichnete, ergiebt ſich, wenn man abermals eine andere Reihe lothrecht über einander liegender Punkte 17, 18 u. ſ. w. in den Kreisdurchmeſſern annimmt, von f aus Linien durch dieſe Punkte zieht und die ſich hierdurch in den Kreisperſpectiven ergebenden Schnittpunkte durch eine Curve verbindet.

§. 253. Hätte die Aufgabe die Durchſchnittsfiguren ſolcher lothrechten Ebenen mit dem gegebenen Objecte verlangt, welche ſämmtlich durch einen nicht in unendlicher Entfernung, wie die Sonne und Punkt f, ſondern in der Nähe befindlichen Punkt, z. B. die Flamme einer Kerze gehen, ſo wäre die Conſtruction, wie das folgende Beiſpiel zeigt, der vorigen entſprechend.

Beiſpiel 20.

§. 254. **Aufgabe.** In Fig. 64 (Taf. 10) iſt die Perſpective eines auf der Grundebene ſtehenden normalen **Kegels** gegeben, wozu P der Hauptpunkt und $PD/_2$ die halbe Diſtanz iſt — es ſollen deſſen Durchſchnittsfiguren mit einigen ſolchen lothrechten Ebenen conſtruirt werden, die durch den Lichtpunkt L der in F auf der Grundebene ſtehenden lothrechten Kerze LF gehen.

Ausführung. Man conſtruirt zunächſt die Perſpectiven mehrerer, §. 255.
am beſten in gleichen Abſtänden über einander liegenden horizontalen Kreiſe des Kegels, wie dies in der Figur um die Mittelpunkte a, a^1, a^2 und a^3 geſchehen iſt, und bezeichnet dann in der Kerze die mit dieſen Mittelpunkten je in perſpectiviſch gleicher Höhe liegenden Punkte F, F^1, F^2 und F^3, indem man etwa von P durch a den zur Bildebene normalen Durchmeſſer der Grundfläche zieht, denſelben von F aus durch eine der Bildebene parallele Linie ſchneidet, im Schnittpunkte eine Lothrechte errichtet, dieſelbe durch von P aus durch die anderen Kreismittelpunkte gezogene Durchmeſſer ſchneidet und die Abſtände dieſer letzteren Schnittpunkte vermittelſt der Bildebene paralleler Linien in die Kerze in F^1, F^2 und F^3 überträgt. Die Schnittpunkte b, c, e, c^1 und b der letztgezogenen, der Bildebene parallelen Linien mit den Kreisperſpectiven ſind dann zunächſt ſelbſt Punkte der hyperboliſcheh Durchſchnittsfigur derjenigen lothrechten Ebene, welche, durch den Lichtpunkt L und den Kegel gehend, parallel der Bildebene iſt. — Von den Punkten F, F^1, F^2 und F^3 durch die entſprechenden Kreismittelpunkte gezogene Linien ergeben in ihren Schnittpunkten mit den Kreisperſpectiven die dreieckige Durchſchnittsfigur der durch die Kerze und die Kegelachſe annehmbaren Ebene. — Um noch eine andere Durchſchnittsfigur zu erzielen, zieht man von F eine beliebige Linie Fφ durch die Kegelgrundfläche und errichtet im Punkte φ, in welchem jene den verlängerten der Bildebene parallelen Grundflächen-Durchmeſſer ſchneidet, eine Lothrechte, welche auf den verlängerten Durchmeſſern der anderen Kreiſe die Punkte φ^1, φ^2 und φ^3 bezeichnet. Verbindet man darauf F^1 mit φ^1, F^2 mit φ^2 u. ſ. w. durch gerade Linien, ſo ſind die Schnittpunkte g, g^1, h, h^1, i, i^1 u. ſ. w. derſelben mit den Kreisperſpectiven Punkte der hyperboliſchen Durchſchnittscurve einer durch die Kerze und die Punkte g und g^1 des Kegels angenommenen lothrechten Ebene u. ſ. w.

Das hier gezeigte, bei Conſtruction lothrechter Durchſchnittsfiguren in §. 256.
allen Umdrehungsflächen zutreffende Verfahren läßt ſich für den Kegel insbeſondere um Vieles vereinfachen, wenn man in der Kegelbaſis mehrere beliebige Radien, wie etwa a q, und die ihnen entſprechenden Kegelſeiten, wie q s, zieht. Schneidet man letztere dann durch lothrechte Linien, wie n m und r t, welche in den Schnittpunkten n und r der Radien mit den Schnittlinien F b^1 und F g^1 der angenommenen lothrechten Ebenen mit der Grundebene errichtet werden, ſo ſind die Schnittpunkte m und t außer b und b^1 und g und g^1 Punkte der geſuchten Curven.

Beiſpiel 21.

§. 257. **Aufgabe.** Es iſt in Fig. 65 (Taf. 10) das Profil eines **Ringes um eine Treppenſpindel** und das eines **Stufengeſimſes** gegeben, welches an den Ring ſtößt — es ſoll in Fig. 66, wozu P der Hauptpunkt, D ein Diſtanzpunkt, z einer der Verſchwindungspunkte der horizontalen Stufenkanten und *dg* der Diagonalpunkt hierzu iſt, die Perſpective der Schnittfigur **(Gehrung)** des Ringes mit dem Stufengeſimſe und der **Gehrung** des letztern über der lothrechten Stufenkante conſtruirt werden.

§. 258. **Ausführung.** Die Perſpective des Ringes wird vermittelſt horizontaler Kreiſe ſeiner Oberfläche conſtruirt. In der Figur liegen die Perſpectiven von fünf ſolchen in gleichen Abſtänden über einander angenommenen Kreiſen vor, durch deren äußerſte Punkte die Perſpective des Ringes gezeichnet iſt. — Um die Perſpectiven der beiden Gehrungen des Stufengeſimſes zu erzielen, iſt es vortheilhaft, zuvor den perſpectiviſchen Hülfsgrundriß ſowohl des Ringes und der in ihm angenommenen Kreiſe, als der Stufe mit den in Fig. 65 durch die Linien 4 H, 3 S und 2 V geſchiedenen Stücken ihres Geſimsvorſprunges zu conſtruiren. Nachdem man deshalb aus dem links außerhalb der Conſtruction liegenden Verſchwindungspunkte y durch den Achspunkt a° die perſpectiviſche Grundrißprojection $a^\circ k^\circ$ der Setzſtufe gezogen, werden auf dem der Bildebene parallelen Durchmeſſer des Ringes die einzelnen Stücke des Geſimsvorſprunges, wie ſie in Fig. 65 im Zuſammenhange mit den Ringkreiſen vorgeführt ſind, in 2, 3, 4 geometriſch aufgetragen und vermittelſt des dem Verſchwindungspunkte z entſprechenden Theilpunktes tz auf eine von z durch a° gezogene Linie perſpectiviſch übertragen, wonach Linien, von y durch die übertragenen Punkte gezogen, perſpectiviſche Grundrißprojectionen der in dem Geſimsvorſprunge angenommenen Stücke Q H, H S, S V u. ſ. w. ſind. Steht dann in k° die lothrechte Kante der Stufe auf der Grundebene, ſo ergiebt eine vom Diagonalpunkte *dg* durch k° gezogene Linie die Grundrißprojection der Gehrung des Stufengeſimſes über dieſer Kante. Errichtet man hierauf in den Schnittpunkten g°, b°, c° u. ſ. w. der zuvor genannten Grundrißprojectionen (der in dem Geſimſe angenommenen Stücke) mit den Grundrißprojectionen der Kreiſe lothrechte Linien, ſo ſchneiden dieſe die entſprechenden Kreiſe der Ringperſpective ſelbſt in ſolchen Punkten g, b, c u. ſ. w., durch welche die Perſpective der Gehrung zwiſchen Ring und Stufengeſims gezeichnet werden kann, während man die Perſpective k v s h q der Gehrung

über der lothrechten Stufenkante findet, wenn man von y aus durch die ebengefundenen Punkte g, b, c u. ſ. w. Linien zieht, und dieſe durch lothrechte Linien aus den entſprechenden Punkten der Gehrung k° q° des Grundriſſes ſchneidet.

Beiſpiel 22.

Conſtruction der Perſpectiven der Gurt- und Gratbogen in Kreuzgewölben.

Aufgabe. Es ſind in Fig. 67 (Taf. 10) die Perſpectiven a, b, c und d der zu einander wie die Eckpunkte eines Quadrates gelegenen vier Kämpferpunkte der Bogen, und in dem Halbkreiſe aib die mit der Bildebene zuſammenfallende Wölbungslinie eines aus zwei gleichen Cylindern beſtehenden **Kreuzgewölbes** gegeben — es ſollen die Perſpectiven der die Kämpferpunkte verbindenden Gurt- und Gratbogen conſtruirt werden. P iſt der Hauptpunkt, D ein Diſtanzpunkt. §. 259.

Ausführung. Der Gewölberaum, in welchem ſich die beiden Cylinder kreuzen, hat die Höhe a e, ſeine horizontale Ausdehnung iſt, wie die Lage der vier Kämpferpunkte zu einander, quadratiſch. Denkt man ſich demnach horizontale Ebenen durch ihn gelegt, ſo ſchneiden dieſelben ſeine Grenzen in Quadraten, in deren Seiten je einzelne Punkte der Gurtbogen, und in deren Diagonalen die entſprechenden Punkte der Gratbogen liegen müſſen. Eine derartige durch den höchſten Punkt i der gegebenen Wölbungslinie angenommene Ebene begrenzt zunächſt den Gewölberaum oberhalb in dem Quadrate e f g h. Zieht man nun die Diagonalen dieſes Quadrates, ſo muß der Schnittpunkt m derſelben die Perſpective des Schnittpunktes der beiden Gratbogen, halbirt man aber die Seiten dieſes Quadrates in i, k, n und l, ſo müſſen dieſe Punkte die Perſpectiven der höchſten Punkte der Gurtbogen ſein. Nimmt man ferner durch einen beliebigen Punkt q der Wölbungslinie eine horizontale Ebene an, ſo ſchneidet dieſe die Grenzen des Gewölberaumes in einem Quadrate, deſſen Perſpective r s t u iſt. Zieht man in dieſem Quadrate wieder die Diagonalen und ſchneidet dieſelben durch Linien, von q und q^1 nach P gezogen, ſo ſind die Schnittpunkte v, w, z u. ſ. w. Punkte der Perſpectiven der Gratbogen, während, wenn man durch dieſe Punkte horizontale, mit der Ebene der Wölbungslinie a i b parallele Linien legt, deren Schnittpunkte x, y u. ſ. w. mit den Quadratſeiten wieder entſprechende Punkte der Perſpectiven der Gurtbogen ſind u. ſ. w. Die ſo entſtandenen Hülfslinien i n, l k, q w, §. 260.

x z u. ſ. w. ſind nichts anderes, als entſprechend liegende Cylinderſeiten, in deren Schnittpunkten ſich die Gratbogen ergeben.

§. 261. Kann man ſich des perſpectiviſchen Hülfsgrundriſſes bedienen, ſo vermeidet man die Fülle von Hülfslinien im Gewölberaume.

Iſt z. B. a° b° c° d°. in Fig. 68 (Taf. 10) der perſpectiviſche Grundriß des Gewölberaumes zweier ſich kreuzenden, verſchieden gekrümmten Gewölbecylinder, deren weiterer die mit der Bildebene zuſammenfallende Wölbungslinie a i e b, und deren kleinerer, bei derſelben Höhe, nur die Hälfte der Spannung von jenem hat, ſo bezeichnet man in der Wölbungslinie außer ihrem höchſten Punkte i mehrere beliebige andere Punkte, wie z. B. e, überträgt dieſelben vermittelſt lothrechter Linien in den Hülfsgrundriß in i° und e°, und zieht hier von ihnen Linien nach P, welche die Diagonalen des perſpectiviſchen Rechtecks a° b° c° d° in den Punkten m°, l° und h°, und die Rechtecksſeite c° d° in den Punkten n° und g° ſchneiden. Zieht man dann durch dieſe Schnittpunkte lothrechte Linien, ſo ſchneiden dieſe wieder von den Punkten i und e des Aufriſſes nach P gezogene Linien 1) in m, welcher der Schnittpunkt der Gratbogen, 2) in l und h, welche Punkte der Gratbogen ſelbſt, und 3) in n und g, welche Punkte des der gegebenen Wölbungslinie parallelen Gurtbogens n g c ſind. — Punkte der Perſpective des Gurtbogens über b c findet man, wenn man im Aufriſſe i f, e w u. ſ. w. parallel a b, und ſo auch im Grundriſſe h° r°, m° k° u. ſ. w. parallel a° b° zieht, dann von f und w Linien nach P zieht und dieſelben durch lothrechte Linien, in den Punkten k°, r° u. ſ. w. errichtet, in den Punkten k, r u. ſ. w. ſchneidet. — So hätte man auch die Punkte h und m des Gratbogens finden können, wenn man zuvor den Verſchwindungspunkt v der Diagonale b° d° feſtgeſtellt, nach ihm Linien von f und w des Aufriſſes gezogen, und dieſe durch Lothe, in den Punkten h° und m° des Grundriſſes errichtet, geſchnitten hätte.

§. 262. Die Genauigkeit der in den beiden vorhergehenden Paragraphen vorgeführten Conſtructionen iſt noch zu ſteigern, wenn man zu den gewählten Punkten der Gurt- und Gratbogen auch ihre Tangenten conſtruirt und ſich dabei wie in folgendem Beiſpiele verhält:

Soll z. B. über den in Fig. 69 (Taf. 10) perſpectiviſch gegebenen vier Kämpferpunkten M, μ, α und A, wozu P der Hauptpunkt und P D die Diſtanz iſt, die Perſpective eines Kreuzgewölbes conſtruirt werden, deſſen Wölbungslinie den in Fig. 70 beſonders vorgeführten Spitzbogen M S A bildet, ſo iſt als ein leicht conſtruirbarer Punkt dieſer Wölbungslinie außer

den Punkten M und S wohl zunächſt der Punkt K ins Auge zu faſſen, welcher in der Diagonale A E des den Spitzbogen einſchließenden Rechtecks M E J A liegt und deſſen Tangente T F iſt. Zieht man außerdem A F, ſo ſchneidet man den Bogen in einem andern Punkte G, deſſen Tangente L B iſt. Für die Gurt- und Gratbogen ſind nun wie K und G gelegene Punkte leicht vermittelſt ihrer Tangenten zu conſtruiren, wenn man für die beiderlei Bogen zuvor ſtets die ſie einſchließenden Rechtecke perſpectiviſch conſtruirt. So findet man z. B. die Perſpective M g k s, wenn man zuvor die Rechtecksperſpective M E ε μ conſtruirt, darin μ F und die Diagonalen zieht, die Punkte b und t unter Anhalt an den Punkten R und N ermittelt und dann die Linien t F und b L zieht, welche die Tangenten zu den Punkten k und g ſind. So findet man ferner z. B. die Perſpective μ γ $\varkappa$ ς einer Gratbogen-Hälfte, wenn man zuvor die Perſpective μ ε J A des diagonal ſtehenden Gratbogen-Rechtecks conſtruirt, darin A φ und die Diagonalen zieht, die Punkte τ und β ermittelt, und dann die Linien τ φ und β λ zieht, welche die Tangenten zu den Punkten $\varkappa$ und γ ſind u. ſ. w. Der Punkt τ iſt hierbei ein gemeinſchaftlicher Punkt der Tangenten zu den vier Punkten der Gratbogen, welche dem Punkte K des Spitzbogens entſprechend gelegen ſind.

§. 263. Sind die Wölbungslinien und die Höhen der ſich kreuzenden Gewölbecylinder ſo verſchieden, daß die Gratbogen nicht zwei quer gegenüberliegende, ſondern zwei neben einander liegende Kämpferpunkte verbinden, ſo geſchieht die Conſtruction ebenfalls nach Anleitung der vorhergehenden Paragraphen.

Soll z. B. — wenn P in Fig. 71 (Taf. 11) der Haupt- und D ein Diſtanzpunkt iſt, und das Stück Kreisbogen um den Mittelpunkt M die mit der Bildebene zuſammenfallende Wölbungslinie des einen Cylinders, und die neben der Conſtruction vorliegende krumme Linie A B C E die Hälfte der Wölbungslinie des andern Cylinders iſt — die Perſpective der den beiden Cylindern entſprechenden, die Kämpferpunkte a und n verbindenden Gratcurve conſtruirt werden, ſo überträgt man die Abſciſſenlängen A H, A G und A F perſpectiviſch in a h, a g und a f; von da vermittelſt lothrechter Linien in $a^\circ h^\circ$, $a^\circ g^\circ$ und $a^\circ f^\circ$ des perſpectiviſchen Hülfsgrundriſſes und zieht hier durch h°, g° und f° horizontale Linien; man trägt ferner die Ordinatenlängen H B, G C und F E geometriſch in a β, a γ und a ε des Aufriſſes auf, zieht hier $\beta\beta^1$, $\gamma\gamma^1$, $\varepsilon\varepsilon^1$ horizontal, und überträgt dann die Punkte β^1, γ^1 und ε^1 durch lothrechte Linien in $\beta^{1\circ}$, $\gamma^{1\circ}$ und $\varepsilon^{1\circ}$ des Grundriſſes. Zieht man darauf von letzteren Punkten Linien nach P, ſo

ſchneidet man damit die durch h°, g° und f° horizontalen Linien in den Punkten b°, c° und e° des Grundriſſes der geſuchten Gratcurve, und legt man durch dieſe Punkte lothrechte Linien, ſo ſchneidet man von den Punkten β^1, γ^1 und ε^1 nach P noch zu ziehende Linien in den Punkten b^1, c^1 und e^1, durch welche die Perſpective der Gratcurve nunmehr gezeichnet werden kann.

Auch kann man ſogleich im Aufriſſe durch die Punkte h, g und f lothrechte Linien ziehen und damit von β, γ und ε nach P gezogene Linien in den Punkten b, c und e ſchneiden. Horizontale Linien, durch letztere gelegt, ſchneiden dann ebenfalls die von β^1, γ^1 und ε^1 nach P gezogenen Linien in denſelben Punkten der Gratcurve.

Oder endlich, man zieht eine Linie von M nach P, ſchneidet damit durch h, g und f horizontal gezogene Linien in M^1, M^2 und M^3, und ſchlägt um dieſe Punkte, weil die Wölbungslinie des großen Cylinders ſelbſt ein Kreisſtück iſt und hier ihre Ebene mit der Bildebene zuſammenfällt, Kreisbogen mit den Radien $M^1 h$, $M^2 g$ und $M^3 f$, wodurch man die von β^1, γ^1 und ε^1 nach P gezogenen Linien ebenfalls in den genannten Punkten b^1, c^1 und e^1 der Gratcurve ſchneidet.

§. 264. Eine den in der vorhergehenden Aufgabe behandelten Curven verwandte krumme Linie führt die nachfolgende Aufgabe in der Curve vor, welche dort der Schnitt des Kanals mit der Mauer des cylindriſchen Ausbaues bildet.

Beiſpiel 23.

§. 265. **Aufgabe.** Neben der Fig. 72 (Taf. 13) ſind in halbem Maßſtabe der Auf- und Grundriß zu einem mit Zinnen verſehenen **halbkreisförmigen Ausbau** an einer Schälungsmauer gegeben. Die Bildebene ſteht, um 19° von letzterer abweichend, durch die Achſe A des Ausbaues, der Hauptpunkt liegt 2 Fuß links von A, die Diſtanz beträgt $18\frac{1}{2}$ Fuß — es ſoll im doppelten (d. h. in dem oberhalb der Conſtruction gegebenen) Maßſtabe des Grundriſſes, bei einer Horizonthöhe von $12\frac{1}{3}$ Fuß über dem Waſſerſpiegel (Punkt a der Conſtruction), die Perſpective des Ausbaues nebſt einer darin befindlichen Oeffnung eines cylindriſchen **Kanals** conſtruirt werden, deſſen halbkreisförmige Wölbungslinie CFW in der Conſtruction um den Mittelpunkt a^2 vorliegt.

Ausführung. Nachdem der Horizont gezogen, darin der Hauptpunkt P beſtimmt, 2 Fuß rechts von dieſem die lothrechte Perſpective der Achſe des Ausbaues gezogen und darin $12^1/_3$ Fuß unterhalb des Horizontes die Höhe der Grundebene (hier der Waſſerſpiegel) bezeichnet worden, werden vermittelſt des herabgeſchlagenen Geſichtspunktes O der Verſchwindungspunkt z für die horizontalen Kanten der Schälungsmauer, und der Verſchwindungspunkt y für die zu dieſer normalen Linien, ſowie die den beiden Verſchwindungspunkten entſprechenden Theilpunkte tz und ty feſtgeſtellt. Hiernach werden die aus dem Aufriſſe entnehmbaren Höhen der einzelnen Theile des Ausbaues auf der Achſe vom Punkt a aufwärts in a^1, a^2, a^3 u. ſ. w. geometriſch aufgetragen und um dieſe Punkte die Perſpectiven der Kreisſtücke, welche die horizontalen Kanten der einzelnen Theile des Ausbaues bilden und wozu der Aufriß ebenfalls die Durchmeſſer geometriſch darbietet, conſtruirt. Der Vorſprung der entſprechenden Theile der durch die Achſe gehenden Schälungsmauer wird vermittelſt eines ebenfalls an der Achſe zu conſtruirenden perſpectiviſchen Profiles, deſſen Ebene nach y gerichtet iſt und durch deſſen Eckpunkte nachher die Kanten der Schälungsmauer nach z gezogen werden, beſtimmt. Die Schnittpunkte dieſer Kanten mit den entſprechenden des Ausbaues ergeben die Gebrung zwiſchen letzterem und der Schälungsmauer. §. 266.

Um die Eintheilung der um den Punkt a^6 liegenden Kreisperſpectiven in Zinnen und Zwiſchenräume perſpectiviſch auszuführen, wird, entſprechend dem in §. 193 bei der Conſtruction der Perſpective des zehnſeitigen Vogelhauſes eingeſchlagenen Verfahren, zuvor auf einem Halbkreiſe B C E, der den Durchmeſſer des äußeren Kreiſes der Zinnenkrone hat und deſſen Mittelpunkt F am zweckmäßigſten in der verlängerten Achſe angenommen wird, dieſe Eintheilung geometriſch ausgeführt; es werden zu den hierdurch feſtgeſtellten Punkten, wie K^1, J^1, H^1 u. ſ. w., die Ordinaten, wie K^1 K, J^1 J, H^1 H u. ſ. w., gezogen und an dem mit der Ebene der Schälungsmauer zuſammenfallenden Durchmeſſer b e die Perſpectiven dieſer Ordinaten conſtruirt. Ihre Schnittpunkte mit der größeren Kreisperſpective um a^6 müſſen dann perſpectiviſch die Anordnung der Zinnen ergeben. Zu dem Zwecke werden die Abſciſſenlängen, wie F K, F J, F H u. ſ. w. auf dem durch a^6 und in der Bildebene liegenden Durchmeſſer geometriſch aufgetragen, es werden die dadurch bezeichneten Punkte mittels des Theilpunktes tz auf den nach z gerichteten Durchmeſſer b e in k, i, h u. ſ. w. perſpectiviſch übertragen, und nun durch letztere Punkte von y aus die Perſpectiven k k^1, i i^1, h h^1 u. ſ. w. der Ordinaten gezogen. Durch die Schnittpunkte k^1, i^1, h^1 u. ſ. w. derſelben ſind nunmehr die lothrechten Zinnen- §. 267.

kanten lothrecht, die oberen horizontalen Kanten radial nach a^6 zu ziehen, u. ſ. w.

Die perſpectiviſche Eintheilung der um Punkt a^4 liegenden Kreisperſpective in Kragſteine und Zwiſchenräume geſchieht auf dieſelbe Weiſe, nachdem zuvor die Peripherie des Halbkreiſes B C E um F entſprechend geometriſch eingetheilt worden, durch Conſtruction der Perſpectiven $m\,m^1$, $l\,l^1$ u. ſ. w. der Ordinaten $M\,M^1$, $L\,L^1$ u. ſ. w. Die ſchiefen Kanten der Kragſteine, wie z. B. q r, welche in einer Kegelfläche liegen, ſind, wie der Aufriß zeigt, nach einem $6^3/_4$ Fuß unter dem Waſſerſpiegel in der Achſe liegenden Punkte N, der Spitze dieſes Kegels, gerichtet, und ihre Perſpectiven werden demnach auch ſämmtlich von n aus gezogen.

§. 268. Um die Perſpective der Kanalöffnung zu conſtruiren, wird die halbkreisförmige Wölbungslinie C T W des Kanalcylinders geometriſch um den in der Achſe des Ausbaues (alſo in der Bildebene) liegenden Punkt a^2 geſchlagen, und darauf perſpectiviſch in die Ebene der Schälungsmauer gewendet. Um dies auszuführen, zieht man beliebige lothrechte Ordinaten $E\,E^1$, $S\,S^1$ u. ſ. w., überträgt die Abſciſſenlängen $a^2\,E^1$, $a^2\,S^1$ u. ſ. w. und $a^2\,C$ mittels des Theilpunktes tz perſpectiviſch auf eine von z durch a^2 gezogene Linie in $a^2\,e^1$, $a^2\,s^1$ u. ſ. w. und $a^2\,c^1$, errichtet in den Punkten e^1, s^1 u. ſ. w. lothrechte Ordinaten und ſchneidet dieſelben ebenfalls durch Linien, von tz durch E, S u. ſ. w. gezogen, in e, s u. ſ. w., wonach eine durch c^1, e, s u. ſ. w. gezeichnete Curve die perſpectiviſch gewendete Wölbungslinie iſt. Zieht man hiernach durch die Fußpunkte a^2, s^1, e^1 u. ſ. w. der Ordinaten und durch c^1 zu der Schälungsmauer perſpectiviſch normale, d. h. nach y gerichtete Linien, ſo ſchneiden dieſe die um a^2 conſtruirte, dem Ausbaucylinder angehörige Kreisperſpective in den Punkten a^7, s^2, e^2 u. ſ. w. Errichtet man endlich in dieſen Punkten abermals lothrechte Linien (Ordinaten) und ſchneidet dieſelben durch andere, von y aus durch die Punkte T, s, e u. ſ. w. gezogene Linien in den Punkten t^3, s^3, e^3 u. ſ. w., ſo ſind dieſe nebſt c^2 Punkte der geſuchten Perſpective der Kanalöffnung.

§. 269. Das in dieſem Beiſpiele gezeigte Verfahren, um auf der Perſpective einer krummen Linie eine beliebige Theilung perſpectiviſch auszuführen, iſt auch anzuwenden bei der Conſtruction der Perſpectiven von Zähnen an Maſchinenrädern, von Fenſteröffnungen und lothrechten Steinfugen an runden Thürmen, Cannelirungen an Säulen u. dgl. m. Doch iſt in dieſen Fällen wohl auch das Verfahren in Betracht zu ziehen, welches in dem weiter unten folgenden Beiſpiele 25 bei der Eintheilung des perſpectiviſchen Hülfsgrundriſſes

des Treppenwangen-Cylinders angewandt ist. Dort ist nämlich (s. §. 276 und Fig. 74 und 75 [Taf. 12]) zuvor im geometrischen Grundrisse dieses Cylinders der Ort der Traillen und auch die Anordnung der Stufen geometrisch festgestellt und sind durch die Traillen u. s. w. hindurch Radien bis zu den Schnittpunkten mit den Seiten des die Cylinderprojection einschließenden Quadrates gezogen worden; es sind darauf im perspectivischen Hülfsgrundrisse die Perspectiven dieser Schnittpunkte construirt und von ihnen Radien nach dem perspectivischen Mittelpunkte des Cylinders gezogen worden, und ergaben dann die Schnittpunkte der letzteren mit der Perspective der Cylinderperipherie die perspectivische Eintheilung dieser in Traillen u. s. w.

Beispiel 24.

Aufgabe. Es ist neben Fig. 73 (Taf. 11) in $\frac{1}{4}$-Maßstab Grund- und Aufriß der **Spitzbogen-Einfassung** um eine 5 Fuß breite Kirchenthür-Oeffnung und außerdem in $\frac{1}{1}$-Maßstab der verzierte Querdurchschnitt dieser Einfassung ausführlicher gegeben — es soll über der durch die Perspectiven a und a^1 der Kämpferpunkte gehenden, im Hauptpunkte P der Construction verschwindenden Linie die Perspective der Spitzbogen-Einfassung construirt werden. Der Horizont liegt um 2 Fuß $8\frac{1}{2}$ Zoll des beigefügten Maßstabes unterhalb des Punktes f der Construction, P liegt $9\frac{1}{6}$ Fuß links von der durch Punkt f lothrechten Linie, die sehr kurze Distanz beträgt 14 Fuß $1\frac{1}{2}$ Zoll, die Bildebene steht durch die durch Punkt f lothrechte Linie. §. 270.

Ausführung. Um der Mühe des Construirens jeder einzelnen Kante und Fuge der verzierten Einfassung zu entgehen, vereinfacht man das Profil derselben etwa in der Weise, wie dies in der Figur geschehen ist, zu einer aus geraden Linien bestehenden Figur A B ε C K J M L R ϱ, construirt die Perspective der Einfassung unter Annahme dieses vereinfachten Durchschnittes, und zeichnet darin schließlich die vollständige Verzierung aus freier Hand ein. §. 271.

Denkt man sich von allen Punkten der Kanten B, C, J, L, R und der Fugen K und M (A und ε liegen selbst an der Wand) dieser vereinfachten Einfassung normale Linien gegen die Kirchenwand gefällt, so bilden die Fußpunkte derselben an der Wand eine Gruppe von Spitzbogen, wie sie

der Aufriß in $^1/_4$-Maßſtab giebt und deren Anordnung in den Punkten A, β, γ, ε, ι, $\varkappa$, λ, μ, ϱ des Profiles in $^1/_1$-Maßſtab vorliegt. Conſtruirt man die Perſpectiven dieſer Spitzbogen, und in beliebigen Punkten von ihnen die Perſpectiven der gedachten Normalen, ſo müſſen deren Endpunkte Punkte der Perſpectiven jener Kanten und Fugen ſelbſt ergeben. Die Conſtruction der Spitzbogengruppe an der Wandfläche geſchieht am zweckmäßigſten, wenn man im Aufriſſe mehrere lothrechte Ordinaten, wie dort $Z^0 Z^8$ eine iſt, durch die Bogen zieht und dann in der Conſtruction die Perſpectiven dieſer Ordinaten und aller der Punkte Z, Z^1, Z^2 u. ſ. w. ſucht, in welchen ſie im Aufriſſe die Bogen ſchneiden. Die in die Linie ϱ P fallenden Kämpferpunkte der Spitzbogengruppe werden am ſicherſten durch geometriſche Auftragung in (α), (β), (γ) u. ſ. w. auf die durch Punkt f horizontale Linie, und durch perſpectiviſche Uebertragung von da vermittelſt des Diſtanzpunktes D^1 auf die Linie ϱ P, feſtgeſtellt.

Hiernach findet ſich nun zunächſt die Perſpective s t der Gehrung S T in der Spitze der Einfaſſung, wenn man durch alle Spitzpunkte der an der Wand conſtruirten Spitzbogen zur Wand normale, d. h. hier geometriſch horizontale Linien zieht, und dieſen die entſprechenden, aus dem vereinfachten Profile direct entnehmbaren Längen ϱ R, μ M, λ L u. ſ. w. geometriſch giebt. — Um darauf Punkte zu den Perſpectiven der vorragenden Kanten ſelbſt zu gewinnen, z. B. einen Punkt wie r^3, müßte man durch den Punkt ϱ^3 des entſprechenden größten Spitzbogens rechts an der Wand eine zu dieſer normale Linie $\varrho^3 r^3$ ziehen, und derſelben die im gegebenen Profile geometriſch vorliegende Länge ϱ R perſpectiviſch geben, ein Verfahren, deſſen Umſtändlichkeit bei ſo zahlreichen Punkten, wie hier offenbar gebraucht werden, nur dadurch zu verringern iſt, daß man ſich für den Vorſprung aller Stücke der Einfaſſung gewiſſermaßen eine perſpectiviſche Scala ſchafft. Zu dem Zwecke conſtruirt man aus dem weiter unten erſichtlichen Grunde die Perſpective g des Punktes G, in welchem der eine der beiden kleinſten Spitzbogen zum vollen Quadranten ausläuft, ſchneidet, von g nach P ziehend, die durch f lothrechte Linie in a^2 und conſtruirt an letzterer oberhalb a^2 in der Figur $a^2 \ldots\ldots m^2 l^2 r^2 \varrho^2$ eine geometriſche Wiederholung des gegebenen vereinfachten Profiles derart, daß r^2 dem Punkte R, ϱ^2 dem Punkte ϱ, und a^2 dem Punkte A entſpricht. In der Figur iſt, um ſie nicht zu verwirren, dieſes Profil nur zum Theil vorgeführt. Zieht man dann von P aus Linien ſowohl durch die zwiſchen a^2 und ϱ^2 neuerdings beſtimmten Punkte, als auch durch r^2, l^2, m^2 u. ſ. w., ſo bilden dieſe Linien die gedachte Scala. Dieſelbe iſt nun folgendermaßen zu benutzen: Will man zu einem Punkte, wie z. B. ϱ^3, die perſpectiviſche Länge der Normale $\varrho^3 r^3$ haben, ſo lothet man von ihm bis zu dem entſprechenden Punkte ϱ^4 der

Scala in die Höhe, zieht dort $\varrho^4 r^4$ normal zur Wandfläche, und macht dann $\varrho^3 r^3$ geometrisch gleich $\varrho^4 r^4$. Statt nun jedoch die perspectivischen Längen der Normalen zu beliebigen einzelnen Punkten auf diese Art zu ermitteln, ist es zweckmäßiger, systematisch gelegene Punkte hierzu auszuersehen, und zwar solche wie ϱ^3, μ^3, λ^3, $\varkappa^3$, ι^3, u. s. w., nämlich in einer Linie radial zu dem gegenüberliegenden Kämpferpunkte a^1 gelegene ins Auge zu fassen und daran sogleich ein ganzes radial gelegenes perspectivisches Profil zu construiren. Nachdem man deshalb zuvor $\varrho^3 \varrho^4$ lothrecht, $\varrho^4 \alpha^4$ radial nach a^1, und dann $\varrho^4 r^4$, $\mu\, m^4$, $\lambda^4 l^4$, $\varkappa^4 k^4$ u. s. w. horizontal gezogen, ist in der Scala ein Vorsprungsprofil $r^4 l^4 m^4 \ldots . b^4 a^4$ erzielt worden, durch dessen Eckpunkte man nur lothrechte Linien zu ziehen hat, um damit auf den durch die Punkte ϱ^3, μ^3, λ^3 u. s. w. gezogenen Horizontalen die perspectivischen Profilpunkte r^3, l^3, m^3 u. s. w. abzuschneiden. In der Figur liegen mehrere so construirten perspectivischen Profile, durch deren Eckpunkte nachher die Perspectiven der eigentlichen Spitzbogen gezeichnet sind, vor, unter anderen auch die in der Höhe der Kämpferpunkte gelegenen Profile, wie $a\, r\, \varrho$.

Es leuchtet nunmehr ein, daß die Scala in der Höhe des Punktes g angefangen werden mußte, damit die in ihr zu construirenden Hülfsprofile auch richtig radial zu den gegenüberliegenden Kämpferpunkten, wie die Hauptprofile in der Spitzbogen-Verzierung selbst, lagen.

Beispiel 25.

Aufgabe. Es sind in Fig. 74 (Taf. 12) als zu einer umfassenderen Construction gehörig gegeben der Horizont durch den Hauptpunkt P, 5 Fuß 6 Zoll darunter die Grundlinie $z z^1$, darin in den Punkten (0), (1′), (2′) u. s. w. der Fußmaßstab, und in 13 Fuß 2 Zoll Distanz der herabgeschlagene Gesichtspunkt O. Construirt vorhanden ist die Perspective der **Ecke eines Saales**, oben an der Decke bezeichnet durch den Winkel $x^2 w^1 x^3$, auf dem Fußboden durch den Winkel $x\, w\, x^1$, und durch die lothrechte Ecklinie $w w^1$, welche mit der Verticale der Construction zusammenfällt. Als bekannt vorausgesetzt und übrigens aus der Figur erkennbar sind die Maße einer in derselben Saalecke angebrachten, in die obere Etage führenden **Wendeltreppe**, deren Achse A = 1 Fuß 5 Zoll links von der Verticale und 3 Fuß 10 Zoll vor der Grundlinie auf dem Fußboden (der Grundebene) steht — es soll die Perspective der Wendeltreppe construirt werden. §. 272.

§. 273. Es kann dieſe Aufgabe als ein Beiſpiel zu dem in §. 14 Geſagten dienen, daß man wegen gewiſſer Vortheile beim Conſtruiren bei einer und derſelben Darſtellung für nähere oder entferntere Objecte eine nähere oder entferntere Hülfs-Bildebene neben der gegebenen annehmen könne. Da nämlich wegen der Geſtalt des hier gegebenen Objectes, der ſchraubenartigen Treppe, die perſpectiviſche Conſtruction derſelben offenbar am beſten von ihrer lothrechten Achſe (ſ. §. 170) ausgeht, auf welcher, nach dem ihrem perſpectiviſchen Orte entſprechenden Maßſtabe gemeſſen, alle Höhenmaße aufgetragen werden können, ſo iſt es hier gerathen, durch die Achſe eine beſondere Hülfs-Bildebene anzunehmen und dieſelbe folgendermaßen perſpectiviſch zu orientiren:

§. 274. **Ausführung.** Nachdem, der in der Aufgabe gegebenen Beſchreibung gemäß, die Perſpective a des Fußpunktes der Achſe conſtruirt worden, wird durch a eine dem Horizonte parallele Linie $y\,y^1$ gezogen, die Grundlinie der angenommenen Hülfs-Bildebene. Auf ihr wird, vermittelſt von P durch die Punkte (0), (1′), (2′) u. ſ. w. des gegebenen Fußmaßſtabes zu ziehender Linien, der ihr entſprechende perſpectiviſch vergrößerte Fußmaßſtab in den Punkten 0, 1′, 2′ u. ſ. w. hergeſtellt. Da die gegebene Augenhöhe von 5 Fuß 6 Zoll ſelbſtverſtändlich dieſelbe bleiben muß und in der That auch der gegebene Horizont und der Hauptpunkt ebenſowohl nach dem neuen Maßſtabe 5 Fuß 6 Zoll über der neuen Grundlinie $y\,y^1$, wie nach dem gegebenen Maßſtabe über der gegebenen Grundlinie $z\,z^1$ liegen, ſo bleiben dieſe auch für die Hülfs-Bildebene dieſelben. Ebenſo bleibt der herabgeſchlagene Geſichtspunkt O derſelbe; denn da ſeine Diſtanz vom Hauptpunkte 13 Fuß 2 Zoll des alten Maßſtabes beträgt, muß dieſelbe nach geſchehener Näherrückung der Bildebene um 3 Fuß 10 Zoll nunmehr 9 Fuß 4 Zoll des neuen Maßſtabes ausmachen.

Man ſieht, daß die Annahme einer Hülfs-Bildebene neben der gegebenen im Grunde nur auf eine perſpectiviſch angemeſſene Aenderung der Größe des Maßſtabes hinausläuft.

§. 275. In Fig. 75 (Taf. 12) liegt der dem neuen Maßſtabe entſprechende geometriſche Grundriß der Saalecke $X\,W\,X^1$, der Wendeltreppe um ihren Achspunkt A, und die geometriſche Orientirung der beiden Bildebenen vor. Von den fünf Kreiſen darin bedeutet der kleinſte erſte den Spindelcylinder der Treppe, der nächſtgrößere zweite die ringartig um die Spindel

ſortgeſetzten Geſimſe der Stufen, der dritte die innere Fläche des Wangencylinders, der vierte die äußere Fläche deſſelben, der fünfte den Vorſprung der Stufengeſimſe außerhalb des äußern Wangencylinders, und mögen hiernach dieſe Kreiſe auch fernerhin der erſte, zweite u. ſ. f. genannt bleiben. Von den je drei die Stufen darſtellenden Linien bedeutet die eine ſtets die Rückfläche der Setzſtufe, die zweite radial zur Spindelachſe ſtehende die Vorderfläche der Setzſtufe, die dritte den Vorſprung des Stufengeſimſes, und mögen dieſe Linien nach dieſer Reihenfolge auch fernerhin kurz als erſte, zweite und dritte Stufenlinie bezeichnet werden.

§. 276. Zur Conſtruction der Treppe ſelbſt übergehend, wird zunächſt um einen innerhalb der verlängerten Achſe etwa 3 Fuß unterhalb a anzunehmenden Punkt a° ein perſpectiviſcher Hülfsgrundriß der Treppe, nämlich die Perſpective des eben erläuterten geometriſchen Grundriſſes conſtruirt. Von den hierbei zu verwendenden, die Kreiſe einſchließenden Quadraten iſt in der Figur nur das des vierten Kreiſes vorgeführt. Die perſpectiviſchen Richtungen der je drei Stufenlinien und die perſpectiviſchen Orte der Traillen werden dadurch gefunden, daß man zunächſt von jenen ſtets die zweite im geometriſchen Grundriſſe bis zu ihren Schnittpunkten mit den Seiten des Quadrates des vierten Kreiſes verlängert, durch die Traillen aber Radien vom Achspunkte A bis in die Seiten deſſelben Quadrates zieht, und dann in der Perſpective dieſes Quadrates die Perſpectiven jener Schnittpunkte vermittelſt des Diſtanz- und des Hauptpunktes conſtruirt. Zieht man dann Linien von dieſen perſpectiviſchen Schnittpunkten radial nach a°, ſo ſind die einen die Perſpectiven der zweiten Stufenlinien, die anderen ergeben die perſpectiviſchen Orte der Traillen zwiſchen dem dritten und vierten Kreiſe. Für die letzteren bedarf es, da ſie ſich diametral gegenüberſtehen, überhaupt nur ſechs Schnittpunkte. Verlängert man die eben conſtruirten zweiten Stufenlinien bis in den Horizont, ſo ſchneiden ſie dieſen in den Verſchwindungspunkten der Längenkanten der Setzſtufen, nach welchen nunmehr auch die Perſpectiven der erſten und dritten Stufenlinien, hernach aber auch die Perſpectiven der entſprechenden Stufenkanten des perſpectiviſchen Aufriſſes gezogen werden. In der Figur haben dieſe Verſchwindungspunkte die Bezeichnung v nebſt den Ziffern der Stufen, deren Längenkanten in ihnen verſchwinden; ſo iſt z. B. $v^{1.\ 7.\ 13.\ 19.}$ der Verſchwindungspunkt der Längenkanten der erſten, ſiebenten, dreizehnten und neunzehnten Stufe. Die erſten und dritten Linien derjenigen Stufen, deren Verſchwindungspunkte zu weit außerhalb des Conſtructionsraumes fallen, wie etwa die der zweiten, dritten, achten und neunten Stufe, werden einzeln vermittelſt der Perſpectiven der Schnittpunkte ihrer Verlängerungen mit den

Seiten der den vierten und den zweiten Kreis im geometriſchen Grundriſſe einſchließenden Quadrate conſtruirt.

§. 277. Für den perſpectiviſchen Aufriß der Treppe wird zunächſt von dem Punkte a der Achſe aufwärts die Stufenhöhe von $7\frac{1}{3}$ Zoll des neuen Maßſtabes 20 mal aufgetragen und werden dieſe Höhen, um Verwirrung zu vermeiden, über a anfangend, einzeln mit 1^a, 2^a, 3^a u. ſ. f. numerirt, wobei 9^a in den Horizont fallen muß. Unterhalb jedes einzelnen dieſer Punkte wird ſogleich die $1\frac{1}{2}$ Zoll betragende Dicke der Stufenauftritte bezeichnet, wie z. B. in 7^e und 8^e. Hiernach werden nun zuvörderſt die Perſpective der cylindriſchen, 5 Zoll dicken Spindel, und nach Anleitung des §. 258, Beiſpiel 21, die Perſpectiven der 8 Zoll Durchmeſſer habenden Ringe, in welchen die Stufengeſimſe ſich um die Spindel fortſetzen, conſtruirt, wobei zu erinnern iſt, daß in der vorliegenden Figur das Stufengeſims-Profil nicht, wie in Beiſpiel 21, ein Karnies, ſondern ein Viertelſtab iſt, und daß hier der erſte Spindelring unterhalb bis zum Fußboden als 8 Zoll dicker Cylinder fortgeſetzt iſt.

Bei der nun folgenden Conſtruction der Stufen, wobei dieſelben zunächſt immer ohne Geſims darzuſtellen ſind, ergeben ſich deren horizontale Längenkanten, z. B. die der erſten Stufe (des Antrittes) dadurch, daß man von dem entſprechenden Verſchwindungspunkte, hier $v^{1.\ 7.\ 13.\ 19.}$, durch a und 1^a Linien zieht. Die lothrechte Höhenkante $e\,e^1$ (welche wegen Abrundung der Stufe an dieſer Stelle überflüſſig wird) derſelben Stufe ergiebt eine Lothrechte aus dem entſprechenden Punkte e° des perſpectiviſchen Grundriſſes. Die höchſten Punkte der Gehrungen über den lothrechten Höhenkanten werden gefunden, wie an der erſten Stufe der Punkt h, indem man zuvörderſt die Perſpective der nächſt höheren, hier der zweiten Stufe, im Aufriſſe conſtruirt, im Grundriſſe von h° durch e° bis ε° zieht, letzteren Punkt vermittelſt einer Lothrechten in ε des Aufriſſes überträgt, und hier von ε durch e^1 bis h zieht. Die Perſpectiven der unteren Grenzen der Stufengeſimſe ergeben ſich in Linien, aus den entſprechenden Verſchwindungspunkten durch die die Dicke der Stufenauftritte bezeichnenden, ... ^{e} genannten Punkte gezogen.

Nach dieſem Verfahren können conſtruirt werden die Perſpectiven der 4. 5. 7. 10. 11. 12. 13. 16. 17. 19. und die 6. und 18. Stufe; hinſichtlich der beiden letzteren iſt bei den aus dem Grundriſſe zu ziehenden Lothrechten darauf zu achten, daß hier die Rückflächen der Stufen ſichtbar werden.

Da aber die Verſchwindungspunkte der 2. 3. 8. 9. 14. und 15. Stufe zu weit außerhalb des Conſtructionsraumes fallen, iſt es erforderlich,

ſie — z. B. für die zweite, vorläufig wieder ohne Geſims gedachte Stufe — dadurch entbehrlich zu machen, daß man zu den in der Spindelachſe ſchon vorhandenen einen Punkten 1^a und 2^a der Längenkanten dieſer Stufe noch zweite Punkte, wie k und k^1, conſtruirt, um dann $1^a k$ und $2^a k^1$ ziehen zu können. Zu dem Zwecke conſtruirt man entweder, wie es in der Figur für Punkt k^1 geſchehen iſt, mit dem Radius des äußeren Wangencylinders, in dem die beiden geſuchten Punkte liegen, die Perſpectiven von Stücken der um 1^a und 2^a denkbaren horizontalen Kreiſe und ſchneidet dieſelben durch eine Lothrechte aus Punkt k° in k und k^1; oder man verlängert $e e^1$ nach oben, trägt auf ihr das Maß $e e^1$ funfzehnmal — da es oben zugleich zur Conſtruction der 14. und 15. Stufe verwendbar iſt — numerirt auf, man zieht im Grundriſſe von e° durch k° bis u im Horizonte, darauf von u nach e^1, nach 2, nach 13 und 14, und ſchneidet dieſe letztgezogenen Linien durch eine Lothrechte aus Punkt k°, wodurch ſich oben die lothrechte Höhenkante der 14. Stufe, und in $k k^1$ die der 2. Stufe ergiebt, ſo daß nunmehr $1^a k$ und $2^a k^1$ gezogen werden können. Auf gleiche Art, indem man von e° des Grundriſſes durch l° bis t im Horizonte zieht und, von hier nach den Punkten 2 und 3 ziehend, die im Punkte l° ſtehende Lothrechte ſchneidet, erzielt man die lothrechte Höhenkante der 3. Stufe; ebenſo die der 15. Stufe u. ſ. w. Wollte man, um ebenſo bei der Conſtruction der lothrechten vordern (unſichtbaren) Höhenkante der 8. Stufe zu verfahren, eine Linie von e° des Grundriſſes durch m° bis in den Horizont ziehen, ſo würde ſie dieſen in einem ſehr entfernten Punkte treffen. Man errichtet deshalb wohl beſſer eine, der in e ſtehenden Lothrechten entſprechende, andere Lothrechte in einem anderen Punkte n (ſiehe auch n° des Grundriſſes) und trägt auf dieſer die dieſem Orte durch Linien, von $v^{6.\ 12.\ 18.}$ durch a, 1^a, 2^a u. ſ. w. gezogen, perſpectiviſch zuzumeſſende Stufenhöhe 19 mal numerirt auf, zieht dann von n° durch m° bis s im Horizonte, von da Linien nach den Punkten 7 und 8 für die 8., und nach Punkt 19 für den Auftritt der 19. Stufe, und ſchneidet damit auf der in m° zu errichtenden Lothrechten: in $m m^1$ die lothrechte vordere Höhenkante für die 8., und oben in m^2 einen zweiten Punkt für die Längenkante $19^a m^2$ der 19. Stufe ab. Nachdem man dann $7^a m$, und hierzu durch Punkt i, in welchem (ſiehe auch i° des Grundriſſes) die hintere Längenkante an die Spindel ſtößt, eine perſpectiviſche Parallele gezogen und dieſelbe in c durch eine Lothrechte aus c° geſchnitten, iſt die Rückenanſicht der 8. Stufe conſtruirt. Doch möchte wohl für die Conſtruction der zweiten Punkte zu den hinteren Längenkanten der 8. wie der 9. Stufe das bei Conſtruction der 2. Stufe erſtangeführte Verfahren das zweckmäßigere ſein.

Die Theile der Stufengeſimſe, welche außerhalb am Wangencylinder herumlaufen, bilden Kreisſtücke, und werden durch die Perſpectiven von Kreiſen, die, wie z. B. für die 10. Stufe horizontal um die Achspunkte 10^a und 10^c conſtruirt werden, dargeſtellt. Die radial zur Achſe ſtehenden Endflächen dieſer Geſimſe liegen in den Ebenen der Rückenflächen der nächſtoberen Setzſtufen und werden, wie o und p durch Lothrechte aus den entſprechenden Punkten o° und p° des Grundriſſes abgeſchnitten.

Für die Conſtruction der Perſpectiven der ſchraubenartigen Curven, in welchen der innere und äußere Wangencylinder unterhalb der Stufen abgeſchnitten ſind, werden diejenigen ihrer Punkte auserſehen, welche lothrecht unter den Enden der Vorderflächen der Stufen, und zwar je $5\frac{1}{2}$ Zoll darunter liegen. Es ſind dies im Grundriſſe die Schnittpunkte der 2. Stufenlinien mit dem 3. und 4. Kreiſe. Um ſie zu conſtruiren, bezeichnet man im Aufriſſe je $5\frac{1}{2}$ Zoll unterhalb der in der Achſe vorhandenen Punkte ..... 6^a, 7^a u. ſ. w. an dem Buchſtaben d erkennbare Punkte 6^d, 7^d u. ſ. w., zieht durch dieſe Punkte mit den Längenkanten der Stufen perſpectiviſch parallele Linien, und ſchneidet in denſelben durch Lothrechte aus den entſprechenden Punkten des Grundriſſes die geſuchten Punkte ab.

Die Perſpective der ebenfalls ſchraubenartigen Curve, welche das Geländer bildet, iſt am beſten vermittelſt der höchſten Punkte der Traillen zu conſtruiren. Die perſpectiviſchen Höhen der letzteren ſelbſt ergeben ſich, wenn man in irgendeinem Punkte q der durch a° des Grundriſſes liegenden Horizontalen eine Lothrechte q r von der gegebenen Traillenhöhe errichtet, und von P durch r und durch q Linien zieht. Zieht man darauf von dem Mittelpunkte jeder Traille im Grundriſſe eine Horizontale gegen P q und errichtet im Schnittpunkte eine Lothrechte, ſo ſchneidet P r auf jeder derſelben die der entſprechenden Traille zukommende perſpectiviſche Höhe ab.

Oben mündet die Treppe durch einen Cylinder, den das Loch in der Decke bildet und deſſen Durchmeſſer dem des äußeren Wangencylinders gleich iſt, in die obere Etage. Der Mittelpunkt der in der Saaldecke liegenden Grundfläche dieſes Cylinders iſt Punkt 17^a der Treppenachſe, der Mittelpunkt der in dem Fußboden der obern Etage liegenden Grundfläche iſt 19^a.

B. Conſtruction der Perſpectiven von ſchiefen Objecten.

Zehntes Kapitel.

Perſpectiven ſchiefer Linien und Ebenen.

§. 278. Linien, welche weder horizontal noch lothrecht ſind, werden ſchiefe Linien genannt. Ihre Richtung wird durch die Größe ihres Neigungswinkels zu der Grund-, der Bild- oder der Verticalebene bezeichnet. Sie können dreierlei Richtungen haben, nämlich

a) parallel der Bildebene und ſchief zur Grundebene, oder

b) parallel der Verticalebene und ſchief zur Grundebene, oder

c) ſchief zur Vertical- und zur Grundebene

ſein.

§. 279. Jede ſchiefe Linie wird als irgendeiner Ebene angehörig angeſehen und ihre Perſpective demgemäß conſtruirt. Die Perſpective ihres Verſchwindungspunktes, d. i. der Schnittpunkt des ihr entſprechenden Parallelſtrahles mit der Bildebene, iſt ſtets ein Punkt der Grenzlinien-Perſpective der Ebene, welcher die Linie angehört.

§. 280. Ebenen, welche weder der Grundebene, noch der Verticalebene, noch der Bildebene parallel ſind, werden ſchiefe Ebenen genannt.

Für die perſpectiviſche Conſtruction wird die Lage einer ſchiefen Ebene beſchrieben durch die Richtung ihrer Schnittlinie mit der horizontalen Grundebene und durch die Größe des Winkels, welchen ſie an dieſer Schnittlinie mit der Grundebene bildet, wobei dieſer Winkel ſelbſtverſtändlich als in einer lothrechten, zur Schnittlinie normalen Ebene liegend anzuſehen iſt.

§. 281. Der ſchiefen Ebenen giebt es viererlei, nämlich

a) ſolche, deren Schnittlinie mit der horizontalen Grundebene ſchief zur Verticalebene und deren Winkel mit der Grundebene ein rechter iſt;

b) ſolche, deren Schnittlinie mit der Grundebene parallel der Verticalebene und deren Winkel mit der Grundebene nicht ein rechter iſt;

c) ſolche, deren Schnittlinie mit der Grundebene parallel der Bildebene und deren Winkel mit der Grundebene nicht ein rechter iſt;

d) ſolche, deren Schnittlinie mit der Grundebene ſchief zur Verticalebene und deren Winkel mit der Grundebene nicht ein rechter iſt.

Die drei erſten Arten von Ebenen nennt man einfach-ſchief, die erſten insbeſondere lothrecht-ſchief, die unter d) angeführten doppelt-ſchief.

§. 282. Eine unbegrenzte ſchiefe Ebene wird dargeſtellt durch die Perſpective ihrer Grenzlinie, welche zugleich die aller der Ebene parallelen anderen Ebenen iſt, durch ihre Schnittlinie mit der Bildebene (d. i. ihre Grundlinie) und durch die Perſpective ihrer Schnittlinie mit der horizontalen Grundebene.

§. 283. Die **Perſpective der Grenzlinie** einer ſchiefen Ebene wird in der Regel conſtruirt durch die beiden in ihr liegenden **Perſpectiven der Verſchwindungspunkte der Schnittlinie** der ſchiefen Ebene mit der horizontalen Grundebene **und des Winkelſchenkels**, welcher die Neigung der ſchiefen Ebene zur Grundebene bezeichnet. Die Schnittlinie iſt hierbei ſelbſtverſtändlich als mit dieſem Winkelſchenkel ſowohl, wie mit der Ebene des Neigungswinkels einen rechten Winkel bildend zu behandeln.

§. 284. Doch kann die Perſpective der Grenzlinie einer ſchiefen Ebene auch durch die Perſpectiven der Verſchwindungspunkte zweier beliebigen anderen Linien conſtruirt werden, wenn dieſe als der ſchiefen Ebene angehörig bekannt ſind.

a) Lothrecht-schiefe Ebenen.

§. 285. In §. 75 ist schon die Construction der Grenzlinien-Perspective ($D^2 D^3$ in der Textfigur 21) und der Grundlinie (f b) einer (dort um 40° von der Verticalebene abweichenden) lothrecht-schiefen Ebene, des Hauptpunktes (H), der Distanzpunkte (D^2 und D^3) und des herabgeschlagenen Gesichtspunktes (O^1 oder O^2) dazu gezeigt worden. Es bleibt hier noch übrig, den Inhalt jenes Paragraphen folgendermaßen zu vervollständigen:

Der in jener Figur zuerst construirte Schnittpunkt H des Horizontes mit der Grenzlinien-Perspective ist die im vorhergehenden §. 283 erwähnte Perspective des Verschwindungspunktes der horizontalen Schnittlinie der lothrecht-schiefen Ebene mit der Grundebene. Die Perspective des Verschwindungspunktes des (an sich lothrechten) Winkelschenkels, welcher die Neigung der lothrecht-schiefen Ebene zur Grundebene bezeichnet, wird durch einen durch den Gesichtspunkt im Raume denkbaren (lothrechten) Parallelstrahl angedeutet. Da dieser der Bildebene parallel ist, so schneidet er sie in einem Punkte in unendlicher Entfernung, nach welchem eine durch H selbst gezogene lothrechte Linie ebenfalls gerichtet sein muß. Es entspricht demnach die durch H lothrecht gezogene Grenzlinie den Erfordernissen des §. 283.

§. 286. Da D^2 und D^3 (Fig. 76, Taf. 11) Distanzpunkte sind, so sind sie Theilpunkte für alle im Hauptpunkte H verschwindenden, an sich horizontalen Linien, wie c H oder g H; und zwar sind sie die in §. 102, Textfigur 25, behandelten beiden Theilpunkte; nur daß sie dort t^2 und t^3 genannt sind und in der Grenzlinien-Perspective $t^2 t^3$ einer lothrecht-schiefen Ebene liegen, deren Abweichungswinkel von der Verticalebene P O v ist.

§. 287. Soll durch die Perspective g eines der lothrecht-schiefen Ebene D^2 H c f angehörigen Punktes G die Perspective einer in derselben Ebene liegenden Linie construirt werden, welche nicht horizontal ist wie g H, sondern von dieser um einen beliebigen, etwa 30° großen Winkel abweicht, so wird, da auch ihr Parallelstrahl von dem zur lothrechten Ebene gehörigen Parallelstrahle für horizontale Linien

um denſelben Winkel abweichen muß, ihr Abweichungswinkel an $O^1 H$ in O^1, oder an $O^2 H$ in O^2 angetragen und die Grenzlinien-Perſpective dadurch in der Perſpective z des Verſchwindungspunktes der gegebenen Linie geſchnitten, deren Perſpective alsdann eine von g nach z gezogene Linie iſt.

§. 288. Soll auf g z ein gegebenes Maß, z. B. $\gamma\varepsilon$, perſpectiviſch in g e übertragen werden, ſo wird, wie bei den Conſtructionen horizontaler Linien, die Länge des Parallelſtrahles $z O^1$ oder $z O^2$ um z nach oben und unten in die Grenzlinien-Perſpective übertragen, und werden dadurch zwei Theilpunkte t_z und t_z^1 für die Linie beſtimmt. Daß hierbei das zu übertragende Maß $\gamma\varepsilon$ zuvor auf die Grundlinie b f der lothrecht-ſchiefen Ebene, oder auf eine mit jener parallele, alſo lothrechte Maßlinie (in dieſem Falle in der Länge $g\eta$) aufzutragen iſt, verſteht ſich von ſelbſt.

Daß die Perſpective des Verſchwindungspunktes für Linien, welche normal zu der lothrechten Ebene, alſo horizontal ſind, der Punkt H^1 des Horizontes iſt, daß eine durch dieſen Punkt lothrechte Linie die Grenzlinien-Perſpective für ſolche lothrecht-ſchiefen Ebenen iſt, welche normal zu der gegebenen lothrecht-ſchiefen Ebene ſind, iſt ſchon in §. 77 geſagt worden.

§. 289. Als ein hierher gehöriges Beiſpiel kann die Conſtruction der im Beiſpiele 10, §. 181, vorkommenden Frontonkanten dienen. Dieſelben ſind als Linien anzuſehen, welche in parallelen lothrechten Ebenen liegen, die ſämmtlich wie die Hauptfaçade des Gebäudes um 60° von der Verticalebene abweichen. In Fig. 77 (Taf. 11) ſind beiſpielsweiſe nur zwei jener Linien, $a^1 e^1$ und $e^1 c^1$, in Betracht genommen. Zieht man hier durch die Perſpective y des Verſchwindungspunktes der der Hauptfaçade parallelen horizontalen Linien eine lothrechte Linie, ſo iſt dieſe die Grenzlinien-Perſpective jener lothrechten Ebenen. y ſelbſt iſt der Hauptpunkt darin; der in jenem Beiſpiele t_y genannte Theilpunkt, deſſen Abſtand von y gleich der Länge des Parallelſtrahles O y (Diſtanz) iſt, iſt dazu der herabgeſchlagene Geſichtspunkt und der Horizont die (gedrehte) Verticale. Trägt man daher, um die Perſpective x des Verſchwindungspunktes zu den wie $a^1 e^1$ gerichteten, alſo um 17° über die horizontalen Frontonkanten ſteigenden Kanten zu finden,

an den Horizont oberhalb deſſelben in t_y den Winkel $P\,t_y\,x$ von 17° an, ſo ſchneidet man die lothrechte Grenzlinien-Perſpective in x. So wird auch die Perſpective u des Verſchwindungspunktes der wie $e^1\,c^1$ gerichteten, d. h. um 17° fallenden Frontonkanten dadurch gefunden, daß man denſelben Winkel an den Horizont unterhalb deſſelben in t_y anträgt und mit ſeinem angetragenen Schenkel die Grenzlinien-Perſpective ſchneidet. — Will man die perſpectiviſchen Längen der Kanten $a^1\,e^1$ und $e^1\,c^1$ nachmeſſen, ſo findet man die Theilpunkte dazu, z. B. für $a^1\,e^1$, wie für horizontale Linien, indem man nämlich die entſprechende Parallelſtrahllänge $x\,t_y$ um x in die lothrechte Grenzlinien-Perſpective überträgt; und ſo für $e^1\,c^1$, indem man die Länge $u\,t_y$ um u ebendahin überträgt. Die Grundlinie der mit der Hauptfaçade zuſammenfallenden lothrecht-ſchiefen Ebene, der die Kanten $a^1\,e^1$ und $e^1\,c^1$ angehören, iſt die lothrechte Linie $a^1\,h$ (Hauptkante) durch den Punkt h, in welchem die Hauptfaçade die horizontale Grundlinie, alſo die Bildebene ſchneidet.

b) Andere einfach-ſchiefen Ebenen.

Iſt, um die Perſpective der Grenzlinie einer der in §. 281 unter b) angeführten Ebenen zu conſtruiren, in Fig. 78 (Taf. 13) hinter der Bildebene bild die begrenzt veranſchaulichte ſchiefe Ebene ARCE gegeben, deren Schnittlinie AE mit der horizontalen Grundebene parallel der Verticalebene iſt und deren Winkel RAG mit der Grundebene durch die 50° betragende Neigung des Winkelſchenkels AR zu dem in der Grundebene liegenden andern Schenkel AG bezeichnet iſt, ſo ſind nach §. 283 die Perſpectiven der Verſchwindungspunkte der beiden Linien AE und AR zu conſtruiren, um durch ſie die Grenzlinien-Perſpective ziehen zu können. §. 290.

Die Perſpective des Verſchwindungspunktes der an ſich horizontalen, zur Bildebene normalen Linie AE iſt der Hauptpunkt P. Der Schnittpunkt ϱ aber des Parallelſtrahles $O^\circ(\varrho)$ (der mit der Bildebene parallelen Linie AR) mit der Bildebene liegt in unendlicher Entfernung; nach ihm iſt unter anderen der mit AR und der mit $O^\circ(\varrho)$ geometriſch parallelen Linien $M(\varrho)$ und $N(\varrho)$ jedenfalls auch $\Delta(\varrho)$ gerichtet und muß dieſe, da ſie zugleich durch

P und durch ϱ geht und ſomit den Erforderniſſen des §. 283 entſpricht, die Perſpective der Grenzlinie der Ebene ARCE und aller mit dieſer parallelen Ebenen ſein.

Die Schnittlinie derſelben ſchiefen Ebene mit der Bildebene, d. i. ihre Grundlinie, findet man hier, wenn man ihre Schnittlinie AE mit der Grundebene bis zu U in der horizontalen Grundlinie der Bildebene verlängert und UW durch U parallel der Grenzlinie zieht. Auf der Conſtructionsfläche jedoch findet man U, wenn man zuvor die Perſpective x eines beliebigen Punktes X der Schnittlinie AE conſtruirt, und von P durch x bis zur horizontalen Grundlinie eine Linie PU zieht, welche die unendlich lange Perſpective der Schnittlinie AE iſt. Der für die horizontale Grundlinie geltende Maßſtab gilt auch für die ſchiefe Grundlinie, da dieſe, wie jene, in der Bildebene liegt.

Da P der Fußpunkt einer aus dem Geſichtspunkte O° auf die Grenzlinie gefällten Normale iſt, ſo iſt er auch der Hauptpunkt in der ſchiefen Grenzlinie, und eine zu dieſer durch ihn gezogene Normale iſt die (gedrehte) Verticale zur ſchiefen Ebene, d. i. die Perſpective der Grenzlinie für alle zu der gegebenen ſchiefen Ebene und zugleich zur Bildebene normalen Ebenen. Da der Abſtand (die Diſtanz) des Geſichtspunktes O° vom Hauptpunkte P in der ſchiefen Grenzlinie derſelbe geblieben iſt, wie ſein Abſtand von demſelben Punkte im Horizonte, ſo fällt der herabgeſchlagene Geſichtspunkt in O^1 oder (O^1) und die Diſtanzpunkte fallen in Δ und Δ^1.

Da die Perſpective des Verſchwindungspunktes für Linien, welche, wie AQ, normal zu der gegebenen ſchiefen Ebene gerichtet ſind, der Schnittpunkt q des Parallelſtrahles O(q) mit der Bildebene iſt, letzterer aber parallel der Bildebene und insbeſondere der gedrehten Verticale iſt, ſo liegt jene Perſpective in unendlicher Entfernung in der gedrehten Verticale, und ſind daher die Perſpectiven der gedachten Linien geometriſch parallel mit dieſer zu ziehen.

Die Perſpective der Grenzlinie für Ebenen, welche zu der gegebenen ſchiefen Ebene normal ſind und deren Schnittlinien mit der horizontalen Grundebene parallel AE ſind, iſt dem Vorhergehenden nach die gedrehte Verticale, und Δ oder Δ^1

dazu der herabgeſchlagene Geſichtspunkt. Die Grundlinie der zu A R C E normalen und insbeſondere durch die Schnittlinie A E gehenden Ebene wäre eine durch U parallel der gedrehten Verticale gezogene Linie U W¹.

Faßt man hiernach die auf der Bildebene b i l d in Fig. 78 §. 291.
vorliegende Anordnung der Grenzlinie $\Delta(\varrho)$ der ſchiefen Grundlinie, des herabgeſchlagenen Geſichtspunktes O¹ u. ſ. w. zu einander ins Auge, ſo findet man, daß mit dieſen Stücken nur eine 50° betragende Drehung um den Hauptpunkt aus der gewohnten Lage ſtattgefunden hat, eine Drehung, die, um 40° fortgeſetzt, durch P eine lothrechte Grenzlinie, durch U eine lothrechte Grundlinie u. ſ. w., als einer lothrechten, der Verticalebene parallelen Ebene entſprechend, ergeben würde.

Außerdem iſt zu bemerken, daß die Perſpective der Grenzlinie §. 292.
einer Ebene gewiſſermaßen als in der Schnittlinie der Bildebene mit einer durch den Geſichtspunkt O° denkbaren P a r a l l e l e b e n e — analog der Conſtruction der Perſpective des Verſchwindungspunktes einer Linie vermittelſt des P a r a l l e l ſ t r a h l e s — gefunden angeſehen werden kann.

Iſt nun auf der Conſtructionsfläche in Fig. 79 (Taf. 13) die §. 293.
Horizontale durch P der Horizont, die durch p die horizontale Grundlinie, P O die Diſtanz, ſo iſt die durch P gezogene, um 50° von dem Horizonte abweichende Linie y Δ^1 die Perſpective der Grenzlinie der in den vorhergehenden Paragraphen beſprochenen ſchiefen Ebene; u w iſt die Grundlinie dazu, wenn die in der Figur nicht gezogene Linie P u die Perſpective der Schnittlinie der ſchiefen Ebene mit der horizontalen Grundebene iſt; P O¹ (geometriſch gleich P O, gleich P Δ, gleich P Δ^1) in der gedrehten Verticale iſt die Diſtanz, O¹ der herabgeſchlagene Geſichtspunkt; Δ und Δ^1 in der Grenzlinie ſind die Diſtanzpunkte; der auf der horizontalen Grundlinie in den Punkten 0, 1, 2, 3, 4 vorliegende Fußmaßſtab gilt auch für die ſchiefe Grundlinie durch p¹.

Nach dieſer Vorbereitung werden nun alle zu der ſchiefen Ebene §. 294.
in Beziehung ſtehenden Objecte unter Anwendung der ſchiefen Grenzlinie, der gedrehten Verticale u. ſ. w. nach denſelben Regeln con-

ſtruirt, welche für die Conſtructionen auf der horizontalen Grundebene gelten. Soll z. B. die Perſpective f k l n eines in der vorliegenden ſchiefen Ebene liegenden Quadrates von 3 Fuß Seitenlänge conſtruirt werden, deſſen vordere Ecke k = 2 Fuß hinter der Bildebene und 1 Fuß rechts von der Verticalebene liegt, und deſſen Seite k f um 55° links, Seite k l aber um 35° rechts von der Verticalebene abweicht, ſo findet man zunächſt die Perſpectiven y und z der Verſchwindungspunkte der genannten Quadratſeiten, wenn man ihre Abweichungswinkel von 55° und 35° an die gedrehte Verticale in O^1 anträgt, und mit den Parallelſtrahlen $O^1 y$ und $O^1 z$ die ſchiefe Grenzlinie ſchneidet; ty und tz ſind die Theilpunkte dazu. — Der perſpectiviſche Ort k wird gefunden, wenn man $\varkappa^1$ auf der ſchiefen Grundlinie 1 Fuß rechts von p^1, und $\varkappa^2 = 2$ Fuß links von $\varkappa^1$ bezeichnet und eine von $\varkappa^1$ nach P gezogene Linie durch eine andere, von $\varkappa^2$ nach Δ^1 gezogene, in k ſchneidet. — Die perſpectiviſche Länge von k f und k l findet man, wenn man durch k eine der ſchiefen Grundlinie parallele Maßlinie $\varphi\,\lambda$ zieht, das geometriſche Maß $\varkappa^1\varkappa^3$ von 3 Fuß durch Linien, von $\varkappa^1$ und $\varkappa^3$ nach P gezogen, in k φ perſpectiviſch überträgt, k λ geometriſch gleich k φ macht, und nun die perſpectiviſchen Längen k f und k l durch Linien, von φ nach ty, und von λ nach tz gezogen, abſchneidet u. ſ. w.

§. 295. Soll hiernach über dem Quadrate f k l n die Perſpective des Würfels conſtruirt werden, ſo iſt die Perſpective des Verſchwindungspunktes für die aufgerichteten Kanten deſſelben, da dieſe ſelbſt parallel zugleich der Bildebene und der Verticalebene ſind, in der Schnittlinie beider, d. i. in der Verticale in unendlicher Entfernung gelegen; d. h., daß die Perſpectiven der Kanten geometriſch parallel der gedrehten Verticale zu ziehen ſind. Die Länge der in k ſtehenden Kante iſt dem Orte k angemeſſen geometriſch gleich $\varkappa\,\varphi$.

§. 296. Die um den Punkt c mit dem Radius c r in der gegebenen ſchiefen Ebene conſtruirte Kreisperſpective zeigt, wie auch krumme Linien auf ſchiefen Ebenen ebenſo, wie auf horizontalen und lothrechten Ebenen conſtruirt werden.

§. 297. Soll, was die Conſtruction der in §. 281 unter c) angeführten Ebenen betrifft, die Perſpective der Grenzlinie einer ſolchen, in

Fig. 80 (Taf. 13) hinter der Bildebene bild begrenzt veranſchaulichten Ebene ARCE conſtruirt werden, deren Schnittlinie AE mit der horizontalen Grundebene parallel der Bildebene iſt, und deren Winkel RAG mit der Grundebene durch die 32° betragende Neigung des Winkelſchenkels AR zu dem in der Grundebene liegenden andern Schenkel AG bezeichnet iſt, ſo kann dieſe Perſpective nach §. 283 durch die Perſpectiven der Verſchwindungspunkte der beiden Linien AE und AR gezogen werden. AR iſt offenbar eine ſchiefe, um 32° ſteigende Linie in einer lothrechten, zur Bildebene normalen Ebene, deren Grenzlinien-Perſpective nach §. 73 die Verticale ſelbſt iſt und deren herabgeſchlagener Geſichtspunkt in D oder D^1 des Horizontes fällt. Trägt man deshalb an dieſen in D oder D^1 den 32° großen Abweichungswinkel der Linie AR von der horizontalen Linie AG an und ſchneidet die Verticale in H^1, ſo iſt dieſer Punkt die Perſpective des Verſchwindungspunktes der Linie AR. Der dem Horizonte parallele Parallelſtrahl O(ε) zu AE ſchneidet die Bildebene in unendlicher Entfernung in ε im Horizonte, ſo daß nach ε gerichtete Linien dem Horizonte geometriſch parallel zu ziehen ſind; es muß deshalb eine dem Horizonte parallele, durch H^1 gezogene Linie, da ſie zugleich durch ε geht, die Perſpective der Grenzlinie der gegebenen und aller mit ihr parallelen Ebenen ſein. Fällt man vom Geſichtspunkte O° auf ſie eine Normale, ſo ergiebt deren Fußpunkt H^1 den Hauptpunkt, wonach $H^1O°$ (gleich H^1D^1) die Diſtanz iſt und ∠ und $∠^1$ Diſtanzpunkte ſind. Die Verticale iſt, da ſie durch H^1 geht und normal zur Perſpective der Grenzlinie iſt, auch zu dieſer die Verticale und O^1 darin (H^1O^1 gleich $H^1O°$, gleich H^1D^1) der herabgeſchlagene Geſichtspunkt. Die Grundlinie U^1W^1 der ſchiefen Ebene findet ſich in dieſer Figur leicht, wenn man den Winkelſchenkel RA bis zu U^1 in der mit ihm in Einer lothrechten Ebene liegenden Linie il verlängert und U^1W^1 geometriſch parallel der Perſpective der Grenzlinie zieht. Für die Conſtruction jedoch wird ſie ermittelt, wenn man die Perſpective a eines beliebigen Punktes A der Schnittlinie AE conſtruirt, durch a die unendlich langen Perſpectiven Pa und H^1a der an A liegenden Winkelſchenkel zieht, Pa bis α in der horizontalen

Grundlinie verlängert, und den ebenfalls verlängerten Schenkel $H^1 a$ durch eine durch α der Verticale parallel gezogene Linie αU^1 in U^1 ſchneidet, worauf $U^1 W^1$ geometriſch parallel der Perſpective der Grenzlinie gezogen wird. a e aber iſt die Perſpective der Schnittlinie der ſchiefen Ebene mit der horizontalen Grundebene.

Die Perſpective des Verſchwindungspunktes für Linien, welche, wie A Q, normal zu der gegebenen ſchiefen Ebene ſind, iſt, weil ſolche Linien an ſich geometriſch parallel der Verticalebene ſind, der in der Verticale liegende Schnittpunkt H^2 des zu dem Parallelſtrahl $O^\circ H^1$ normalen Parallelſtrahles $O^\circ H^2$ mit der Bildebene. Zu demſelben Punkte gelangt man, wenn man D^1 als herabgeſchlagenen Geſichtspunkt für die Verticale anſieht, an $H^1 D^1$ in D^1 den rechten Winkel anträgt und dadurch die Verticale in H^2 ſchneidet.

Die Perſpective der Grenzlinie für Ebenen, welche zu der gegebenen ſchiefen Ebene normal und deren Schnittlinien mit der Grundebene parallel der Schnittlinie A E ſind, muß nach dem Conſtructionsverfahren, welches zu der Grenzlinie $\Delta\Delta^1$ führte, eine mit dieſer parallele, durch H^2 gezogene Linie $\delta\,\delta^1$ ſein. H^2 iſt darin der Hauptpunkt, $H^2 H^1$ dazu die Verticale, $H^2 O^\circ$ (gleich $H^2 D^1$) iſt die Diſtanz, δ und δ^1 ſind die Diſtanzpunkte, O^2 der herabgeſchlagene Geſichtspunkt. Die Grundlinie zu der zu A R C E normalen Ebene, die insbeſondere durch die Schnittlinie A E geht, iſt die Linie $U^2 W^2$, und wird dieſe wie die Grundlinie $U^1 W^1$ gefunden.

In Beziehung auf das in §. 292 Geſagte ſind in der Figur die dort erwähnten Parallelebenen bildlich veranſchaulicht.

§. 298. Iſt nun auf der Conſtructionsfläche in Fig. 81 (Taf. 14) D D^1 der Horizont, P O die Diſtanz, die Horizontale durch p die horizontale Grundlinie, ſo findet man die Perſpective der Grenzlinie der im vorhergehenden Paragraphen behandelten, ſich um 32° über die Grundebene erhebenden, hier aber unbegrenzt gedachten ſchiefen Ebene, wenn man an den Horizont in D den Winkel von 32° anträgt, die Verticale in H^1 ſchneidet und durch dieſen Punkt eine dem Horizonte parallele Linie zieht. Der Hauptpunkt iſt dann H^1, die Diſtanz H^1 D, der herabgeſchlagene Geſichtspunkt O^1, die Diſtanzpunkte ſind

Δ und Δ^1, und $u^1 w^1$ iſt, wenn a die Perſpective eines Punktes A der Schnittlinie der ſchiefen Ebene mit der Grundebene iſt, die Grundlinie, a e aber die Perſpective der Schnittlinie der ſchiefen Ebene mit der Grundebene.

Schneidet man die Verticale durch den Schenkel D H^2 eines an H^1 D in D angetragenen rechten Winkels in H^2, ſo iſt dies die Perſpective des Verſchwindungspunktes für die zu der ſchiefen Ebene normalen Linien, und zugleich der Hauptpunkt in der Perſpective $\delta\, \delta/_2$ der Grenzlinie für die Ebenen, welche normal zu der gegebenen ſchiefen Ebene und dabei parallel der Schnittlinie derſelben mit der horizontalen Grundebene ſind. H^2 D iſt die Diſtanz dazu, O^2 der herabgeſchlagene Geſichtspunkt, δ ein Diſtanzpunkt, $\delta/_2$ ein Punkt der halben Diſtanz; $u^2 w^2$ iſt die Grundlinie derjenigen Ebene, welche normal zu der gegebenen iſt und dabei die horizontale Grundebene ebenfalls in A E ſchneidet.

Da die Anwendung der ſo ermittelten Hülfslinien und -Punkte §. 299.
dieſelbe wie bei den Conſtructionen horizontaler Ebenen iſt, ſo würde, wenn die Perſpective eines auf der, in den vorhergehenden Paragraphen behandelten, ſchiefen Ebene liegenden Würfels von 4 Fuß (des auf der horizontalen Grundlinie vorliegenden Maßſtabes) Kantenlänge conſtruirt werden ſoll, deſſen Eckpunkt K = 1 Fuß links der Verticalebene und 3 Fuß hinter der Bildebene liegt, und von deſſen Kanten K L und K F die erſtere um 40°, die andere um 50° von der Verticalebene abweicht — die Perſpective k zunächſt dadurch gefunden, daß man $p^1 x^1$ gleich 1 Fuß des gegebenen Maßſtabes, $x^1 x^2$ gleich 3 Fuß macht, und dann eine von x^1 nach H^1 gezogene Linie durch eine andere, von x^2 nach dem Diſtanzpunkte Δ^1 gezogen, in k ſchneidet. — Die Perſpectiven z und y der Verſchwindungspunkte für k l und k f und für die mit dieſen parallelen anderen Kanten ergeben ſich durch die, unter den oben gegebenen Winkeln von der Verticale abweichenden Parallelſtrahlen O^1 z und O^1 y. Die perſpectiviſchen Längen von k l und k f werden beſtimmt, wenn man k φ durch Linien, nach H^1 gezogen, perſpectiviſch gleich $x^1 x^3$, dann k λ geometriſch gleich k φ macht, und darauf dieſe Längen vermittelſt der entſprechenden Theilpunkte t_z und t_y in k l und k f perſpectiviſch überträgt. — Die zu der

gegebenen schiefen Ebene normalen Würfelkanten sind nach H^2 gerichtet; ihre perspectivische Länge wird, wie z. B. die von k v, durch eine Linie, vom Distanzpunkte δ durch φ bis v gezogen, bestimmt u. s. w.

§. 300. Aus der in §. 283 enthaltenen Regel, daß die Grenzlinien-Perspective einer schiefen Ebene durch die Perspectiven der Verschwindungspunkte zweier ihr angehörigen, zu einander rechtwinkligen Linien construirt wird, von denen die eine die Schnittlinie der schiefen Ebene mit der Grundebene, die andere der Winkelschenkel ist, dessen Neigung zur Grundebene die Neigung der schiefen Ebene bezeichnet, kann gefolgert werden, daß eine Linie, durch die Perspectiven der Verschwindungspunkte zweier zu einander rechtwinkligen Linien gezogen, die Grenzlinien-Perspective der Ebene ist, in welcher die beiden Linien liegen, und ist hieraus ferner zu folgern, welche drei Linien in der eben ausgeführten Construction die Grenzlinien-Perspectiven zu den drei Paaren ebener Flächen des Würfels sind:

Von der Fläche m v i s und der ihr parallelen andern Fläche verschwinden je zwei Seiten in y, die je zwei anderen, zu jenen rechtwinkligen, in z, während eine Linie durch y und z, der Construction gemäß, die Grenzlinien-Perspective zu jenen Flächen ist. — Von der Fläche k v i l und der ihr parallelen andern Fläche verschwinden zwei Seiten in z, die zwei anderen, zu jenen normalen, in H^2; es muß deshalb die Linie H^2 z die Grenzlinien-Perspective zu diesem Flächenpaare, und aus demselben Grunde eine Linie, durch H^2 und y gezogen, die Grenzlinien-Perspective zu dem dritten Flächenpaare sein. — Die Grenzlinien-Perspective $\delta\,\delta_2$ kann als solche für den Würfel nicht in Betracht kommen, da keine von dessen Kanten parallel der Schnittlinie A E der gegebenen schiefen Ebene mit der Grundebene ist; doch sind ihre Distanzpunkte zur Bestimmung der perspectivischen Längen der in H^2 verschwindenden Kanten brauchbar. — Dem Obigen nach ist auch in Fig. 79 eine durch z, der gedrehten Verticale parallel gezogene Linie die Grenzlinien-Perspective zu der Würfelfläche k v i l, während eine ähnliche Linie durch y diese Beziehung zu der Würfelfläche k v m f hat.

Wie, um etwa Kreisperspectiven innerhalb der doppelt-schiefen

Flächen des Würfels conſtruiren zu können, die Hauptpunkte, die Diſtanzpunkte u. ſ. w. zu Grenzlinien wie $H^2 z$ und $H^2 y$ gefunden werden, iſt aus §. 307 zu erſehen.

c) Doppelt-ſchiefe Ebenen.

Soll die Perſpective der Grenzlinie einer der in §. 281 unter d) angeführten Ebenen, z. B. der in Fig. 82 (Taf. 14) begrenzt veranſchaulichten Ebene A R C E conſtruirt werden — deren Lage beſchrieben wird durch die Richtung ihrer um den 40° großen Winkel E A S von der Verticalebene abweichenden, an ſich horizontalen Schnittlinie A E mit der Grundebene, und durch die 46° betragende Neigung des Winkelſchenkels A R zu dem in der horizontalen Grundebene liegenden Winkelſchenkel A G, der ſelbſt um einen rechten Winkel von A E und deshalb um 50° von der Verticalebene abweicht — ſo iſt wieder die Grenzlinien-Perſpective dieſer ſchiefen Ebene durch die Perſpectiven der Verſchwindungspunkte der beiden Linien A E und A R zu ziehen. Es fällt davon zunächſt die durch den Parallelſtrahl $O^\circ\varepsilon$ beſtimmbare Perſpective ε des Verſchwindungspunktes der Linie A E in den Horizont. Die Linie A R kann als eine der in den §§. 287 und 289 behandelten und zwar als eine ſolche angeſehen werden, welche einer zur Schnittlinie A E normalen lothrecht-ſchiefen Ebene (der Ebene des Winkels R A G) angehört und ſich über die derſelben Ebene angehörigen horizontalen Linien, deren eine A G iſt, um den Winkel von 46° erhebt. Trägt man deshalb an P O° in O° den 50° großen Abweichungswinkel dieſer lothrecht-ſchiefen Ebene von der Verticalebene, ſo ſchneidet man den Horizont in γ; zieht man durch γ eine lothrechte Linie, ſo iſt dieſe die Grenzlinien-Perſpective der Ebene des Winkels R A G, und trägt man darauf an γO° in O° den Winkel von 46°, ſo ſchneidet man jene in ϱ, der Perſpective des Verſchwindungspunktes der Linie A R. Auf der Bildfläche (ſ. auch Fig. 83) ſelbſt wird dies nach den §§. 75 und 287 dadurch ausgeführt, daß man an P O in O den Winkel P O γ von 50° anträgt, durch den Schnittpunkt γ eine lothrechte Linie zieht, γ O um γ in den Horizont in $\gamma\omega$ überträgt, an $\gamma\omega$ in ω den Winkel von 46° anträgt, und dadurch jene Loth-

§. 301.

rechte in ϱ ſchneidet. — Eine Linie, durch ϱ und ε gezogen, iſt hiernach die Grenzlinien-Perſpective der gegebenen ſchiefen Ebene. Die zur Beſtimmung des Hauptpunktes in ihr aus dem Geſichtspunkte O° auf ſie zu fällende Normale muß offenbar in einer zur Bildebene und zu ϱ ε normalen und zugleich durch O° und P gehenden Ebene, der ſchiefen Verticalebene, liegen. Zieht man deshalb durch P eine normale Linie (die ſchiefe Verticale) zu ϱ ε, wodurch dieſe in H^1 geſchnitten wird, und darauf H^1 O°, ſo iſt dieſe die vorerwähnte Normale, ihr Fußpunkt H^1 iſt der Hauptpunkt, und H^1 O° bezeichnet die Diſtanz. Um aber die geometriſche Länge der letztern feſtzuſtellen, ſtellt man ſie geometriſch in H^1 o dadurch dar, daß man das Dreieck H^1 P O° um H^1 P aus dem Raum in die Bildebene, in H^1 P o herabſchlägt, und zu dem Zwecke hier, weil Winkel H^1 P O° unzweifelhaft ein rechter iſt, an H^1 P in P den rechten Winkel H^1 P o anträgt, P o geometriſch gleich P O° macht und die Linie H^1 o zieht. Macht man in der ſchiefen Verticale darauf H^1 O^1 gleich H^1 o, ſo iſt O^1 der herabgeſchlagene Geſichtspunkt, und macht man H^1 ⊿ in der Grenzlinien-Perſpective gleich H^1 o, ſo iſt ⊿ ein Diſtanzpunkt.

§. 302. Will man den Neigungswinkel der ſchiefen Ebene zur Bildebene ermitteln, ſo iſt zu berückſichtigen, daß derſelbe offenbar in einer zur Schnittlinie beider Ebenen (zur ſchiefen Grundlinie) normalen Ebene liegt. Eine derartige Ebene iſt die ſchiefe Verticalebene; und nimmt man durch O° innerhalb ihrer eine der Bildebene parallele, alſo eine mit H^1 P parallele Linie an, ſo bildet dieſe bei O° mit der der ſchiefen Ebene parallelen und auch innerhalb der Verticalebene liegenden Linie O° H^1 den fraglichen Winkel. Da aber dieſer wie ein Wechſelwinkel zu Winkel O° H^1 P liegt und demſelben deshalb gleich iſt, und letzterer wieder, der vorangegangenen Conſtruction gemäß, in dem Winkel P H^1 o des gleichnamigen Dreiecks geometriſch dargeſtellt iſt, ſo liegt in P H^1 o der geſuchte Neigungswinkel der ſchiefen Ebene zur Bildebene ſchon vor. Einer ähnlichen Ueberlegung zufolge iſt Winkel H^1 o P als der innerhalb der ſchiefen Verticalebene liegende Neigungswinkel der ſchiefen Ebene zur horizontalen Grundebene anzuſehen.

In Fig. 82 ergiebt der Schnittpunkt U der verlängerten Schnitt- §. 303.
linie E A mit der Bildebene einen Punkt der, übrigens der Grenz-linien-Perſpective parallel zu ziehenden, Grundlinie $p^1 w^1$. Auf der Conſtructionsfläche, Fig. 83 (Taf. 14), findet man, wenn x die Perſpective eines beliebigen Punktes X der Schnittlinie A E iſt, den Punkt u ebenfalls, wenn man von ε durch x die Perſpective der unendlich lang aufgefaßten Schnittlinie A E bis zur horizontalen Grundlinie zieht; oder einen andern Punkt w^1 der ſchiefen Grundlinie dadurch, daß man von P durch x bis w in der horizontalen Grundlinie zieht, und eine darauf von H^1 durch x gezogene Linie durch eine andere, durch w parallel der ſchiefen Verticale gezogene in w^1 ſchneidet.

Die Perſpective H^2 des Verſchwindungspunktes von Linien, welche normal zu der gegebenen ſchiefen Ebene ſind, kann man auf zweierlei Art beſtimmen:

1) ſind dieſe Linien offenbar parallel der lothrechten Ebene des Winkels R A G in Fig. 82, dabei unter einem rechten Winkel zu dem ſchiefen Schenkel A R, und unter 44° zu dem horizontalen Schenkel A G geneigt. Zieht man deshalb in Fig. 83 durch ϱ oder γ die lothrechte Grenzlinien-Perſpective für jene lothrechte Winkelebene, worin γ der Hauptpunkt und wozu ω der herabgeſchlagene Geſichtspunkt iſt, und trägt dann an ωϱ (den Parallelſtrahl zu A R) in ω einen rechten Winkel, oder an ωγ (den Parallelſtrahl zu A G) in ω einen 44° großen Winkel, ſo ſchneidet man die lothrechte Grenzlinien-Perſpective in H^2, der Perſpective des Verſchwindungspunktes der gedachten Linien;

2) ſind dieſe Linien parallel der ſchiefen Verticalebene und rechtwinklig zu dem der ſchiefen Ebene parallelen Strahl $O^\circ H^1$ in Fig. 82. Es muß deshalb ihr durch O° rechtwinklig zu $O^\circ H^1$ zu ziehender Parallelſtrahl die Bildebene in der ſchiefen Verticale ſchneiden. Sieht man demnach in Fig. 83 die ſchiefe Verticale als Grenzlinien-Perſpective an, worin P der Hauptpunkt und wozu o der herabgeſchlagene Geſichtspunkt iſt, und trägt an $H^1 o$ (gleich $O^\circ H^1$ in Fig. 82) in o den rechten Winkel an, ſo ſchneidet man die ſchiefe Verticale ebenfalls in H^2.

fahren, wie dies in Bezug auf die Ebene, zu welcher $\varrho\,\varepsilon$ die Grenzlinien-Perſpective iſt, geſchah. Eine von P auf εH^2 gefällte Normale, welche ſelbſt die entſprechende ſchiefe Verticale iſt, ergiebt nämlich in H^3 den Hauptpunkt; zieht man $P\,o^3$ parallel εH^2 und macht ſie geometriſch gleich P O (der urſprünglichen Diſtanz), und zieht dann $H^3\,o^3$, ſo iſt dieſe die Diſtanz, die, in die ſchiefe Verticale $H^3\,O^3$ übertragen, hier in O^3 den herabgeſchlagenen Geſichtspunkt ergiebt. $H^3\,O^3$ verlängert geht durch den Punkt ϱ, der Perſpective des Verſchwindungspunktes für die Linien, welche normal zu den Ebenen, wie h g n w, die εH^2 als Grenzlinien-Perſpective haben, ſind. Die Grundlinie aber der doppelt-ſchiefen Ebene, wovon h g n w ein Stück iſt, iſt die durch Punkt 3 parallel εH^2 gezogene Linie 3. 8; denn in dem Punkte 3 ſtößt die verlängerte Schnittlinie w h der Würfelfläche mit der gegebenen ſchiefen Ebene, in der Grundlinie der letztern, an die Bildebene. Ermittelt man, zur Probe, nach den bekannten Regeln, im Punkte τ der Grenzlinien-Perſpective εH^2 den Theilpunkt für die in ε verſchwindende Linie h w, und zieht von τ Linien durch h und w, ſo ſchneiden dieſe auf der neuen Grundlinie in den Punkten 7 und 8 ein den Maßen 1. 2 und 3. 4 geometriſch gleiches Maß ab.

Da ϱ die Perſpective des Verſchwindungspunktes für Linien, wie m g und h v, iſt, die zu der ſchiefen Fläche h g n w normal ſind, ſo könnte man ihn als einen Hauptpunkt auffaſſen, durch ihn eine der Linie εH^2 parallele Grenzlinien-Perſpective ziehen, in dieſer einen Diſtanzpunkt beſtimmen und damit die Richtigkeit der perſpectiviſchen Längen m g und v h nachmeſſen u. ſ. w. Ja, man hätte die ganze Perſpective des Würfels, wenn man dieſen als mit ſeiner Fläche h g n w an der doppelt-ſchiefen Ebene, deren Grenzlinien-Perſpective εH^2 und deren Grundlinie 3. 8 iſt, haftend anſieht, von der letztgenannten Grundlinie ausgehend conſtruiren können.

§. 308. Es iſt zu beachten, wie die letztconſtruirte ſchiefe Verticale $H^3\,\varrho$ zu dem Punkte ϱ zurückgeführt hat, vermittelſt deſſen die erſte Grenzlinien-Perſpective $\varrho\,\varepsilon$ conſtruirt worden, und wie hier für die dreierlei zu einander normalen ebenen Würfelflächen h v i w, h g m v und h g n w die Seiten eines Dreiecks $\varrho\,H^2\,\varepsilon$ als Grenzlinien-

Perſpectiven dienen. Normale Linien, aus den Eckpunkten dieſes Dreiecks je auf die gegenüberſtehenden Seiten gefällt, ergeben hier die Hauptpunkte und ſind ſelbſt, ſtets durch den urſprünglichen Hauptpunkt P gehend, die ſchiefen Verticalen.

§. 309. Faßt man ſchließlich die verſchiedenen Würfelflächen, die ihnen entſprechenden Grenzlinien-Perſpectiven, die Richtungen der Perſpectiven der Würfelkanten, die doch immer die Schnittlinien zweier verſchiedenen ebenen Flächen ſind, und die Linien $u\varepsilon$ und 3ε ſelbſt ins Auge, ſo wird man die Richtigkeit der für weiter unten folgende Conſtructionen hier nothwendig hervorzuhebenden Regel zugeben, daß die Perſpective der Schnittlinie zweier verſchiedenen ebenen Flächen nach dem Schnittpunkte der den beiden Flächen entſprechenden Grenzlinien-Perſpectiven gerichtet iſt.

§. 310. Nachdem ſchon in §. 296 die Conſtruction der Perſpective eines in einer ſchiefen Ebene liegenden Kreiſes gezeigt worden, bedarf es hier kaum eines wiederholten Hinweiſes auf das in §. 219 empfohlene Verfahren, die Perſpective eines Kreiſes vermittelſt der Perſpective desjenigen der ihn einſchließenden Quadrate zu conſtruiren, deſſen eines Seitenpaar parallel der Bildebene (d. i. der Grundlinie) iſt und deſſen anderes Seitenpaar im Hauptpunkte, natürlich der Grenzlinien-Perſpective derjenigen Ebene verſchwindet, welcher der Kreis angehört. Daß man nach Umſtänden auch andere einſchließenden Quadrate benutzen kann, zeigt das Beiſpiel 27, §. 318.

§. 311. Nachdem hiermit die weſentlichſten Erläuterungen für die Behandlung der ſchiefen Ebenen gegeben worden, darf bei der nunmehrigen Wiederaufnahme der Abkürzung der Ausdrücke: „Perſpective der Grenzlinie“ und „Perſpective des Verſchwindungspunktes“ in: „Grenzlinie“ und „Verſchwindungspunkt“ ein Mißverſtehen nicht mehr gefürchtet werden.

Elftes Kapitel.

Beiſpiele.

Beiſpiel 26.

§. 312. **Aufgabe.** Es ſollen die Verſchwindungspunkte der drei Syſteme von ſchiefen Linien, welche die Kanten des im Beiſpiele 15, §. 196, behandelten **umgeſtürzten Doppelkreuzes** bilden, und durch ſie die Grenzlinien der dreierlei Arten von ebenen Flächen conſtruirt werden, welche das Kreuz begrenzen.

§. 313. **Ausführung.** Die zunächſt wie R B (ſ. Fig. 38, Taf. 5) gerichteten Kanten des Kreuzes ſind, wie alle anderen Kanten deſſelben, der Conſtruction der Grund- und Aufrißprojection nach, Linien, welche ſich über die horizontale Grundebene um $35^1/_4°$ (genau $35° 15' 52''$) erheben und dabei lothrecht-ſchiefen Ebenen angehören, die dem Grundriſſe nach von der Verticalebene um 60° abweichen. Zieht man deshalb in Fig. 39 (Taf. 5) durch den rechts außerhalb der Conſtruction liegenden Verſchwindungspunkt z für horizontale, um 60° von der Verticalebene abweichende Linien eine lothrechte Linie, überträgt z O um z in den Horizont in z t_z, trägt an den Horizont oberhalb in t_z den Winkel von $35^1/_4°$ und ſchneidet dadurch die durch z Lothrechte im Punkte z^1, ſo iſt dieſer der Verſchwindungspunkt für die Linie R B und alle ihr parallelen Linien. — Ganz wie R B, nur nach der andern Seite der Verticalebene iſt die Kante U V gerichtet und wird der Verſchwindungspunkt y^1 für ſie und alle ihr parallelen Kanten wie der Punkt z^1 gefunden. — Die Kante J H neigt ſich, wie die ihr parallelen Kanten, innerhalb einer lothrechten, der Verticalebene parallelen Ebene um $35^1/_4°$ unter die horizontale Grundebene. Trägt man deshalb an den Horizont in D^1 nach unten den Winkel von $35^1/_4°$ und ſchneidet dadurch die Verticale im Punkte x, ſo iſt dieſer der Verſchwindungspunkt für J H und alle ihr parallelen Kanten. — Verbindet man hiernach die Verſchwindungspunkte x, z^1 und y^1 unter einander durch gerade Linien, ſo ſind dieſe, dem Inhalte des §. 300 nach, die Grenzlinien zu den dreierlei Arten von ebenen Flächen des Kreuzes.

§. 314. Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, inwiefern die in §. 197 ausgeführte Conſtruction der Perſpective des Kreuzes durch Benutzung der Verſchwindungspunkte für die Kanten ſich vereinfacht, und ihre Genauigkeit zu ſichern iſt. Wollte man nun aber die Perſpective des Kreuzes ganz nach der für die Behandlung ſchiefer Ebenen gegebenen Anleitung con-

ſtruiren, ſo müßte man für die dreierlei Arten von Flächen die entſprechenden Grundlinien, und für die Kanten die Theilpunkte ermitteln und verfahren, wie dies in Fig. 39 für die ebene Fläche r q c i k d f b 7. 8 h a r gezeigt iſt. Für letztere iſt x z¹ die Grenzlinie, H der Hauptpunkt, H(O¹) die ſchiefe Verticale, O/₂¹ die halbe herabgeſchlagene Diſtanz, tz¹ der Theilpunkt für die in z¹, tx der Theilpunkt für die in x verſchwindenden Linien. Da die genannte Fläche in r an die horizontale Grundlinie ſtößt, ſo iſt eine durch r parallel der Grenzlinie x z¹ gezogene Linie r 4 die Schnittlinie der Bildebene mit der Fläche, alſo deren (ſchiefe) Grundlinie. Trägt man auf dieſer in r 1, r 2 und r 4 die aus der Conſtruction der Grundrißprojection entnehmbaren geometriſchen Längen der Kantentheile R A, R 7 und R B auf und zieht von den Punkten 1, 2 und 4 nach dem Theilpunkte tz¹ Linien, ſo ſchneiden dieſe auf der in z¹ verſchwindenden Kante r b die Punkte a, 7 und b ab, während andererſeits eine vom Theilpunkte tx durch Punkt 1 gezogene Linie die in x verſchwindende Kante r q in q abſchneidet. Für die der vorigen parallele Kreuzesfläche p¹ s t u wäre eine durch u parallel der Grenzlinie gezogene Linie die Grundlinie, während die Theilpunkte tx und tz¹ auch für die Seiten dieſer Fläche gelten würden, u. ſ. w. — Die Grundlinie für eine der dritten Art ſchiefer Flächen des Kreuzes, etwa für die einfach-ſchiefe, ſich um 54¾° über die Grundebene erhebende Fläche n q f e, iſt eine durch g gezogene, der oben außerhalb des Conſtructionsraumes liegenden Grenzlinie y¹ z¹ parallele Linie; denn g iſt ein Punkt der genannten Fläche, aber auch der Bildebene, da er lothrecht über dem der horizontalen Grundlinie angehörigen Punkte r liegt. Er iſt darum ein Punkt der Schnittlinie beider Ebenen, d. h. der Grundlinie der ſchiefen Fläche n q f e.

Beiſpiel 27.

Aufgabe. Es iſt in Fig. 85 (Taf. I4) in ϱz^1 die Grenzlinie und in φn° die Grundlinie einer doppelt-ſchiefen Ebene von der Richtung, wie ſie in §. 301 behandelt worden, gegeben — es ſoll zunächſt die Perſpective I eines auf der Ebene liegenden normalen **Cylinders** conſtruirt werden, deſſen eine Grundfläche in q die Grundlinie berührt und deſſen Achſe und Seiten im Punkte y^1 der Grenzlinie verſchwinden. Der Durchmeſſer der Grundflächen ſei gleich $q n^\circ$ der Grundlinie, der Halbmeſſer alſo gleich $q m^\circ$, die Länge des Cylinders gleich 2 Grundflächen-Durchmeſſern, d. i. gleich $q \varphi$. Hernach iſt die Conſtruction der Perſpectiven II und III von **Cylindern** §. 315.

zu zeigen, welche auf Ebenen liegen, die der hier gegebenen parallel ſind.

§. 316. **Ausführung.** Schneidet man zunächſt eine Linie, von q nach y^1 gezogen, durch eine andere, vom Theilpunkte ty^1 nach φ gezogen, in q^1, ſo iſt $q\,q^1$ die Perſpective der Seite, in welcher der Cylinder die ſchiefe Ebene berührt, und zieht man von H^2 Linien durch q und q^1 und ſchneidet $H^2\,q$ durch Linien, vom Diſtanzpunkte δ^2 durch n° und m° gezogen, in n und m, ſo iſt $q\,n$ die Perſpective des zur ſchiefen Ebene normalen Durchmeſſers der vordern Grundfläche, und m darin die des Mittelpunktes. Linien, von n und m nach y^1 gezogen, ergeben auf der Linie $H^2\,q^1$ in $q^1\,n^1$ die entſprechende perſpectiviſche Durchmeſſerlänge der andern Grundfläche und in m^1 deren Mittelpunkt. — Wenn Achſe und Seiten des Cylinders in y^1 verſchwinden, ſo muß für die zur Achſe normalen Grundflächen eine Linie $z^1\,H^2$ die Grenzlinie ſein, welche durch den Punkt H^2 und durch den dem Punkte y^1 correſpondirenden Punkt z^1 geht. In dieſer Grenzlinie iſt H^3 der Hauptpunkt, δ^3 und δ^3 ſind Diſtanzpunkte; eine Linie $k\,k^1$, parallel der Grenzlinie gezogen, iſt Grundlinie für die vordere Cylinder-Grundfläche, weil ſie durch Punkt q geht; eine ebenſolche Linie, durch q^1 gezogen, iſt Grundlinie für die andere Grundfläche. — Um die Perſpective der vordern Grundfläche zu conſtruiren, kann nun die Perſpective desjenigen der ſie einſchließenden Quadrate benutzt werden, deſſen eines Seitenpaar in H^3 verſchwindet und deſſen anderes parallel der Grenzlinie $z^1\,H^2$ iſt. Um dazu das für den perſpectiviſchen Ort m geltende Durchmeſſermaß $f\,g$ zu ermitteln, zieht man von H^3 nach m, ſchneidet dadurch die Grundlinie $k\,k^1$ in i, macht $i\,k$ und $i\,k^1$ beide geometriſch gleich $q\,m^\circ$, und ſchneidet dann eine durch m parallel der Grenzlinie $H^2\,z^1$ gezogene Linie durch andere, von H^3 durch k und k^1 gezogen, in f und g. Schneidet man die letztgezogenen Linien noch durch andere, von δ^3 und δ^3 durch m gezogen, ſo kann durch die Schnittpunkte nunmehr die Perſpective des in Rede ſtehenden Quadrates gezogen werden. Die Seiten des perſpectiviſchen Quadrates ſind zunächſt ſelbſt die Tangenten an 4 Punkten der Perſpective der Grundfläche; die in den Diagonalen liegenden anderen 4 Punkte derſelben werden, wie in allen bisherigen Conſtructionen, durch die dem Halbmeſſer $m\,f$ oder $m\,g$ entſprechende Abſciſſenlänge ermittelt; ein 9. und ein 10. Punkt ſind die ſchon vorhandenen Punkte q und n ſelbſt, zu denen Linien, von z^1 durch ſie gezogen, die Tangenten ſind. — Die Perſpective der andern Grundfläche iſt in der Figur durch die Perſpective eines ſolchen einſchließenden Quadrates conſtruirt, deſſen eines Seitenpaar in z^1, und deſſen anderes Seitenpaar in H^2 verſchwindet. Es iſt dort zunächſt auf einer

durch q^1 der Grundlinie φn° parallelen Linie das Maß $q^1 \mu$ durch Linien, von q und m° nach y^1 gezogen, bestimmt, und dieses Maß nebst der ihm entsprechenden Abscissenlänge durch Linien, nach tz^1, dem Theilpunkte für die in z^1 verschwindenden Linien, gezogen, perspectivisch in die Linie $q^1 h$ übertragen. Eine Linie, von h durch m^1 gezogen, schneidet auf der von z^1 durch n^1 gezogenen Linie einen Punkt ab, durch dessen Benutzung die Perspective des einschließenden Quadrates vollendet werden kann.

§. 317. Der Figur sind die Perspectiven zweier anderen Cylinder II und III beigefügt, deren ersterer, von beliebigem Durchmesser, auf einer der schiefen Ebene, worauf Cylinder I liegt, parallelen Ebene liegend angenommen ist. Da seine Achse und Seiten wie die Würfelkanten l d und a b in Fig. 84 nach H^1 gerichtet sind, so sind seine Grundflächen Ebenen wie dort die Würfelfläche l k a f, und haben deshalb H^2 (δ^2) als Grenzlinie. Nachdem die beliebig angenommene Durchmesserlänge der Grundflächen auf einer der Grenzlinie H^2 (δ^2) parallelen Linie in v w aufgetragen und die in H^2 verschwindenden Seiten des einschließenden Quadrates, sowie der Durchmesser a b, gezogen worden, werden die letzteren durch eine vom Distanzpunkte δ^2 durch den Mittelpunkt gezogene Diagonale geschnitten und kann die Perspective des einschließenden Quadrates hiernach leicht vollendet werden. Die in den Diagonalen desselben liegenden Punkte der Grundflächen-Perspective werden durch die dem Halbmesser entsprechenden Abscissenlängen construirt. — Die Perspective der andern Grundfläche wird auf gleiche Weise construirt.

§. 318. Der Cylinder III, von dem beliebigen Durchmesser c e, ist ebenfalls als auf einer, der schiefen Ebene, worauf Cylinder I liegt, parallelen Ebene liegend angenommen. Da seine Achse und Seiten parallel der Bildebene (d. i. parallel der Grund- und der Grenzlinie der Ebene, worauf er liegt) sind, wie die Würfelkanten k l und a f in Fig. 84, so haben seine Grundflächen, wie in jener Figur die Würfelfläche f l d c, die schiefe Verticale $H^1 H^2$ als Grenzlinie, in welcher P der Hauptpunkt ist und d^1 und d^2 Distanzpunkte sind. Da der Durchmesser der Grundfläche rechts auf einer der Grund- und der Grenzlinie parallelen Linie in c e vorliegt, so ergiebt sich die Perspective desjenigen einschließenden Quadrates, dessen eines Seitenpaar in P verschwindet, durch Linien, welche aus P durch c und e und durch den Mittelpunkt gezogen, und durch andere, aus d^1 und d^2 durch den Mittelpunkt gezogen, geschnitten werden. — Als ein Beispiel dazu, daß bei der Construction einer Kreisperspective die Wahl unter den einschließenden Quadraten immerhin eine beliebige ist, §. 222, ist hier für die Grundfläche $c^1 e^1$ ein solches gewählt, dessen eines Seitenpaar, wie in der

Würfelfläche f l d c in Fig. 84, in H^1, und deſſen anderes in dem dazu correſpondirenden Punkte H^2 verſchwindet. Der Grundflächen-Durchmeſſer dazu und die dem Halbmeſſer entſprechenden Abſciſſenlängen ſind auf der zur Grenzlinie $H^1 H^2$ normalen Achſe geometriſch auf-, und von da auf den in H^1 verſchwindenden Durchmeſſer perſpectiviſch übertragen, indem dabei als Theilpunkt einer der in den §§. 102 und 286 erwähnten dritten, und vierten Theilpunkte, nämlich Δ, angewandt iſt. Wollte man bei der perſpectiviſchen Uebertragung den in der Grenzlinie $H^1 H^2$ liegenden, dem Punkte H^1 entſprechenden Theilpunkt benutzen, ſo müßte das Durchmeſſermaß vorher auf eine der Grenzlinie $H^1 H^2$ parallele Linie aufgetragen werden. Linien, von H^2 aus durch die perſpectiviſch übertragenen Punkte gezogen, ergeben das eine Seitenpaar des einſchließenden Quadrates und die ihm parallelen Ordinaten; eine Diagonale, aus dem Diagonalpunkte *dg* der Grenzlinie durch den Mittelpunkt gezogen, ergiebt Punkte, um das andere nach H^1 gerichtete Seitenpaar ziehen zu können u. ſ. w.

d) Ebenen, welche ſchief zu ſchiefen Ebenen ſind.

Beiſpiel 28.

§. 319. **Aufgabe.** In Fig. 86 (Taf. 15) iſt (ϱ)z die Grenzlinie (H^1 Hauptpunkt, O^1 herabgeſchlagener Geſichtspunkt, H^2 Verſchwindungspunkt für normale Linien) einer doppelt-ſchiefen Ebene, deren Grundlinie 1n iſt — es ſoll conſtruirt werden die Perſpective einer mit ihrer Seitenfläche S A C an der gegebenen ſchiefen Ebene haftenden, mit der Spitze S abwärts gerichteten **Pyramide**, deren Seitenflächen (geometriſch von der Länge fn) mit der quadratiſchen Grundfläche A C G B den Winkel von 60° bilden, wonach der Höhendurchſchnitt S E F der Pyramide alſo ein gleichſeitiges Dreieck iſt. Der Halbirungspunkt F der in z verſchwindenden Grundflächenkante A C liegt im Punkte f der Grundlinie 1n.

Zu derſelben Grenzlinie (ϱ)z iſt ferner die Grundlinie ur einer andern, der vorigen parallelen Ebene gegeben — es ſoll conſtruirt werden die Perſpective eines an dieſer Ebene mit einer Seite $S^1 F^1$ haftenden, mit der Spitze S^1 aufwärts gerichteten **Kegels**, deſſen Seiten (geometriſch von der Länge $f^1 u$) zur kreisförmigen Grundfläche ebenfalls um 60° geneigt ſind, wonach der Höhendurchſchnitt $S^1 E^1 F^1$ des Kegels gleichfalls ein gleichſeitiges Dreieck bildet. Die Kegel-

ſeite S^1F^1 verſchwindet im Punkte y, der Punkt F^1 liegt im Punkte f^1 der Grundlinie nr, f^1r (d. i. die Hälfte von f^1u) iſt geometriſch der Halbmeſſer der Grundfläche.

Ausführung. Da die von der Spitze S der Pyramide auf die Grundflächenkante AC gefällte Normale SF mit letzterer einen rechten Winkel bildet und mit ihr in derſelben ſchiefen Ebene liegt, ſo muß, wenn die Perſpective ac in z verſchwindet, die Perſpective sf in y der gegebenen Grenzlinie verſchwinden. — Um die Grenzlinie für die Grundfläche zu finden, iſt zu bedenken, daß, wenn der Höhendurchſchnitt SEF der Pyramide bei F einen rechten Winkel hätte, ef als eine zur gegebenen ſchiefen Ebene normale Linie in H^2 verſchwinden würde und demnach, da sf in y verſchwindet, eine Linie, durch H^2 und y gezogen, die Grenzlinie der Ebene des Höhendurchſchnittes ſein muß. Um in ihr den Verſchwindungspunkt für die der Aufgabe gemäß von sf nur um den Winkel von 60° abweichende Linie ef zu finden, iſt, da O^4 der herabgeſchlagene Geſichtspunkt zur Grenzlinie yH^2 iſt, an den Parallelſtrahl O^4y in O^4 der Winkel $yO^4\alpha$ von 60° anzutragen und die Grenzlinie yH^2 dadurch in α, dem Verſchwindungspunkte für ef und die ihr parallelen Grundflächenkanten ba und gc, zu ſchneiden. Iſt nun aber α der Verſchwindungspunkt für letztere, z der für die zu dieſen normal gerichteten Grundflächenkanten bg und ac, ſo muß eine Linie $z\alpha$ die Grenzlinie (H^5 Hauptpunkt, O^5 herabgeſchlagener Geſichtspunkt, $t\alpha$ Theilpunkt für die in α verſchwindenden Linien, fd Grundlinie) für die Grundfläche der Pyramide ſein. — Die Länge der Perſpective fs wird durch eine vom Theilpunkte ty durch n bis s gezogene Linie beſtimmt; die der fs perſpectiviſch gleiche Länge ac wird dadurch beſtimmt, daß man auf der Grundlinie lu links und rechts von f die Hälfte von fn geometriſch auf- und durch Linien, nach dem Theilpunkte tz gezogen, in fa und fc perſpectiviſch überträgt. Die perſpectiviſche Länge von fc findet man, wenn man die Grundlinie fd geometriſch gleich fn macht und vom Theilpunkte $t\alpha$ in der Grenzlinie αz durch d bis e zieht. Für die Vollendung der Perſpective der Pyramide bedarf es hiernach keiner weitern Anleitung. §. 320.

Die Grenzlinie für die Grundfläche des Kegels findet man, wenn man dieſen wie eine Pyramide behandelt, deren Grundfläche durch das die Kegelbaſis einſchließende Quadrat $a^1b^1g^1c^1$ gebildet wird. Auch bei der ferneren Conſtruction wird dann wie bei der Pyramide vorher verfahren. Es muß wieder, wenn die Kegelſeite f^1s^1 in y verſchwindet, die zu ihr rechtwinklige und mit ihr in derſelben Ebene liegende Quadratſeite a^1c^1 in z verſchwinden. Hätte nun der Höhendurchſchnitt $S^1E^1F^1$ des Kegels §. 321.

bei F einen rechten Winkel, ſo würde $e^1 f^1$ als eine zur gegebenen ſchiefen Ebene normale Linie in H^2 verſchwinden; es iſt danach, da $f^1 s^1$ in y verſchwindet, eine durch y und H^2 gezogene Linie die Grenzlinie für die Ebene jenes Höhendurchſchnittes. Um in ihr den Verſchwindungspunkt v für die der Aufgabe gemäß von $s^1 f^1$ nur um den Winkel von 60° abweichende Linie $e^1 f^1$ zu finden, iſt, da O^4 der herabgeſchlagene Geſichtspunkt zur Grenzlinie y H^2 iſt, an den Parallelſtrahl $O^4 y$ in O^4 rechts der Winkel $y O^4 \varepsilon^1$ von 60° anzutragen und die Grenzlinie y H^2 durch die Rückwärtsverlängerung des angetragenen Schenkels im Punkte v zu ſchneiden. Und wenn nun v der Verſchwindungspunkt für $e^1 f^1$ und die hiermit parallelen Quadratſeiten $b^1 a^1$ und $g^1 c^1$ iſt, die anderen Quadratſeiten $a^1 c^1$ und $b^1 g^1$ und der Durchmeſſer $h^1 i^1$ aber in z verſchwinden, ſo iſt eine Linie, durch v und z gezogen, die Grenzlinie (H^6 Hauptpunkt, O^6 herabgeſchlagener Geſichtspunkt, ty Theilpunkt für die in v verſchwindenden Linien, H^7 Verſchwindungspunkt für die zu der Kegelgrundfläche normalen Linien, wie z. B. die Kegelachſe; $f^1 d^1$ Grundlinie) für die Kegelgrundfläche. — Die perſpectiviſche Länge $f^1 s^1$ der Kegelſeite $F^1 S^1$ wird durch eine vom Theilpunkte ty nach u gezogene Linie beſtimmt; die perſpectiviſche Länge der halben Quadratſeite $f^1 e^1$ (nebſt der ihr entſprechenden Abſciſſenlänge) wird durch eine Linie, vom Theilpunkte tz nach r gezogen, feſtgeſtellt; ebenſo die Länge $f^1 a^1$. Die perſpectiviſche Länge des in v verſchwindenden Durchmeſſers $f^1 e^1$ wird durch eine vom Theilpunkte tv durch d^1 gezogene Linie beſtimmt, nachdem die Grundlinie $f^1 d^1$ geometriſch gleich $f^1 u$ gemacht worden. Zieht man hiernach noch $b^1 g^1$ durch e^1 nach z, $b^1 a^1$ und $g^1 c^1$ durch a^1 und c^1 nach v, ſo iſt $a^1 b^1 g^1 c^1$ die Perſpective eines zur Conſtruction der Kegelbaſis geeignet gelegenen, die letztere einſchließenden Quadrates. Nachdem hierin die Diagonalen gezogen, dadurch der Mittelpunkt m^1 beſtimmt und durch ihn der Durchmeſſer $h^1 i^1$ gezogen worden, kann unter Benutzung der durch die Abſciſſenlängen beſtimmbaren Punkte die Perſpective der kreisförmigen Kegelbaſis eingezeichnet werden. Tangenten, aus der Spitze s^1 an dieſe Kreisperſpective gezogen, ergeben die Perſpectiven der als Umriſſe auftretenden Kegelſeiten. Zieht man ſchließlich, zur Probe der Richtigkeit der Conſtruction, eine Linie vom Mittelpunkte m^1 durch die Kegelſpitze s^1, d. h. die Perſpective der Achſe, ſo muß dieſelbe in H^7 verſchwinden.

e) Schnittlinien ſchiefer Ebenen.

§. 322. **Die Richtigkeit der in §. 309 gegebenen Regel, daß die Perſpective der Schnittlinie zweier verſchiede-**

nen ebenen Flächen nach dem Schnittpunkte der Grenzlinien-Perspectiven beider Flächen gerichtet ist,

erweist sich außer aus den in demselben Paragraphen hervorgehobenen Beispielen schon aus den ersten Regeln für die Construction horizontaler Linien. Wie schon aus den §§. 69 und 70 hervorgeht, kann jede der horizontalen Grundebene angehörige, also horizontale Linie, welche der Verticalebene parallel ist, als zugleich einer lothrechten, der Verticalebene parallelen Ebene angehörig angesehen werden, und zwar als Schnittlinie dieser mit der horizontalen Grundebene. P ist der Verschwindungspunkt der Perspective einer solchen Linie; als Schnittpunkt aber der Grenzlinie für horizontale Ebenen (des Horizontes) mit der lothrechten Grenzlinie für alle der Verticalebene parallelen Ebenen (der Verticale) der Verschwindungspunkt für die diesen Ebenen gemeinsamen Linien, ihre Schnittlinien.

Da hiernach für die Construction einer Schnittlinie zwischen §. 323.
zwei ebenen Flächen stets einer ihrer Punkte, nämlich ihr unendlich entfernter Verschwindungspunkt, in dem Schnittpunkte der Grenzlinien beider Flächen vorliegt, so bedarf es, um die Perspective einer solchen Linie ziehen zu können, nur noch je eines zweiten ihrer Punkte. Wie ein solcher überall leicht gefunden wird, werden die nächstfolgenden Beispiele zeigen.

Der Einfachheit wegen sind in diesen Beispielen die Schnittfiguren von unbegrenzten Ebenen mit Prismen vorgeführt. Faßt man die dort vorkommenden lothrecht stehenden Prismen etwa als Bauwerke, Häuser u. dgl., und die schiefen Ebenen etwa als Dammböschungen auf, die Schnittfiguren aber der horizontalen Grundebene mit den auf schiefen Ebenen stehenden Prismen als Schnittfiguren von Wasserebenen mit schief stehenden oder umgestürzten Objecten u. s. w., so ist die praktische Anwendbarkeit des in diesen Beispielen Vorgeführten einleuchtend.

Beispiel 29.

Aufgabe. In Fig. 87 (Taf. 17) sind die Perspectiven I und §. 324.
II zweier auf der horizontalen Grundebene stehenden Prismen, und die Perspectiven III und IV zweier anderen Prismen gegeben, welche auf einer einfach-schiefen Ebene stehen.

Die Schnittlinie MP dieſer Ebene mit der horizontalen Grundebene iſt parallel der Verticalebene, der Neigungswinkel zur Grundebene beträgt 30°, ihre Grenzlinie iſt demnach $y^1 z^1$ (P Hauptpunkt, O^1 herabgeſchlagener Geſichtspunkt) — es ſollen die Perſpectiven der Durchſchnittsfiguren conſtruirt werden, welche die ſchiefe Ebene mit den erſteren Prismen bildet, und derjenigen, welche die horizontale Grundebene mit den ſchief ſtehenden Prismen bildet.

§. 325. **Ausführung.** Denkt man ſich an dem Prisma I die Fläche $a b b^1 a^1$ unbegrenzt groß, ſo ſchneidet ſie die ſchiefe Ebene in einer unendlich langen Linie, von welcher nach §. 323 ein Punkt der Schnittpunkt der Grenzlinie der gegebenen ſchiefen Ebene mit der Grenzlinie der Prismafläche iſt. Da nun von der Perſpective der erſtern in $y^1 z^1$ ein Stück vorliegt, die Perſpective der Grenzlinie der lothrechten, der Bildebene parallelen Prismafläche aber nach §. 79 in unendlicher Entfernung links, rechts, ober- oder unterhalb von P anzunehmen iſt, ſo muß der Schnittpunkt beider Grenzlinien ebenfalls in unendlicher Entfernung liegen, und eine geometriſch parallel der Grenzlinie $y^1 z^1$ gezogene Linie jedenfalls nach ihm gerichtet ſein. Ein anderer Punkt jener unendlich langen (Schnitt-) Linie muß offenbar der leicht conſtruirbare Punkt α, in welchem die verlängert gedachte Prismafläche die Schnittlinie MP ſchneidet, ſein, weil dieſer Punkt der Prismafläche und der ſchiefen Ebene zugleich angehört. Zieht man deshalb durch α eine Linie parallel der Grenzlinie $y^1 z^1$, ſo iſt dieſe die Perſpective jener unendlich langen (Schnitt-) Linie, und das Stück $a^\circ b^\circ$ von ihr das der begrenzt vorliegenden Fläche $a b b^1 a^1$ angehörige. — Die Grenzlinie der Prismafläche $e a a^1 e^1$ iſt die Verticale, der Schnittpunkt dieſer mit $y^1 z^1$ iſt P; da Punkt a° der Prismafläche $e a a^1 e^1$ und zugleich der ſchiefen Ebene angehört, ſo iſt eine von a° nach P gezogene Linie $a^\circ e^\circ$ die Schnittlinie an der Prismafläche $e a a^1 e^1$. — Zieht man noch $e^\circ g^\circ$ und $b^\circ g^\circ$ perſpectiviſch parallel $a^\circ b^\circ$ und $a^\circ e^\circ$, ſo liegt in $a^\circ e^\circ g^\circ b^\circ$ die Durchſchnittsfigur der ſchiefen Ebene mit dem Prisma I vor.

§. 326. Für das Prisma II iſt für die Fläche über lm eine Lothrechte durch z die Grenzlinie und Punkt z^1 der Schnittpunkt derſelben mit der ſchiefen Grenzlinie. Die Verlängerung der Fläche trifft die Schnittlinie MP im Punkte λ; es iſt daher das Stück $l^\circ m^\circ$ einer von λ nach z^1 gezogenen Linie die Schnittlinie an dieſer Fläche. — Die der vorigen parallele Fläche über nk ſchneidet die Linie MP im Punkte d; es iſt daher das Stück $d k^\circ$ einer von d nach z^1 gezogenen Linie die Schnittlinie an dieſer Fläche. —

Für die Fläche über l n iſt eine Lothrechte durch y die Grenzlinie, und Punkt y^1 der Schnittpunkt derſelben mit $y^1 z^1$. Die Fläche ſchneidet die Linie M P im Punkte c; es iſt deshalb die nach y^1 gerichtete Linie $1^\circ c$ die Schnittlinie an dieſer Fläche. — Zieht man noch die mit ihrer Verlängerung durch $\varkappa$ und y^1 gehende Linie $m^\circ k^\circ$, ſo iſt $1^\circ m^\circ k^\circ d c 1^\circ$ die Durchſchnittsfigur der ſchiefen Ebene mit dem Prisma II.

Die Durchſchnittsfiguren der beiden ſchief ſtehenden Prismen mit der horizontalen Grundebene werden dem Vorhergehenden entſprechend conſtruirt: §. 327.

Das Prisma III betreffend, liegt für die der Bildebene parallele Fläche über q t, wie für die Fläche a b b^1 a^1 an dem Prisma I, die Grenzlinie in unendlicher Entfernung außerhalb des Conſtructionsraumes und ebendaſelbſt auch deren Schnittpunkt mit der horizontalen Grenzlinie (dem Horizonte). In τ trifft die Verlängerung der Fläche die Schnittlinie M P; es muß daher das Stück $t^\circ q^\circ$ einer dem Horizonte parallel durch τ gezogenen Linie die Schnittlinie an der Fläche über q t ſein. — Für die Fläche über t u iſt die gedrehte Verticale die Grenzlinie, und P deren Schnittpunkt mit dem Horizonte; eine von t° nach P gezogene Linie $t^\circ u^\circ$ iſt deshalb die Schnittlinie an der Fläche.

Für die Flächen über f r und f s an dem Prisma IV ſind x x^1 und w w^1 die Grenzlinien, und daher x^1 und w^1 die Verſchwindungspunkte für die durch ϱ und φ zu ziehenden Schnittlinien. §. 328.

Beiſpiel 30.

Aufgabe. In Fig. 88 (Taf. 14) ſind die Perſpectiven I und II zweier auf der horizontalen Grundebene ſtehenden Prismen, und die Perſpectiven III und IV zweier anderen Prismen gegeben, welche auf einer einfach-ſchiefen Ebene ſtehen. Die Schnittlinie N M dieſer Ebene mit der horizontalen Grundebene, hier zufällig zugleich Grundlinie der ſchiefen Ebene, iſt parallel der Bildebene; ihr Neigungswinkel zur Grundebene beträgt 40°, ihre Grenzlinie iſt demnach w x (H^1 Hauptpunkt, H^2 Verſchwindungspunkt für normale Linien) — es ſollen die Perſpectiven der Durchſchnittsfiguren conſtruirt werden, welche die ſchiefe Ebene mit den erſteren Prismen bildet, und derjenigen, welche die horizontale Grundebene mit den ſchief ſtehenden Prismen bildet. §. 329.

Ausführung. Für die Fläche a b b^1 a^1 an dem Prisma I iſt die Verticale die Grenzlinie und deren Schnittpunkt 11^1 mit der Grenzlinie w x der gegebenen ſchiefen Ebene der Verſchwindungspunkt der zu con- §. 330.

ſtruirenden Schnittlinie $a^\circ b^\circ$, deren anderer Punkt α wieder in der Schnittlinie N M liegt. $a^\circ e^\circ$ iſt der Grenzlinie w x geometriſch parallel zu ziehen, denn der Schnittpunkt der letztern mit der Grenzlinie der Fläche $e a a^1 e^1$ liegt, wie dieſe Grenzlinie ſelbſt, in unendlicher Entfernung.

§. 331. Für die Flächen $k l l^1 k^1$ und $m l l^1 m^1$ an dem Prisma II ſind $y y^1$ und $z z^1$ die Grenzlinien, und deshalb y^1 und z^1 die Verſchwindungspunkte der durch λ^1 und λ zu ziehenden Schnittlinien $l^\circ k^\circ$ und $l^\circ m^\circ$.

§. 332. Für die Fläche über q t an dem Prisma III iſt die Verticale die Grenzlinie, H^1 der Schnittpunkt dieſer mit w x, weshalb eine Linie $t^\circ q^\circ$, von H^1 durch den Punkt τ in der N M gezogen, die Schnittlinie an der Fläche iſt. — Für die Fläche $q u u^1 q^1$ iſt h i die Grenzlinie, deren Schnittpunkt mit w x in unendlicher Entfernung liegt, weshalb $u^\circ q^\circ$ durch q° parallel der h i und der w x, d. h. horizontal zu ziehen iſt.

§. 333. Das Prisma IV betreffend, ſind w H^2 und x H^2 die Grenzlinien für die Flächen über s f und s r, und deren Schnittpunkte w^1 und x^1 mit dem Horizonte die Verſchwindungspunkte für die durch φ und ϱ zu ziehenden Schnittlinien $s^\circ f^\circ$ und $s^\circ r^\circ$.

Beiſpiel 31.

§. 334. **Aufgabe.** In Fig. 89 (Taf. 15) ſind die Perſpectiven I und II zweier auf der horizontalen Grundebene ſtehenden **Prismen**, und die Perſpectiven III und IV zweier anderen **Prismen** gegeben, welche auf einer doppelt-ſchiefen Ebene ſtehen. Die Schnittlinie M z dieſer Ebene mit der Grundebene iſt ſchief zur Verticalebene, der Neigungswinkel der Ebene zur Grundebene beträgt 45°, ihre Grenzlinie iſt demnach $y^1 z$ (H^1 Hauptpunkt, H^2 Verſchwindungspunkt für normale Linien) — es ſollen die Perſpectiven der Durchſchnittsfiguren conſtruirt werden, welche die ſchiefe Ebene mit den erſteren Prismen bildet, und derjenigen, welche die horizontale Grundebene mit den ſchief ſtehenden Prismen bildet.

§. 335. **Ausführung.** Für die Fläche über a e an dem Prisma I iſt die Verticale die Grenzlinie, p deren Schnittpunkt mit der gegebenen ſchiefen Grenzlinie und deshalb der Verſchwindungspunkt für die durch α^1 zu ziehende Schnittlinie $a^\circ e^\circ$ an der Fläche. — Für die Fläche über a b liegt die Perſpective der Grenzlinie und deshalb auch deren Schnittpunkt mit $y^1 x$ in unendlicher Entfernung, weshalb $a^\circ b^\circ$ geometriſch parallel $y^1 x$ zu ziehen iſt.

Für die Fläche über l m an dem Prisma II iſt eine Lothrechte durch y die Grenzlinie, y^1 deren Schnittpunkt mit $y^1 z$ und deshalb der Verſchwindungspunkt der durch λ zu ziehenden Schnittlinie $l^\circ m^\circ$. — Für die Fläche über l k iſt eine Lothrechte durch z die Grenzlinie, z ſelbſt deren Schnittpunkt mit $y^1 z$ und deshalb der Verſchwindungspunkt für $l^\circ k^\circ$. §. 336.

Für die Fläche über q t an dem Prisma III iſt H^2 (i) die Grenzlinie, der außerhalb der Figur liegende Punkt i deren Schnittpunkt mit dem Horizonte und der Verſchwindungspunkt für die durch τ zu ziehende Schnittlinie $q^\circ t^\circ$. — Für die Fläche über q c und die andere ihr parallele Fläche iſt die ſchiefe Verticale die Grenzlinie, P deren Schnittpunkt mit dem Horizonte, weshalb Linien, von P durch τ^1 und durch q° gezogen, die Schnittlinien an den bezeichneten Flächen ſind. γc° iſt mit $t^\circ q^\circ$ perſpectiviſch parallel; $q^\circ c^\circ \gamma \tau^1 t^\circ$ iſt die Durchſchnittsfigur an dem Prisma III. §. 337.

Für die Fläche über s f an dem Prisma IV iſt w H^2 die Grenzlinie, w^1 deren Schnittpunkt mit dem Horizonte und deshalb der Verſchwindungspunkt für die durch φ zu ziehende Schnittlinie an dieſer Fläche. — Für die Fläche über s r iſt x H^2 die Grenzlinie, x^1 deren Schnittpunkt mit dem Horizonte, weshalb eine Linie $r^\circ s^\circ$, von x^1 nach s° gezogen, die Schnittlinie an dieſer Fläche iſt. §. 338.

Handelt es ſich nicht darum, an einer ebenen Fläche eines Körpers die Schnittlinie, ſondern nur an einer ſeiner Kanten den Schnittpunkt mit der ſchneidenden Ebene zu beſtimmen, ſo kann man — da eine einzelne Linie (Kante) als verſchiedenen ebenen Flächen zugehörig angeſehen werden kann, wie z. B. jede Prismakante an ſich ſchon zwei Flächen zugleich angehört — eine Kante, wie etwa $f f^1$ an dem Prisma IV in Fig. 88, behandeln, wie die ihr parallele Kante $q q^1$ an dem Prisma III derſelben Figur, und den Punkt f° ermitteln, wie dort den Punkt q°; indem man nämlich durch eine Linie von f nach H^1 die Schnittlinie N M in φ^1, und durch eine andere Linie von P durch φ^1 die Kante $f f^1$ in f° ſchneidet. — So kann man den Punkt s° in der Kante $s s^1$ des Prisma IV in Fig. 89 ermitteln, wie den Punkt q° der mit jener parallelen Kante $q q^1$ des Prisma III derſelben Figur, indem man nämlich durch eine durch s der Grenzlinie $y^1 x$ parallel gezogene Linie die Schnittlinie M z in σ, und dann die Kante $s s^1$ durch eine von i durch σ gezogene Linie in s° ſchneidet. Doch findet man s° auch, wie den Punkt t° in der mit $s s^1$ parallelen Kante $t t^1$, wenn man die Schnittlinie M z durch eine Linie von s nach H^1 in σ^1, und daraus die Kante $s s^1$ durch eine Linie, von P durch σ^1 gezogen, ſchneidet. — So kann man an dem Prisma II (Fig. 89) den Punkt k° auch ermitteln, wenn man k $\varkappa$ parallel dem Horizonte bis $\varkappa$ §. 339.

in der Schnittlinie M z, und dann $x k^c$ parallel der Grenzlinie $y^1 z$ zieht u. ſ. w.

§. 340. Um an einem Körper, welcher von krummen Flächen begrenzt iſt, die Curve zu conſtruiren, in welcher er von einer ſchiefen Ebene geſchnitten wird, ſtellt man an ihm zuvörderſt mehrere ſolche Hülfsebenen-Durchſchnitte dar, welche leicht zu conſtruiren ſind, ermittelt dann die Schnittlinien der hierbei angenommenen Hülfsebenen mit der gegebenen ſchiefen Ebene, und dadurch in den Grenzen jener Durchſchnitte Punkte, durch welche die geſuchte Durchſchnittscurve gezeichnet werden kann — entſprechend dem in den Beiſpielen 19 und 20, für die durch lothrechte Ebenen gebildeten Durchſchnittsfiguren, gezeigten Verfahren.

Die Durchſchnittscurve einer ſchiefen Ebene mit einer Kugel kann, wegen der Regelmäßigkeit der Kugelgeſtalt, auch ohne dieſen Umweg conſtruirt werden. S. Beiſpiel 33.

Beiſpiel 32.

§. 341. **Aufgabe.** In Fig. 90 (Taf. 15) ſind die Perſpectiven I und II eines **Cylinders** und eines **Kegels**, die beide auf der horizontalen Grundebene ſtehen, und die Perſpectiven III und IV eines **Cylinders** und eines **Kegels** gegeben, die auf einer doppelt-ſchiefen Ebene liegen. Die Schnittlinie M ε dieſer Ebene mit der horizontalen Grundebene bildet den Winkel von 50° mit der Verticalebene, der Neigungswinkel der ſchiefen Ebene zur Grundebene beträgt 45°; ihre Grenzlinie iſt demnach $d^1 z^1$ (H^1 Hauptpunkt, O^1 herabgeſchlagener Geſichtspunkt, H^2 Verſchwindungspunkt für normale Linien) — es ſollen die Perſpectiven der Durchſchnittsfiguren conſtruirt werden, welche die ſchiefe Ebene mit den Körpern I und II bildet, und derjenigen, welche die horizontale Grundebene mit den Körpern III und IV bildet.

§. 342. **Ausführung.** Nimmt man, um dem §. 340 gemäß, an dem Cylinder I zunächſt einige leicht conſtruirbare Hülfsebenen-Durchſchnitte zu conſtruiren, etwa durch die Punkte g und f, welche ſchon zur Conſtruction der Perſpective der Grundfläche dienten, eine (lothrechte, der Bildebene parallele) Hülfsebene an, ſo ſchneidet dieſe die Cylinder-Grundfläche in der Linie g f und den Cylindermantel in den in g und f ſtehenden Seiten.

Von ihrer Schnittlinie aber mit der ſchiefen Ebene iſt der durch ihre Verlängerung bis zur Schnittlinie M ε hierin zu bezeichnende Punkt φ der eine Punkt, und der andere der Schnittpunkt ihrer in unendlicher Entfernung liegenden Grenzlinie mit der Grenzlinie $d^1 z^1$, wonach eine durch φ parallel der $d^1 z^1$ gezogene Linie die Schnittlinie der Hülfsebene mit der ſchiefen Ebene iſt. Deshalb ſind aber auch f° und g° in dieſer Linie Punkte, in welchen die ſchiefe Ebene die angenommene Hülfsebene und zugleich die in f und g ſtehenden Cylinderſeiten ſchneidet. Nimmt man darauf eine andere, durch die zur Conſtruction der Cylinder-Grundfläche gebrauchten Punkte f und d ſtehende, lothrechte Hülfsebene an, ſo ſchneidet dieſe den Cylinder in ſeinen in f und d ſtehenden Seiten; ihre Verlängerung trifft die Schnittlinie M ε im Punkte φ^1; der Schnittpunkt ihrer Grenzlinie D d^1 mit der Grenzlinie $d^1 z^1$ iſt d^1; eine Linie, durch φ^1 und d^1 gezogen, iſt demnach ihre Schnittlinie mit der ſchiefen Ebene, und die Punkte f° und d° darin ſind Schnittpunkte der ſchiefen Ebene mit den in f und d ſtehenden Cylinderſeiten. Durch öftere Wiederholung dieſes Verfahrens kann man auf der Cylinder-Oberfläche hinreichend viele Punkte conſtruiren, um ſchließlich durch dieſe die elliptiſche Durchſchnittsfigur der ſchiefen Ebene mit dem Cylinder I zeichnen zu können.

Das Verfahren an dem Kegel II iſt daſſelbe. Eine durch die Conſtructionspunkte h und e der Kegelgrundfläche angenommene lothrechte Hülfsebene trifft die Schnittlinie M ε im Punkte γ; eine durch γ parallel mit $d^1 z^1$ gezogene Linie iſt ihre Schnittlinie mit der ſchiefen Ebene, und die in den entſprechenden Kegelſeiten liegenden Punkte h° und e° dieſer Schnittlinie ſind Punkte der Durchſchnittsfigur der ſchiefen Ebene mit dem Kegel, ſo wie die Punkte i° und c°, welche vermittelſt einer durch die Punkte i und c der Kegelgrundfläche lothrecht angenommenen Hülfsebene gefunden ſind. §. 343.

In dem Cylinder III, welcher auf ſeiner im Punkte y^1 der ſchiefen Grenzlinie verſchwindenden Seite $r^1 r$ liegt, wird die in dieſer Seite normal zur ſchiefen Ebene ſtehende Ebene des größten Längendurchſchnittes $r q q^1 r^1$ (deren Grenzlinie $y^1 H^2$ iſt) als Hülfsebene angenommen; es wird dieſelbe bis zum Punkte ϱ in der Schnittlinie M ε verlängert, und eine Linie vom Punkte k, in welchem die Grenzlinie $y^1 H^2$ den Horizont ſchneidet, durch ϱ bis zu den Punkten r° und q° des Längendurchſchnittes gezogen, wonach dies Punkte der geſuchten Durchſchnittsfigur am Cylinder III ſind. Ebenſo werden dem Durchſchnitte $r q q^1 r^1$ parallele andere Längendurchſchnitts-Ebenen und zwar durch ſolche Punkte angenommen, mittels deren die Grundflächen-Perſpectiven conſtruirt worden; z. B. eine durch die Punkte §. 341.

ϑ und t. Es wird dieſe Ebene bis τ in der Schnittlinie M ε verlängert und darauf die durch t liegende Cylinderſeite durch eine Linie, von k durch τ gezogen, in t° geſchnitten, wonach dies ein neuer Punkt der Durchſchnittsfigur iſt, u. ſ. f. Um, wenn Punkt r° nicht ſchon vorhanden wäre, die Durchſchnittslinie p p° an der Grundfläche zu finden, wird die Ebene der letztern bis π in der Schnittlinie M ε fortgeſetzt und von π nach Punkt w, in welchem die Grenzlinie $H^2 z^1$ der Grundflächen-Ebene den Horizont ſchneidet, eine Linie gezogen, wovon alsdann das Stück p p° der Cylinder-Grundfläche angehört.

§. 345. An dem Kegel IV wird die Grundfläche bis M in der Schnittlinie M ε verlängert und von M nach Punkt x, in welchem die Grenzlinie z^1 x der Grundflächenebene den Horizont ſchneidet, eine Linie gezogen, wovon das Stück u u° die geſuchte Durchſchnittslinie der Grundfläche mit der horizontalen Grundebene iſt. Conſtruirt man hiernach der Grundfläche parallele Durchſchnitte durch den Kegel und verlängert deren Ebenen bis zur Schnittlinie M ε, z. B., wie es mit der Ebene des durch die Punkte n n° gehenden Durchſchnittes geſchehen iſt, bis ν, zieht ν x, und ſchneidet dadurch den Durchſchnitt in n und n°, ſo ſind dieſe neben u und u° neue Punkte der Durchſchnittsfigur der horizontalen Grundebene mit dem Kegel IV. Noch ein Punkt derſelben iſt s°, in welchem die Seite s^1 s, auf welcher der Kegel liegt, die Schnittlinie M ε ſchneidet.

Beiſpiel 33.

§. 346. **Aufgabe a.** In Fig. 91 (Taf. 16) iſt die Perſpective einer **Kugel** gegeben, deren mit der Bildebene zuſammenfallender größter Höhendurchſchnitt der Kreis um C iſt und deren unterſter Pol K um das Stück K p oberhalb der horizontalen Grundebene liegt. Die horizontale Linie durch Punkt S iſt die Grundlinie einer **einfach-ſchiefen**, ſich um 37° über die horizontale Grundebene erhebenden Ebene, deren Schnittlinie mit der Grundebene parallel der Bildebene iſt — es ſoll die Perſpective der Schnittfigur dieſer Ebene mit der Kugel conſtruirt werden.

§. 347. **Aufgabe b.** In Fig. 92 (Taf. 16) iſt dieſelbe **Kugel**-Perſpective gegeben; die Linie nβ iſt die Grundlinie einer **doppeltſchiefen**, ſich um $46^1/_2$° über die horizontale Grundebene erhebenden Ebene, deren Schnittlinie mit der Grundebene q ε und deren Grenzlinie demnach ϱ ε (H^1 Hauptpunkt, H^2 Ver-

ſchwindungspunkt für normale Linien) iſt — es ſoll die Perſpective der Schnittfigur dieſer Ebene mit der Kugel conſtruirt werden.

Ausführung der Aufgabe a. Da die Schnittfigur einer Ebene mit einer Kugel ein Kreis iſt, ſo bedarf es, um hier ihre Perſpective conſtruiren zu können, nur der Ermittelung des perſpectiviſchen Ortes ihres Mittelpunktes und der perſpectiviſchen Länge ihres Halbmeſſers. Die geometriſche Länge des letztern liegt in M B oder M A vor, wenn man durch Punkt S, in welchem die ſchiefe Ebene mit ihrer Grundlinie die in der Bildebene liegende lothrechte Kugelachſe L K ſchneidet, eine Linie R W zieht, welche von der horizontalen Grundlinie um den 37° großen Neigungswinkel der ſchiefen Ebene abweicht. Iſt nun $H^1 \Delta$ die Grenzlinie (H^1 Hauptpunkt, Δ Diſtanzpunkt, H^2 Verſchwindungspunkt für normale Linien) der ſchiefen Ebene, und man denkt ſich den gegebenen Höhendurchſchnitt der Kugel um die Achſe L K und mit ihm die Linie R W gedreht, bis beide in der Ebene des Neigungswinkels der ſchiefen Ebene, d. h. hier parallel der Verticalebene ſind, ſo iſt eine von H^1 durch S gezogene Linie die unendlich lange Perſpective der gedrehten Linie R W. Macht man in ihr S m perſpectiviſch gleich S M, indem man S M um S μ in die Grundlinie der ſchiefen Ebene geometriſch überträgt und dann S H^1 durch eine Linie, von μ nach Δ gezogen, im Punkte m ſchneidet, ſo iſt dieſer der perſpectiviſche Ort des Mittelpunktes der Schnittfigur. Da übrigens dieſer Punkt offenbar auch in einer zur ſchiefen Ebene normalen und durch den Kugel-Mittelpunkt C gehenden Linie liegen muß, ſo kann man ihn auch dadurch in der Linie S H^1 finden, daß man dieſe durch eine Linie, von C nach H^2 gezogen, in m ſchneidet. — Macht man nun noch $\mu\beta$ und $\mu\alpha$ geometriſch gleich M B und M A und zieht von β und α Linien nach Δ, ſo ſchneiden dieſe auf einer durch m parallel der Grenzlinie gezogenen Linie die perſpectiviſche Länge e f des der Bildebene parallelen Durchmeſſers der geſuchten Schnittfigur ab, die nun vermittelſt der Perſpective desjenigen der ſie einſchließenden Quadrate conſtruirt werden kann, deſſen eines Seitenpaar in H^1 verſchwindet. Die elliptiſche Perſpective der Schnittfigur muß dabei durch die Punkte g und h gehen, in welchen die Grundlinie der ſchiefen Ebene den Kreis um C ſchneidet. §. 348.

Eine nähere Betrachtung der Figur ergiebt, daß der Mittelpunkt m auch als Schnittpunkt einer von M nach dem Diſtanzpunkte D gezogenen Linie mit der Linie C H^2 zu ermitteln iſt; daß man ferner die perſpectiviſche Halbmeſſerlänge m e auch dadurch beſtimmen kann, daß man eine durch m parallel A B gezogene Linie durch eine andere, von B nach D §. 349.

gezogen, in ε ſchneidet, und dann m ε geometriſch in m e überträgt. So auch ſind die Punkte a und b der Linie $H^1 S$ in ihr durch Linien, von D durch A und B gezogen, zu beſtimmen.

§. 350. **Ausführung der Aufgabe b.** Wie in der vorhergehenden Ausführung wird zunächſt der Durchmeſſer des Kreiſes, welchen die Schnittfigur der ſchiefen Ebene mit der Kugel bildet, dadurch in A B geometriſch dargeſtellt, daß man durch den Punkt S, in welchem die ſchiefe Ebene mit ihrer Grundlinie die in der Bildebene liegende lothrechte Kugelachſe L K ſchneidet, eine Linie B W zieht, welche mit der horizontalen Grundlinie u W den Winkel von $46^1/_2{}^\circ$ bildet. Denkt man ſich nun wieder den Kreis um C um die Kugelachſe L K, und mit ihm die Linie B W gedreht, bis beide parallel der (lothrechten) Ebene des Neigungswinkels der ſchiefen Ebene ſind, ſo iſt eine von ϱ durch S gezogene Linie ϱ q die unendlich lange Perſpective der gedrehten Linie B W; denn ϱ H^2 iſt die Grenzlinie der Neigungswinkel-Ebene, und die gedrehte Linie B W muß, da ſie ſowohl der gegebenen ſchiefen Ebene als der lothrechten Neigungswinkel-Ebene angehört, nach §. 322 nach dem Schnittpunkte ϱ der Grenzlinien beider gerichtet ſein. — Macht man nun S m dadurch perſpectiviſch gleich S M, daß man S M um S in S μ, in die Grundlinie der ſchiefen Ebene, geometriſch überträgt und dann S ϱ durch eine Linie, von μ nach dem Theilpunkte tϱ gezogen, im Punkte m ſchneidet, ſo iſt dieſer der perſpectiviſche Ort des Mittelpunktes der Schnittfigur. Jedoch kann derſelbe auch hier in der S ϱ durch eine von C nach H^2 gezogene Linie abgeſchnitten werden. Ueberträgt man nun noch M B und M A geometriſch in μ β und μ α und zieht von β und α Linien nach tϱ, ſo ſchneiden dieſe auf einer durch m parallel der ſchiefen Grenzlinie gezogenen Linie die perſpectiviſche Länge i f des der Bildebene parallelen Durchmeſſers der geſuchten Schnittfigur ab, wonach dieſelbe vermittelſt der Perſpective desjenigen der ſie einſchließenden Quadrate conſtruirt werden kann, deſſen eines Seitenpaar in H^1 verſchwindet. g und h ſind dabei wieder Punkte der geſuchten Perſpective, ſo wie a und b, welche durch die von dem Theilpunkte tϱ durch α und β gezogenen Linien auf ϱ q abgeſchnitten werden.

Beiſpiel 34.

Conſtruction der Perſpective der Kugel vermittelſt der Perſpective des Berührungskreiſes der Geſichtslinien. (S. §. 237.)

§. 351. **Aufgabe a.** In Fig. 93 (Taf. 17) iſt in dem Kreiſe um den in der Verticale liegenden Punkt k der größte, mit der Bild-

ebene zuſammenfallende Kreis einer im Grundpunkte p (P Hauptpunkt, O herabgeſchlagener Geſichtspunkt) auf der Grundebene ruhenden Kugel gegeben — es ſoll die Perſpective der Kugel conſtruirt werden.

Aufgabe b. In Fig. 96 (Taf. 17) iſt in dem Kreiſe um den links der Verticale liegenden Punkt k der größte, mit der Bildebene zuſammenfallende Kreis einer im Punkte p^1 (P Hauptpunkt, O herabgeſchlagener Geſichtspunkt) der Grundlinie auf der Grundebene ruhenden Kugel gegeben — es ſoll die Perſpective der Kugel conſtruirt werden. §. 352.

Ausführung der Aufgabe a. Wie ſchon in §. 241 erwähnt, liegt der Berührungskreis des aus dem Auge nach einer Kugel denkbaren Geſichtslinien-Kegels, wenn die Perſpective des Kugel-Mittelpunktes nicht mit dem Hauptpunkte zuſammenfällt, in einer ſchiefen Ebene. Stellt man nun die Neigung dieſer Ebene und dabei zugleich die perſpectiviſche Länge des Durchmeſſers des Berührungskreiſes durch eine geometriſche Conſtruction feſt, und conſtruirt dann die Perſpective des ſchief liegenden Berührungskreiſes, ſo iſt dieſe die Perſpective der Kugel ſelbſt. §. 353.

Die erwähnte geometriſche Conſtruction, welche auch in Fig. 93 ſelbſt ausgeführt werden könnte, liegt in Fig. 94 geſondert vor. Hier bedeutet die Linie t (H^1) die Aufrißprojection der Bildebene, Linie R p die der Grundebene, Punkt O die des Geſichtspunktes, der Kreis um K den in einer zur Bildebene normalen Ebene liegenden größten Kreis der Kugel. Zieht man aus dem Geſichtspunkte Tangenten an den Kreis, ſo berühren ſie dieſen in den Punkten Q und T, und iſt demnach die Sehne Q T der geometriſche Durchmeſſer des Berührungskreiſes; die Neigung aber der Ebene des letztern zur Grundebene liegt zugleich in dem 51° großen Winkel Q R p vor, deſſen eigene Ebene normal zur Bildebene t (H^1) ſteht, weshalb die Ebene des Berührungskreiſes eine der in §. 281 unter c) angeführten einfach-ſchiefen ſein muß. Da letztere in Y die Bildebene ſchneidet, ſo muß in der Conſtruction ihre Grundlinie durch y gehen. Der Mittelpunkt des Berührungskreiſes iſt N, ſeine Perſpective aber fällt, wie die Geſichtslinie O K ergiebt, mit dem in der Bildebene liegenden Kugel-Mittelpunkte K zuſammen. Die perſpectiviſche Länge des Durchmeſſers des Berührungskreiſes für den Ort K in der Bildebene müßte, wenn man ſtatt der Profilprojection Q T den wirklichen Durchmeſſer in ſeiner eigentlichen, der Bildebene parallelen Richtung, d. h. hier alſo den zur Papierfläche normalen, durch N gehenden Durchmeſſer ins Auge faßt, eigentlich auf einer durch K

in der Bildebene ihm parallelen Linie ermittelt werden, indem man ſich dieſe durch Geſichtslinien, vom Auge durch die Endpunkte des gedachten Durchmeſſers gehend, geſchnitten denkt. Man kommt aber zu demſelben Reſultate, wenn man die ebengedachte, durch K in der Bildebene dem Durchmeſſer parallel gerichtete Linie in Fig. 94 parallel der Profilprojection Q T zieht und auf ihr die geſuchte Länge J L durch die durch Q und T gezogenen Geſichtslinien abſchneidet.

In der Conſtruction (Fig. 93) iſt nun den vorhergehenden Ermittelungen gemäß (Δ) Δ^1 die Grenzlinie (H^1 Hauptpunkt, Δ^1 ein Diſtanzpunkt) der Ebene des Berührungskreiſes, die Horizontale durch y (k y gleich K Y) deren Grundlinie, der Kugel-Mittelpunkt k die Perſpective des Kreis-Mittelpunktes N. Macht man den perſpectiviſchen Durchmeſſer i l geometriſch gleich J L, ſo kann man um ihn die Perſpective des Berührungskreiſes vermittelſt der Perſpective e f g b desjenigen der einſchließenden Quadrate conſtruiren, deſſen eines Seitenpaar in H^1 verſchwindet. Dabei muß die conſtruirte Ellipſe durch die Punkte q und t gehen, die nach Fig. 94 die Perſpectiven der Berührungspunkte Q und T ſind.

§. 351. Vergleicht man hiermit das in §. 241, Fig. 58 (Taf. 17), gezeigte Verfahren bei der Kugelconſtruction, deſſen Mitanwendung in der Fig. 93 das die Ellipſe einſchließende Viereck v w u x ergiebt, ſo zeigt die Richtung der Seiten v x und w u dieſes Vierecks (nach P) und die Lage des Schnittpunktes y ſeiner Diagonalen, daß daſſelbe die Perſpective eines Rechtecks iſt, welches einer durch Punkt Y (Fig. 94) gehenden, und daher mit der Ebene Q R des Berührungskreiſes dieſelbe Grundlinie habenden *horizontalen* Ebene $Q^1 T^1$ angehört; eines Rechtecks, welches die Länge $Q^1 T^1$ und eine Breite hat, die gleich dem Durchmeſſer II. IV eines in der Kugel durch Y horizontal liegenden Kreiſes iſt. Daß aber die von der Perſpective dieſes Rechtecks eingeſchloſſene Ellipſe die von der vorher conſtruirten Quadratperſpective e f g b eingeſchloſſene perſpectiviſch decken muß, iſt unzweifelhaft, da die Schnittfigur t q des der Kugel entſprechenden Geſichtslinien-Kegels Q O T (Fig. 94) mit der Bildebene t (H^1) immer dieſelbe iſt, der Kegel mag nun Q T oder $Q^1 T^1$ zur Baſis haben.

Die gleichzeitige Anwendung *beider* Conſtructionsarten, wodurch die Zahl der zur Zeichnung der Ellipſe verwendbaren Punkte erheblich vergrößert wird, iſt dadurch erleichtert, daß man das in Fig. 94 geſondert Vorgeführte in Fig. 93 ſelbſt, unter Weglaſſung der Linie Q R, ausführen kann. Zudem findet man hier die Neigung der Ebene des Berührungskreiſes und den Hauptpunkt H^1 ſchnell, wenn man D H^1 ſofort normal zu D k zieht.

Wie man, um die Ellipſe vermittelſt ihrer Brennpunkte conſtruiren oder berichtigen zu können, zu ihrer ſchon vorliegenden langen Achſe q t die kurze Achſe a z findet, iſt aus §. 357 zu erſehen. In Fig. 95 liegt in A Z die geometriſche Länge der kurzen Achſe vor; a z in Fig. 93 iſt die perſpectiviſche Länge derſelben.

Ausführung der Aufgabe b. Die Conſtruction iſt der vorhergehenden ganz entſprechend. Die zur Ermittelung der Lage der Berührungskreis-Ebene dienende geometriſche Conſtruction, welche ebenfalls in Fig. 96 ſelbſt ausgeführt werden kann, liegt wieder geſondert in Fig. 97 (Taf. 17) vor, wo K (P) zunächſt die Grundrißprojection der Bildebene, (O) die des Geſichtspunktes, der Kreis um K die der Kugel — der Aufgabe gemäß geometriſch orientirt — bedeuten. Da die fragliche Ebene offenbar normal, wie K (E), zu einer aus dem Geſichtspunkte nach dem Mittelpunkte der Kugel gezogenen Geſichtslinie (O) K iſt, ſo muß ihre Schnittlinie mit der Grundebene um den 53° großen Winkel K (E) (O) von der Verticalebene abweichen, und iſt demnach ε in Fig. 96 ein Punkt der Grenzlinie der Ebene. Um nun noch den Winkel zu ermitteln, welchen die Ebene mit der Grundebene bildet, kann man Fig. 97 zur Conſtruction einer, in der durch das Auge und den Kugel-Mittelpunkt denkbaren lothrechten Ebene liegenden, Aufrißprojection der vorhergenannten Stücke verwenden, und zwar durch (O) eine Tangente (O) p^1 an die Kugel ziehen, welche die Grundebene bedeutet, und normal zu dieſer durch p^1 die Linie t ϱ als Bildebene. Macht man dann noch $p^1 s$ gleich K (O), und eine auf $p^1 s$ in s errichtete Normale s O gleich der gegebenen Höhe p P des Auges und verfährt nun wie vorher in Fig. 94, ſo ergeben die die Kugel tangirenden Geſichtslinien O Q und O T in der Sehne Q T die geometriſche Länge des Durchmeſſers des Berührungskreiſes, und in der Linie J L ſeine perſpectiviſche Länge; in Q R p^1 aber liegt der geſuchte Abweichungswinkel ſeiner Ebene von der Grundebene vor. §. 355.

Nach dieſer Ermittelung trägt man in Fig. 96 den zuletzt gefundenen Winkel an den Horizont in ω an und ſchneidet die durch γ Lothrechte in ϱ, wonach eine durch ϱ und ε gezogene Linie die Grenzlinie (H^1 Hauptpunkt, $\measuredangle$ ein Diſtanzpunkt) der Ebene des Berührungskreiſes iſt. Die Perſpective des letztern wird nun wieder conſtruirt, indem man l i durch k parallel ϱ ε zieht und geometriſch gleich L J (Fig. 97) macht, dann Linien von H^1 durch l und i zieht, dieſelben durch Linien, von den Diſtanzpunkten $\measuredangle$ und $\measuredangle^1$ durch k gezogen, ſchneidet und danach die Perſpective des einſchließenden Quadrates vollendet. Die darin einzuzeichnende Ellipſe, welche die geſuchte Kugelperſpective iſt, muß, nachdem man K q und K t aus

Fig. 97 in k q und k t in Fig. 96 übertragen, ſelbſtverſtändlich durch die Punkte q und t gehen, deren Lage zu k, wie die aller anderen Punkte p^1, y, γ und ϱ der lothrechten Linie t ϱ, übereinſtimmen muß mit der Lage der gleichnamigen Punkte der Linie t ϱ in Fig. 97, da letztere Figur eine Projection innerhalb der lothrechten Ebene des Neigungswinkels der Berührungskreis-Ebene iſt.

§. 356. Vereinigt man mit dem eben gezeigten Verfahren das in §. 241 (Fig. 58) vorgeführte — wonach man zunächſt die Grenzlinie P D^2 und darin den Diſtanzpunkt D^2 dadurch beſtimmt, daß man k P zieht und auf ihr in P die der Diſtanz P O gleich lange Normale P D^2 errichtet, wonach man ferner durch Tangenten, aus D^2 an den Kugelkreis gezogen, die verlängerte k P in 1 und 3 ſchneidet, durch 1 und 3 zu k P normale Linien zieht, und endlich durch Tangenten, aus P an den Kreis gezogen, in v w u x die die Ellipſe einſchließende Rechteck-Perſpective conſtruirt u. ſ. w. — ſo gewinnt man nicht allein eine erhebliche Anzahl Punkte mehr zur Zeichnung der Ellipſe, ſondern man kommt auch zu den aus Fig. 97 hervorgehenden Reſultaten, ohne erſt dieſe Figur conſtruiren zu müſſen. Da nämlich D^2 k in Fig. 96 gleich O K in Fig. 97 iſt, ſo iſt eine dort durch Tangenten aus D^2 feſtzuſtellende Sehne Q T ebenfalls der geometriſche Durchmeſſer des Berührungskreiſes, L J deſſen perſpectiviſche Länge, und, wie überhaupt der Linie 3 H^1 die Eigenſchaften der in Fig. 97 als Bildebene auftretenden Linie t ϱ beiwohnen, ergiebt der Schnittpunkt y^1 der Sehne Q T mit der 3 H^1 einen Punkt der Grundlinie, ſowohl der doppelt-ſchiefen Ebene des Berührungskreiſes, als der einfach-ſchiefen Ebene, der die die Ellipſe einſchließende Rechteck-Perſpective v w u x angehört. Die Schnittpunkte 2 und 4 dieſer Grundlinie mit der Peripherie des gegebenen Kugelkreiſes fallen dabei natürlich mit den Berührungspunkten der aus P an denſelben Kreis gezogenen Tangenten P x und P u zuſammen. Außerdem iſt die an ſich mit P D^2 parallele Grenzlinie ϱ ε der doppelt-ſchiefen Berührungskreis-Ebene ſchnell zu finden, wenn man ohne Weiteres den Hauptpunkt H^1, und zwar dadurch feſtſtellt, daß man die verlängerte k P durch eine Linie ſchneidet, welche in D^2 normal auf k D^2 ſteht, oder Q T parallel iſt.

§. 357. Will man, um größere Genauigkeit zu erzielen, die Ellipſe geometriſch vermittelſt ihrer Brennpunkte conſtruiren, ſo bedarf es, da in 1. 3 ſchon ihre lange Achſe vorliegt und in m deren Halbirungspunkt leicht feſtzuſtellen iſt, nur noch der Ermittelung der Länge ihrer durch m normal zu 1. 3 liegenden kurzen Achſe a z, welche ihrem perſpectiviſchen Orte nach die Geltung der Perſpective einer dem Durchmeſſer 2. 4 parallelen Kreisſehne A Z hat. Die geometriſche Länge dieſer Sehne findet man nun, wenn man zuvörderſt

die Geſichtslinie m D^2 zieht und dadurch M in T Q beſtimmt, dann, um die Figur nicht durch Hülfslinien zu ſehr zu verwirren, in einer beſonderen Conſtruction, Fig. 98 (Taf. 17), einen Kreis von dem Durchmeſſer Q T ſchlägt und darin die vom Mittelpunkte N um das aus Fig. 96 zu entnehmende Stück N-M entfernte Sehne A Z zieht. Ueberträgt man darauf deren Hälften M A und M Z auf die Grundlinie der Berührungskreis-Ebene in Fig. 96 in y^1 A und y^1 Z, und zieht Linien von H^1 durch A und Z, ſo ſchneiden dieſe auf der durch m parallel der ſchiefen Grundlinie, d. i. normal zu 1. 3 zu ziehenden Linie in den Punkten a und z die perſpectiviſche Länge jener Sehne ab, die an dieſer Stelle als geometriſche kurze Achſe der Ellipſe zu verwenden iſt. B und B^1, je um die Hälfte der langen Achſe von a und z entfernt, ſind hiernach die Brennpunkte der Ellipſe.

Handelt es ſich um die Conſtruction der Perſpective einer Kugel, deren Mittelpunkt nicht in der Bildebene liegt, ſo hat man für dieſe Kugel nur die perſpectiviſche Länge eines der Bildebene parallelen Durchmeſſers feſtzuſtellen, um die Perſpective des Mittelpunktes einen Kreis dieſes Durchmeſſers zu ſchlagen und damit zu verfahren, wie in den Figuren 93 und 96 gezeigt iſt. §. 358.

Zu der Conſtruction der Perſpective eines beliebigen Kugelpoles wird es einer beſondern Anleitung nicht bedürfen, da ein ſolcher ſtets als Endpunkt der entſprechenden Kugeldurchmeſſer-Perſpective leicht zu ermitteln iſt. §. 359.

Beiſpiel 35.

Aufgabe. Es iſt in Fig. 99 (Taf. 16) das Profil einer **Feldbefeſtigung**, einer ſogenannten **Lünette**, nebſt Maßſtab, und daneben in $^1/_6$-Maßſtab der geometriſche Grundriß dazu gegeben; die Bildebene ſtehe durch die Wallkante A B, der Geſichtspunkt liege 80 Fuß davon entfernt in O; die Höhe des Auges über dem Bauhorizonte (18. 8 des Profiles), welcher als Grundebene anzunehmen iſt, betrage 36 Fuß — es ſollen die Perſpective der Lünette conſtruirt, die perſpectiviſchen Größen von an verſchiedenen Orten in derſelben befindlichen Menſchen, und danach die Höhen der Fußpunkte derſelben über der horizontalen Grundebene beſtimmt werden. §. 360.

Ausführung. Nachdem 80 Fuß unterhalb des Horizontes in der Verticale der herabgeſchlagene Geſichtspunkt O bezeichnet, durch die 36 Fuß §. 361.

unterhalb P in der Verticale liegende Perſpective 11^a des Punktes 11 (ſ. das Profil) die horizontale Grundlinie gezogen worden, werden die Verſchwindungspunkte ε, ϱ und λ für die horizontalen Kanten der Seiten A E, E F und C F der Lünette, vermittelſt der aus dem Grundriſſe erſichtlichen Abweichungswinkel dieſer Seiten von der Verticalebene, und die ihnen entſprechenden Theilpunkte feſtgeſtellt.

Da die Perſpective der durch die Ecke A der Lünette gebildeten Gehrung Punkte für die horizontalen Kanten ſowohl der Seite A E als der der Bildebene parallelen Flanke A B ergeben muß, ſo iſt es zweckmäßig, mit der Conſtruction dieſer Gehrung zu beginnen. Die an ſich lothrechte Ebene der Gehrung weicht dem Grundriſſe nach um 27° rechts von der Verticalebene ab; es iſt demnach eine lothrechte Linie, durch den um 27° rechts von P gelegenen Punkt α gezogen, die Grenzlinie (α Hauptpunkt, ω herabgeſchlagener Geſichtspunkt) jener Ebene, und eine Linie $\alpha(18)$, von α durch Punkt 11^a gezogen, die Schnittlinie derſelben Ebene mit der Grundebene. Um hiernach Punkte der Ecken der Gehrung zu finden, werden die im Profile mit 18, 19, 10, 12 und 13, 14, 15, 16, 17, 8 bezeichneten Punkte, je nach ihrer Lage im Bauhorizonte zu Punkt 11, links und rechts vom Grundpunkte 11^a auf der Grundlinie geometriſch aufgetragen, von hier zunächſt auf eine durch 11^a perſpectiviſch rechtwinklig zu O ε gezogene horizontale, alſo im Punkte v (rechts außerhalb des Conſtructionsraumes) verſchwindende Linie 11^a(v) mittels des dieſer Linie entſprechenden Theilpunktes tv übertragen, und von da durch Linien, nach ε gezogen, weiter auf die Gehrungs-Schnittlinie $\alpha(18)$ übertragen. Zieht man durch die hier gewonnenen Punkte lothrechte Linien und beſtimmt deren perſpectiviſche Längen, wie z. B. 13. 3 dadurch, daß man die aus dem Profile einzeln entnehmbaren Höhen, wie z. B. 13. 3, zuvor geometriſch in der Verticale über 11^a, für die Punkte 0 und 2 aber unter 11^a, aufträgt und von hier durch Linien, nach α gezogen, auf die entſprechenden Lothrechten perſpectiviſch überträgt, ſo erzielt man die Perſpectiven ſämmtlicher Eckpunkte der Gehrung. Die Richtigkeit der dieſe Punkte verbindenden Linien, wie z. B. der Glacislante 18^a 9, oder der Bruſtwehrkante 1. 3, kann man nachträglich controliren, wenn man in der lothrechten Grenzlinie $\alpha\,\alpha^1$ die Verſchwindungspunkte α^3 und α^2 jener Kanten conſtruirt; an den Horizont nämlich in ω die aus dem Profile erſichtlichen Neigungswinkel von $5^1/_2{}^\circ$ und 8° des Glacis und der oberen Bruſtwehrfläche anträgt und dabei die Grenzlinie ſchneidet. Aus dieſer Unterſuchung ergiebt ſich aber zugleich, daß, wenn α^3 und α^2 die Verſchwindungspunkte für die anſteigenden Kanten des Glacis und der oberen Bruſtwehrfläche ſind, ε aber

ſeiner Conſtruction gemäß der Verſchwindungspunkt für die horizontalen Kanten derſelben Stücke an der Seite a e iſt, Linien, durch α^3 und ε und durch α^2 und ε gezogen, die Grenzlinien der genannten ſchiefen Flächen [(18ª) ε iſt die Schnittlinie dieſer Ebenen mit der horizontalen Grundebene, und mit den Grenzlinien parallele Linien, durch y gezogen, ſind ihre Grundlinien] an der Seite a e ſein müſſen; und ferner, daß Linien, parallel dem Horizonte durch α^3 und α^2 gezogen, die Grenzlinien (H^3 und H^2 Hauptpunkte) derſelben Flächen (deren Grundlinien eine Horizontale, durch q gezogen, und die Linie 1. 3 ſind, und deren gemeinſchaftliche Schnittlinie mit der horizontalen Grundebene $18^a\,18^b$ iſt) an der Flanke a b der Lünette ſein müſſen.

Die Punkte der in einer lothrechten, um $78^1/_2{}^\circ$ von der Verticalebene abweichenden Ebene liegenden Gehrung an der Ecke E werden, zumal die Grenzlinie (Hauptpunkt λ) dieſer Ebene links weit außerhalb des Conſtructionsraumes liegt, am beſten gefunden, wenn man zunächſt in einer von 11^a nach ε zu ziehenden Linie mittels des ihr entſprechenden Theilpunktes den in dieſer Ecke analog 11^a liegenden Punkt 11^e beſtimmt; ferner in der Linie α (18ª) die Perſpective m des Punktes M, in welchem ſich dem Grundriſſe nach die Gehrungsrichtungen ſchneiden, conſtruirt und von m durch 11^e eine Linie zieht. Es iſt dies die Schnittlinie der Gehrungsebene mit der Grundebene und deshalb ſogleich zur Beſtimmung des Punktes 18^e in der von 18^a nach ε zu ziehenden Linie zu benutzen. Ueberträgt man auf m 18^e die vorher in der Linie α 18^a beſtimmten Punkte vermittelſt nach ε gezogener Linien, zieht durch die ſo übertragenen Punkte lothrechte Linien, und ſchneidet dieſe wieder durch Linien, von den Gehrungspunkten der Ecke a nach ε gezogen, ſo ergeben die Schnittpunkte die Perſpective der Gehrung an der Ecke e. Die ſchiefen Kanten $9^e\,18^e$ und $3^e\,1^e$ müſſen dabei wieder gerichtet ſein nach den Schnittpunkten der Grenzlinie der Gehrungsebene mit den Grenzlinien $\alpha^3\varepsilon$ und $\alpha^2\varepsilon$; ſie müſſen, rückwärts verlängert, aber auch durch die Punkte m^3 und m^2 gehen, in welchen die verlängerten Kanten $18^a\,9$ und 1. 3 die allen Gehrungsebenen gemeinſame Lothrechte $m\,m^2$ ſchneiden.

Die Gehrung an der Ecke f hat die Richtung m τ, und ihre Perſpective ergiebt ſich leicht, wenn die im Punkte ρ verſchwindenden horizontalen Kanten der Seite e f gezogen ſind. Von dieſer Gehrung aus iſt dann auch die Perſpective der Flanke f e vermittelſt ihrer vom Verſchwindungspunkte φ aus zu ziehenden horizontalen Kanten zu conſtruiren.

Für die Böſchung an dem Ende b der Flanke a b, welche überall die halbe Höhe zur Anlage, demnach $63^1/_2{}^\circ$ Neigung hat, iſt, da ihre Schnitt-

linie n 18^b mit der Grundebene, dem Grundriſſe nach, parallel der Verticalebene iſt, die durch P gehende, um $63\frac{1}{2}°$ geneigte Linie P $\varkappa$ die Grenzlinie, und $\varkappa^3$ darin der Verſchwindungspunkt für die Kante $18^b\,9^b$ am Glacis; $\varkappa^2$ der für die Bruſtwehrkante $1^b\,3^b$. Sucht man auf gleiche Art die Verſchwindungspunkte für die ſchiefen Kanten der anderen Flächen der Flanke, ſo iſt der ſchiefe Abſchnitt der letztern leicht zu vollenden. —

§. 362. Um gewiſſe gegebene Höhen, z. B. die von menſchlichen Figuren, auf beliebigen Punkten der ſchiefen Flächen ſchnell perſpectiviſch zu beſtimmen, ohne von den Grundlinien der letzteren aus zu conſtruiren, werden dieſelben ſtets zuvor in der durch Punkt 11^a ſtehenden Lothrechten (Hauptkante) geometriſch aufgetragen. Von hier aus laſſen ſich dieſe Höhen vermittelſt Linien, welche man nach einem entſprechend gelegenen Punkte der Grenzlinie der Fläche zieht, auf welcher die Figur ſteht, unmittelbar oder mittelbar nach dem gegebenen perſpectiviſchen Orte perſpectiviſch weiter übertragen.

So wird die Höhe eines im Punkte $26\frac{1}{2}$ auf der oberen Bruſtwehrfläche der Seite a e befindlichen Menſchen durch Linien, vom Fuß und Scheitel des im Punkte 1 ſtehenden Mannes nach h der Grenzlinie $\varepsilon\,\alpha^2$ gezogen, die Höhe des im Punkte 28 Stehenden durch Linien nach ε beſtimmt. Für den im Punkte 26 auf der oberſten Bruſtwehrkante Stehenden wird zuerſt die Höhe eines im Punkte 3 Stehenden feſtgeſtellt, und von hier nach 26 übertragen. Die Höhe der in $32\frac{3}{4}$, 32 und $32\frac{1}{2}$ ſtehenden Männer wird zuerſt über dem Punkte q geometriſch aufgetragen, dann durch Linien, von α^3 aus gezogen, für die Orte l, 9 und i perſpectiviſch beſtimmt, und von hier nach den Orten $32\frac{3}{4}$, 32 und $32\frac{1}{2}$ perſpectiviſch weiter übertragen. Die perſpectiviſche Höhe eines im Punkte 33 auf der Kante der Geſchützbank Stehenden wird gefunden, nachdem die Höhe eines im Punkte 7 Stehenden feſtgeſtellt iſt. Die Höhen der im Graben in s und $41\frac{1}{2}$ ſtehenden Männer werden gefunden, nachdem zuvor die Höhe eines im Punkte t Stehenden beſtimmt iſt. —

§. 363. Um aber die Höhe zu beſtimmen, in welcher ſich der Fußpunkt irgendeines der in der Darſtellung vorhandenen Männer über der Grundebene befindet, ermittelt man zunächſt die Tiefe des Fußpunktes unter der Horizontebene, indem man feſtſtellt, wieviel mal die perſpectiviſche Größe des Mannes in dem normalen Abſtande ſeines Fußpunktes vom Horizonte enthalten iſt, und darauf die menſchliche Größe (angenommen 6 Fuß) mit der gefundenen Zahl multiplicirt (ſ. §. 202). Zieht man alsdann das Product von der Höhe des Auges ab, ſo ergiebt der Reſt die Höhe des Fußpunktes über der Grundebene. Z. B.: Die perſpectiviſche Größe des im

Punkte $32\frac{1}{2}$ ſtehenden Mannes iſt $5\frac{5}{12}$ mal im Abſtande ſeines Fußpunktes vom Horizonte enthalten; mit dieſer Zahl ſeine Größe, 6 Fuß, multiplicirt, ergiebt $32\frac{1}{2}$ Fuß Tiefe ſeines Fußpunktes unter der Horizontebene, d. i., bei der hier gegebenen Höhe des Auges von 36 Fuß, gleich einer Höhe von $3\frac{1}{2}$ Fuß über der Grundebene. In gleicher Höhe läge der Fußpunkt eines im Punkte i Stehenden. So ſind ferner die perſpectiviſchen Größen der in den Punkten 1 und 28 ſtehenden Männer $4\frac{2}{3}$ mal in den, hiernach $4\frac{2}{3}$ mal 6 Fuß, alſo 28 Fuß betragenden Abſtänden ihrer Fußpunkte von dem Horizonte enthalten, was für letztere eine Höhe von 8 Fuß über der Grundebene ergiebt, u. ſ. w.

Zweiter Abschnitt.

Constructionen auf der horizontalen ebenen Bildfläche.

Zwölftes Kapitel.

§. 364. Die Constructionen auf der horizontalen Bildebene unterliegen denselben Regeln, wie diejenigen auf der lothrechten Bildebene.

Da bei der in Rede stehenden Stellung der Bildebene sämmtliche horizontalen Linien ihr parallel sind, so müssen die Perspectiven unter sich paralleler horizontaler Linien geometrisch parallel sein, und da alle lothrechten Linien normal zu dieser Bildebene sind, so müssen ihre Perspectiven nach einem und demselben darstellbaren Verschwindungspunkte convergiren.

Die Orientirung bei der Construction zeigt am verständlichsten ein Beispiel.

Beispiel 36.

§. 365. **Aufgabe.** In Fig. 100 (Taf. 18) ist ein Theil ECLG der horizontalen Decke eines etwa 20 Fuß hohen Saales als Bildfläche angenommen und darauf die Perspective **eines auf vier Eckſäulen ruhenden Kreuzgewölbes** nach dem oberhalb der Figur vorliegenden Maßstabe so dargestellt, wie dasselbe, oberhalb der Saaldecke erbaut, einem darunter befindlichen Beschauer erscheinen würde. Der Standpunkt des Letztern ist dabei als lothrecht unter dem Punkte P, und als Distanz der ungefähre Abstand seines Auges von der Saaldecke, also die Länge von 15 Fuß angenommen.

Ausführung. Wenn man bei der Conſtruction eng an das bei der §. 366.
lothrechten Bildebene übliche Verfahren anknüpft, ſo iſt es hier gleichgültig, welche der vier perſpectiviſch darzuſtellenden Wände man als Grundebene und welche der vier Schnittlinien derſelben mit der Bildebene man demnach als Grundlinie behandeln will. In der Figur iſt die Wand über G L als Grundebene und G L ſelbſt als ihre Grundlinie, $s\omega$ als Grenzlinie der Ebene dieſer Wand (P Haupt- und Verſchwindungspunkt aller der Grundebene parallelen und zur Bildebene normalen, d. h. lothrechten Linien; P p demnach die Verticale, p Grundpunkt; PO_2, gleich PD_2, halbe Diſtanz, d. i. $7\frac{1}{2}$ Fuß; O, unten außerhalb der Conſtruction liegend, der herabgeſchlagene Geſichtspunkt) behandelt worden.

Nachdem innerhalb des Rechtecks E C L G ein kleineres Rechteck als Perſpective des das Gewölbe vom Saale trennenden Hauptgeſimſes, und an deſſen Ecken die unten im Saale ſelbſt etwa durch Säulen- oder Pfeilerſtellung zu rechtfertigenden Plinthenvorſprünge der Säulenbaſen geometriſch dargeſtellt worden, ſind die Perſpectiven aller vier Säulen gleich der über der Ecke G ſtehenden conſtruirt worden. Für dieſe wurde in der Bildebene der Fußpunkt A ihrer perſpectiviſch nach P gerichteten Achſe feſtgeſtellt, es wurden auf einer durch A parallel der Grundlinie G L gezogenen Linie in $A\beta$, $\beta\varkappa$, $\varkappa\varrho$ die Höhen (in der Figur ſind halbe Maße, der halben Diſtanz PD_2 entſprechend, angewandt) der Baſis, des Schaftes und des Capitäls der Säule geometriſch auf-, und von hier vermittelſt nach D_2 gezogener Linien perſpectiviſch auf die Säulenachſe in A b, b k und k r übertragen. Die perſpectiviſchen Größen des oberen Säulendurchmeſſers und der Capitälbreite ergaben ſich durch nach P gezogene Linien, nachdem die geometriſchen Größen jener Stücke auf der durch A gehenden Linie in A i und A n aufgetragen worden. — Die Perſpectiven der Gurtbogen wurden als Perſpectiven halber Kreiſe innerhalb der Perſpectiven ſie einſchließender halber Quadrate, wie auf der lothrechten Bildebene, unter Benutzung der in den Diagonalen liegenden Punkte conſtruirt. Ebenſo ergaben ſich die Perſpectiven von Punkten der Gratbogen in den Schnittpunkten der Linien, welche entſprechende Punkte der einander gerade gegenüberliegenden Gurtbogenpaare verbinden. — Auch die Perſpectiven der lothrechten Kanten der in der Wand über G L befindlichen Fenſteröffnung ſind nach P gerichtet. Die Perſpective des davon getragenen Bogens wurde innerhalb der Perſpective des dieſen einſchließenden halben Quadrates conſtruirt.

Dritter Abſchnitt.

Conſtructionen auf der ſchiefen ebenen Bildfläche.

Dreizehntes Kapitel.

§. 367. Wie ſchon in §. 12 geſagt, iſt die Darſtellung aller, einer ſolchen Bildfläche nicht parallelen Objecte unter Anwendung der für die Conſtruction der Perſpectiven ſchiefer Objecte geltenden Regeln auszuführen. Da bei Aufgaben dieſer capriciöſen Art für die Wahl des Geſichtspunktes weniger die in den §§. 18—30 aufgeſtellten allgemeinen Regeln, als die Oertlichkeit maßgebend ſind, kann es nicht auffallen, daß das perſpectiviſche Bild ein ſehr verzerrtes wird, vollends da auch hier, wie bei der horizontalen Bildebene, die lothrechten Linien ſelbſt der Bildebene nicht parallel und ihre Perſpectiven deshalb ſchief, nach einem darſtellbaren Verſchwindungspunkte gerichtet, ſind. Von den horizontalen Linien ſind nur die Perſpectiven derjenigen parallel mit der Grundlinie der horizontalen Grundebene, welche ſelbſt der ſchiefen Bildebene parallel ſind.

Als Beiſpiel möge hier ein, dem von J. H. Lambert gewählten ſehr ähnliches folgen.

Beiſpiel 37.

§. 368. **Aufgabe.** In Fig. 101 (Taf. 18) iſt nach dem beigefügten Maßſtabe die geometriſche Aufrißprojection einer um 45° geneigten Treppe gegeben, auf deren 8 Fuß breiter Rücken-

fläche EJ die Perſpective eines **Theiles einer Hausfaçade**, namentlich eine mit einem vorgebauten **Balkon** verſehene **offene Thür**, welche Einblick in das **Innere eines Zimmers** gewährt, conſtruirt werden ſoll. Der Fußboden des Zimmers liege in der Höhe des Punktes p, durch welchen zugleich die Hausfaçade ſtehe. Der Geſichtspunkt ſei O, das Auge eines in K ſtehenden Beſchauers.

Ausführung. Nachdem zuvörderſt in Fig. 102 (Taf. 18) in dem Rechteck ee^1i^1i die 8 Fuß breite Bildebene aufgerichtet dargeſtellt worden, zieht man in der Aufrißfigur aus dem Auge O den Parallelſtrahl OP für zur Bildebene normale Linien, den Parallelſtrahl O1 für lothrechte, den Parallelſtrahl Oh für horizontale Linien, und überträgt die Abſtände der Punkte p, h, P und 1 von der unteren Grenze E der Bildebene geometriſch und unter gleichnamiger Bezeichnung in die Conſtruction, Fig. 102, und zwar in die mitten durch die aufgerichtete Bildebene anzunehmende Verticale. Es iſt dann P der Verſchwindungspunkt für alle zur Bildebene normalen Linien und der Hauptpunkt in der durch ihn horizontal zu ziehenden Grenzlinie der Ebenen, welche zugleich normal zur Bild- und zur Verticalebene ſind; PO iſt die aus der Aufrißfigur entnehmbare, in die Grenzlinie herabgeſchlagene Diſtanz. Trägt man nun, da, wie die Aufrißfigur zeigt, lothrechte Linien 45° über, horizontale Linien 45° unter OP geneigt ſind, in der Conſtruction an PO in O oberhalb und unterhalb den Winkel von 45° an, ſo ſchneidet man die Verticale abermals in den auf ihr ſchon bezeichneten Punkten 1 und h, wovon der erſtere der Verſchwindungspunkt für lothrechte, der letztere der für horizontale Linien iſt. Eine durch 1 gezogene Horizontale iſt dann die Grenzlinie für alle lothrechten, zur Verticalebene normalen Ebenen (1 Hauptpunkt; 1O, gleich 1d, die Diſtanz, d Diſtanzpunkt), eine durch h gezogene Horizontale iſt die Grenzlinie für alle horizontalen Ebenen (h Hauptpunkt; ho, gleich hO, gleich hD, Diſtanz; o herabgeſchlagener Geſichtspunkt, D Diſtanzpunkt). — p iſt der Grundpunkt, und die durch ihn gezogene Horizontale $p\gamma$ die Grundlinie ſowohl für die horizontale Fußboden-Ebene des Zimmers und des Balkons, als für die zur Verticalebene normale lothrechte Ebene der Hausfaçade. §. 369.

Um hiernach die Perſpective der Thür zu conſtruiren, deren Fuß in der Grundlinie ſteht, trägt man die ihr zu gebende Breite, etwa ar, gleich 4 Fuß, zur Hälfte links, zur Hälfte rechts von p auf und zieht von a und r, nach Punkt 1 gerichtet, die Perſpectiven ihrer lothrechten Kanten. Die perſpectiviſche Länge derſelben, d. i. die etwa $7\frac{1}{4}$ Fuß be-

tragende Höhe der Thür, wird bestimmt, wenn man dieselbe zunächst geometrisch, etwa rechts von a, in a β auf der Grundlinie aufträgt, und dann a l durch eine von β nach dem Distanzpunkte d gezogene Linie in b abschneidet. — In gleicher Weise werden die perspectivischen Höhen der 6 Fuß oberhalb der Thür gelegenen und selbst 6 Fuß hohen Fenster bestimmt. Die Entfernungen der letzteren von einander und ihre Breiten werden gleichfalls zuvor auf der hier als Hauptkante dienenden Grundlinie p γ geometrisch auf- und durch nach l gezogene Linien perspectivisch in die Fensterhöhe übertragen. — Um die Tiefe a c des Zimmers, welche etwa 12 Fuß betrage, perspectivisch zu bestimmen, trägt man dieses Maß abermals auf der Grundlinie rechts von a in a γ geometrisch auf und schneidet eine von a nach h über den Fußboden gezogene Linie durch eine andere, von γ nach D gezogene, in c. — So auch wird der geometrisch a φ gleiche Vorsprung des Balkons perspectivisch in a f auf die über a verlängerte h a vermittelst einer von dem Distanzpunkte D^1 durch φ gezogenen Linie übertragen. — Die Breite des im Hintergrunde des Zimmers befindlichen Fensters wird ebenso von der Grundlinie aus perspectivisch auf die Hinterwand übertragen. Die Höhenkanten des Fensters sind, wie alle lothrechten Linien, nach l gerichtet, u. s. w.

Vierter Abſchnitt.

Conſtructionen auf der gekrümmten Bildfläche.

Vierzehntes Kapitel.

Das Panorama.

§. 370. Der Zweck von Bildern auf gekrümmten Bildflächen iſt im Allgemeinen, dem Beſchauer die in einem ſehr ausgedehnten Geſichtsfelde befindlichen Objecte, deren Darſtellung nach den für die ebene Bildfläche geltenden Regeln mehrere ebene Bilder füllen müßte, überſichtlich in ihrer Nebeneinanderfolge in einem Bilde vorzuführen. Wegen der Unmöglichkeit, ſie mit einem Male zu überſchauen, kann ihr Inhalt nur ſtückweiſe und allmählich auf die Vorſtellung des Beſchauers wirken, und eignen ſich deshalb in äſthetiſcher Beziehung wohl nur landſchaftliche und architektoniſche Vorwürfe zu derartiger Darſtellung.

Die häufig auf ebenen Bildflächen unter dem Namen von Panoramen vorkommenden Darſtellungen ganzer Städte ſind, als Ganzes genommen, in perſpectiviſcher Beziehung unrichtige Bilder; und vermögen ſie auch, ſtückweiſe betrachtet, zu befriedigen, ſo tritt ihre Mangelhaftigkeit doch ſofort vor die Augen, wenn der Blick ſich zu den ſeitlichen Bildgrenzen wendet und hier den Inhalt der einen als ſich anſchließend an den Inhalt der andern erkennen ſoll. Dabei können dieſe Bilder auch nicht als auf einer abgewickelten Cylinder-

fläche vorliegend angesehen werden, weil in ihnen die Perspectiven aller nicht lothrechten geraden Linien als gerade Linien vorgeführt sind, während diese, wie die unten folgenden Erläuterungen ergeben werden, mit einer einzigen Ausnahme Curven sein müssen.

§. 371. Unter den Bildern auf gekrümmten Bildflächen anzuführen sind die Kuppelbilder, auf der inneren Fläche eines Kugelstückes ausgeführt, und wegen ihres Ortes gewöhnlich allegorischen oder religiösen Inhaltes. Ist dieses Kugelstück so gelegen, daß sein geometrischer Mittelpunkt an dem Orte liegt, welchen das Auge des Beschauers von selbst einzunehmen strebt, so bietet es an sich die vollkommenste Bildfläche dar, da alsdann alle perspectivischen Verzerrungen (s. §. 21) ausgeschlossen sind. Da jenes jedoch selten der Fall ist, die Kugelstücke gewöhnlich bis zur Halbkugel ausgedehnt sind und in zu großer Höhe schweben, dabei nur schwer gleichmäßig zu erhellen sind, so leiden auch diese Bilder an großen Unvollkommenheiten.

Frei von den hervorgehobenen Mängeln sind allein die den Namen von Panoramen führenden Bilder auf der innern Fläche eines Cylinders. Sie sind in perspectivischer Beziehung vollkommen richtig, sind leicht so gleichmäßig zu erhellen wie ebene Bilder, und es ist dem Beschauer ihnen gegenüber nicht schwer, das Auge in den richtigen, gewöhnlich in der Achse des Cylinders liegenden Gesichtspunkt zu bringen.

§. 372. In Bezug auf das perspectivische Construiren auf Bildflächen der letzterwähnten Art ist zuvor zu bemerken, daß das hier zunächst gezeigte und besonders zu empfehlende Constructionsverfahren nach der Grundriß-Methode zwar die Möglichkeit nicht ausschließt, unmittelbar auf der gekrümmten Cylinderfläche zu construiren, daß jedoch wegen der freieren Handhabung des Zirkels und Lineals die Construction gewöhnlich auf der ganz oder theilweise aus ihrer Krümmung zur Ebene abgewickelten Fläche ausgeführt wird, wobei sich denn eigenthümlich verzerrte Bilder der Objecte ergeben. Bei der nach Vollendung der Construction stattfindenden Wiederaufwickelung der Bildfläche zum Cylinder verlieren die perspectivischen Bilder einem richtig situirten Auge gegenüber jene Verzerrung, indem sie alsdann die entsprechenden natürlichen Objecte decken.

In Fig. 103 (Taf. 18) ist in dem mit einer Grundfläche auf der Grundebene stehenden normalen Cylinder um die Achse CS die Panorama-Bildfläche in ihrer Krümmung vorgeführt. O in der Achse bedeutet den Gesichtspunkt; AV in der Grundebene und KV in der durch O anzunehmenden Horizontebene seien zwei parallele, in Einer lothrechten Ebene liegende horizontale Linien, hin und wieder durch lothrechte Linien wie KA, LB u. s. w. verbunden — es läßt sich daran Folgendes nachweisen: §. 373.

Da jede Gesichtslinie die krumme Bildfläche in zwei Punkten schneidet, so hat jedes Object eigentlich zwei Perspectiven; sei es ein Punkt wie R oder E, deren jeder zwei Punkte zu Perspectiven hat, nämlich r und r^1, und e und e^1, oder sei es eine Linie wie RE, deren Perspectiven re und r^1e^1 sind. Da hiervon jedoch die eine Perspective stets hinter den Beschauer fällt, so kommt für die Construction stets nur die Perspective in Betracht, welche, zwischen dem Auge und dem Objecte gelegen, letzteres deckt.

Die Perspective einer geraden Linie kann, je nach der Lage und Richtung derselben, verschiedene Cylinderschnitte bilden: §. 374.

sie ist ein Punkt wie z. B. e, wenn die gegebene Linie die Richtung einer Gesichtslinie hat wie eE;

sie ist eine lothrechte gerade Linie wie ka, wenn die gegebene Linie, wie KA, in einer durch den Gesichtspunkt gehenden lothrechten Ebene liegt; denn eine solche schneidet den Cylinder in einer seiner Seiten;

sie ist ferner ein Kreisbogen wie krt, wenn die gegebene Linie in der Horizontebene liegt, wie KT; denn die zur Cylinderachse normale Horizontebene schneidet den Cylinder in einem Kreise;

sie ist endlich ein elliptischer Bogen wie aeg, wenn die gegebene Linie, wie AG, weder in der Horizontebene, noch in einer durch den Gesichtspunkt gehenden lothrechten Ebene liegt, noch die Richtung einer Gesichtslinie hat; denn die durch die Gesichtslinien nach allen Punkten der verlängert aufgefaßten Linie AG gebildete Ebene ist schief zur Cylinderachse und schneidet deshalb den Cylinder in einer Ellipse.

§. 375. Dem Vorhergehenden nach ſind die durch Geſichtslinien aus der Kreislinie v r x r¹ und aus dem Ellipſenumfang v e x e¹ abzuſchneidenden Stücke k r t und a e g die Perſpectiven der gegebenen parallelen horizontalen Linien K T und A G und deshalb perſpectiviſch parallel. Denkt man ſich K T und A G unendlich lang, ſo ſind, wie der durch O gezogene Parallelſtrahl v x ergiebt, v und x die in den Horizont — d. i. die Kreislinie v r x r¹, in welcher die durch O gehende Horizontebene den Cylindermantel ſchneidet (jeder Punkt der Peripherie iſt ein Hauptpunkt) — fallenden beiden Perſpectiven des Verſchwindungspunktes jener und aller mit ihnen parallelen Linien, wie denn überhaupt jede nicht lothrechte Linie zwei darſtellbare Perſpectiven ihres Verſchwindungspunktes hat. Grundlinie iſt die Peripherie des Kreiſes 1. 9. 17. 25.

§. 376. Denkt man ſich den Cylindermantel in der Seite 25. H aufgeſchnitten und nebſt den im Vorhergehenden an ihm namhaft gemachten Stücken zur Ebene abgewickelt, wie dieſe in Fig. 104 (Taf. 18) in dem Rechtecke (h) (25) 25. h in halbem Maßſtabe vorliegt, ſo ſtellen ſich hier die früheren Kreislinien v r x r¹ (als Horizont und zugleich als Perſpective der unendlich langen Linie (X¹) V) und 1. 9. 17. 25 (als Grundlinie) in den geraden Linien (r) r¹ und (25) 25 dar, der frühere Ellipſenumfang v e x e¹ aber als eine trigonometriſche, der Sinuslinie ähnliche Linie (e¹) v e x e¹, in welcher v und x die beiden Perſpectiven des Verſchwindungspunktes der unendlich langen Linie V (X) ſind, v e x die Perſpective dieſer Linie ſelbſt, das Stück g e a davon die des Stückes G A, während die Stücke (e¹) v und e¹ x, als die zweite Perſpective bedeutend, außer Betracht kommen.

§. 377. Das auf der abgewickelten Bildfläche in Fig. 104 fertig Vorliegende wird conſtruirt unter Anwendung der in den Figuren 105 und 106 in halbem Maßſtabe gegebenen geometriſchen Projectionen: In dem Grundriſſe, Fig. 105 (Taf. 18), bedeutet die Kreislinie um den Geſichtspunkt O den Cylindermantel, die Linie (V) (X) die Projection der beiden in Fig. 103 gegebenen horizontalen Linien. In dem Aufriſſe, Fig. 106 (Taf. 18), iſt O in entſprechender Höhe O S

über der Grundebene S A der Geſichtspunkt, O P die zu allen Cylinderſeiten gleiche Diſtanz, J p demnach eine Cylinderſeite (Bildebene) in Vertretung aller anderen Seiten. In Fig. 104 iſt die Höhe (25) (h) des Rechtecks eine beliebige, die Länge (25) 25 aber ergiebt ſich durch Berechnung, wenn man die Durchmeſſergröße des Cylinders in Fig. 105 mit der Zahl π, d. i. 3,14159, multiplicirt; oder durch geometriſche Conſtruction, wenn man jene Länge gleich 3 Durchmeſſern plus $^1/_5$ der Sehne des Quadranten macht. Der Horizont, welcher zugleich die Perſpective der Linie K V enthält, wird in einer Höhe (25) (r^1) über der Grundlinie (25) 25 gezogen, welche gleich iſt der Höhe S O des Auges in Fig. 106.

Theilt man nun das Rechteck ſeiner Länge nach durch lothrechte Linien in eine beliebige Anzahl, etwa 32, gleicher Theile, ſo ſtellen dieſe Linien gleichweit von einander entfernte Cylinderſeiten vor und entſprechen einer gleichartigen Theilung der halben Kreisperipherie in Fig. 105 in 16 gleiche Theile. Die hier durch die Theilungspunkte verlängert gezogenen Radien (Geſichtslinien) bezeichnen in ihren Schnittpunkten mit der Linie (V) (X) diejenigen Punkte A, B, E u. ſ. w., deren Perſpectiven a, b, e u. ſ. w. in die der Kreistheilung entſprechend bezifferten Lothrechten 11, 10, 9 u. ſ. w. fallen; die Höhen 11 a, 10 b, 9 e u. ſ. w. aber dieſer Perſpectiven über der Grundlinie ſind in p α, p ε u. ſ. w. aus Fig. 106 zu entnehmen, nachdem man hier S A, S B, S E u. ſ. w. gleich O A, O B, O E u. ſ. w. des Grundriſſes gemacht und die Bildebene J p durch Geſichtslinien, von O nach A, B, E u. ſ. w. gezogen, in α, ε u. ſ. w. geſchnitten hat. Wenn man auf dieſe Weiſe (7 g und 8 f gleich 11 a und 10 b) mehrere Punkte der Curve conſtruirt und die Perſpectiven v und x ihres Verſchwindungspunktes in die Schnittpunkte des Horizontes mit den Cylinderſeiten 1 und 17 geſetzt, Punkte ihrer übrigens überflüſſigen Verlängerungen v (e^1) und x e^1 noch dadurch beſtimmt hat, daß man (r^1) (e^1) und r^1 e^1 gleich r e, n q gleich a k u. ſ. w. machte, ſo kann man die ganze Curve (e^1) v e x e^1 zeichnen. Da das Stück a e g dieſer Curve die Perſpective der Linie A G, das Stück k t des Horizontes die Perſpective

der Linie K T iſt, ſo ſind a k, b l, e r u. ſ. w. die Perſpectiven der lothrechten Linien A K, B L, E R u. ſ. w. —

§. 378. Nach dem eben gezeigten Verfahren, welches, wie geſagt, der Grundriß-Methode entſpricht, ſoll die nachfolgende Aufgabe gelöſt werden; wie man ſich aber bei Anwendung der Verſchwindungspunkt-Methode zu verhalten hat, ſoll eine zweite Ausführung derſelben Aufgabe zeigen.

Beiſpiel 38.

§. 379. **Aufgabe.** In Fig. 107 (Taf. 19) iſt in den Vierecken A B G H, J K L M, C F E N und in dem Kreiſe um U der Grundriß eines Stadttheiles gegeben, wovon das Viereck A B G H und der Kreis um U Thürme bedeuten. Der Kreis um O ſei der Grundriß der cylindriſch gekrümmten Bildfläche, O der des Geſichtspunktes. Die Höhe des Auges und die Höhen der Gebäude ſind aus Fig. 108 zu entnehmen — es ſoll die Perſpective des Stadttheiles conſtruirt werden.

§. 380. **Ausführung nach der Grundriß-Methode.** In Fig. 109 (Taf. 19) liegt ein Theil der zur Ebene abgewickelten Bildfläche vor. Ihre Höhe iſt beliebig; die Grundlinie iſt 0. 24; der Horizont iſt in einer Höhe darüber, welche gleich iſt O° O in Fig. 108. Wie die Bildfläche durch lothrechte Linien (Cylinderſeiten) in 24 gleiche Theile, von denen hier nur 14 verwendbar ſind, getheilt iſt, ſo iſt auch der Cylindermantel in Fig. 107 in 24 gleiche Theile getheilt und zwar durch Radien (die durch jene Cylinderſeiten denkbaren Geſichtslinien-Ebenen bedeutend), deren Verlängerungen durch die gegebenen Objecte hindurch hierin diejenigen Stücke bezeichnen, deren Perſpectiven in die den Radien gleichbezifferten lothrechten Cylinderſeiten in Fig. 109 fallen. Die perſpectiviſchen Höhen jener Stücke in der Bildebene werden durch die Aufriß-Fig. 108, wo O der Geſichtspunkt und Y° Y eine, alle anderen vertretende Cylinderſeite (die Bildfläche) iſt, ermittelt, nachdem man die Stücke in der aus Fig. 107 zu entnehmenden Entfernung vom Geſichtspunkte nach Fig. 108 in einer gleichen Entfernung von der Standlinie O° O nebſt den ihnen eigenen Höhen geometriſch übertragen, und hier durch Geſichtslinien, nach O gezogen, ihre perſpectiviſchen Höhen und Größen auf der Cylinderſeite (Bildfläche) Y° Y beſtimmt hat. Die Perſpectiven von Stücken, welche, wie z. B. die Kante C des Stadttheiles C F E N, zwiſchen zwei Radien liegen, werden ermittelt, wenn man zunächſt die Geſichtslinie, hier c° C, nach ihnen zieht, die Entfernung des

Punktes c° vom Punkte 6, hier als $^2/_3$ des Bogens 5. 6 betragend, feſtſtellt, und ſo in der Conſtruction links vom Punkte 6 in $^2/_3$ der Länge 5. 6 den Punkt c° bezeichnet und durch ihn eine Lothrechte zieht. Darauf überträgt man die Entfernung O C aus Fig. 107 nach Fig. 108 in $O^\circ c^\circ$, macht hier die Lothrechte $c^\circ c^2$ gleich der gegebenen Höhe des Stadttheiles und zieht nun die Geſichtslinien $O c^\circ$ und $O c^2$, wodurch auf der Cylinderſeite (Bildfläche) $Y^\circ Y$ in $c^1 c^3$ die perſpectiviſche Höhe und Größe für die Kante $c c^1$ in Fig. 109 abgeſchnitten wird. So auch wird die Perſpective des cylindriſchen Thurmes durch Ermittelung der Höhe und Größe der Perſpectiven $r r^1$, $q q^1$, $s s^1$ u. ſ. w. ſeiner in R, Q, S u. ſ. w. ſtehenden Seiten gefunden.

Soll dieſelbe Aufgabe nach der Verſchwindungspunkt-Methode §. 381.
ausgeführt werden, und ſind in der Grundriß-Fig. 110 (Taf. 19) der Halbkreis um O, als gekrümmte Bildfläche, und die beiden Vierecke A B G H und C N E F zuſammen ein Theil des in Fig. 107 gegebenen Grundriſſes in doppeltem Maßſtabe, ſo wandelt man den Bildflächen-Cylinder in ein Prisma von beliebig vielen Seitenflächen um, behandelt dieſe als ebene Bildflächen und conſtruirt auf jeder einzelnen die Perſpectiven der in ihrem Geſichtsfelde liegenden Objecte.

In Fig. 110 iſt der Halbkreis um O durch gleichentfernte Radien ſo getheilt, wie es einer Theilung des ganzen Kreiſes in 12 Theile entſpricht, damit das zwiſchen je zwei Radien (Geſichtslinien) liegende Geſichtsfeld wenigſtens nicht mehr als 37° umfaſſe; es ſind dann die Sehnen 0. 1, 1. 2, 2. 3, 3. 4, und 4. 5 gezogen, welche nunmehr 5 ebene Bildflächen vorſtellen, die in der Conſtruction, Fig. 111 (Taf. 19), in einer Ebene aneinandergereiht vorliegen. In letzterer Figur iſt des doppelten Maßſtabes wegen der Horizont zweimal ſo hoch über der durch a° gehenden Grundlinie gezogen, wie in Fig. 109. Die den einzelnen Bildflächen entſprechenden Verticalen liegen durch deren Mitten. In den Schnittpunkten derſelben mit dem Horizonte liegen die Hauptpunkte P^1, P^2, P^3 u. ſ. w. Die Diſtanz iſt für alle Bildebenen dieſelbe, weshalb die herabgeſchlagenen Geſichtspunkte O^1, O^2, O^3 u. ſ. w. alle in gleicher Entfernung von den Hauptpunkten liegen. p^1, p^2 u. ſ. w. ſind die Grundpunkte. — (Die Buchſtaben des großen Alphabets werden immer Punkte des Grundriſſes, die kleinen Buchſtaben Punkte der Conſtruction bezeichnen.) —

Erſte Bildebene. Von der gegebenen, in der Grundebene liegenden Linie A N iſt, wie die Geſichtslinien O A und O L zeigen, nur die Perſpective des Stückes A L auf der erſten Bildebene zu conſtruiren. Daſſelbe

bildet, dem Grundriſſe nach, mit der Verticalebene den Winkel von $29\frac{1}{2}°$, weshalb α^1 im Horizonte ſein Verſchwindungspunkt und $t\alpha^1$ der Theilpunkt dazu iſt. Da A N die verlängerte erſte Bildebene im Punkte M ſchneidet, ſo überträgt man das Maß $P^1 M$ in die Grundlinie der Conſtruction in $p^1 m$, zieht $m\alpha^1$, und ſchneidet dieſe, nachdem man noch $m a^\circ$ gleich M A gemacht hat, durch eine Linie, von a° nach dem Theilpunkte $t\alpha^1$ gezogen, in a; das Stück der Linie $m\alpha^1$ von a bis l in der Grenze der zweiten Bildebene iſt dann die Perſpective des Stückes A L. Trägt man darauf die gegebene Höhe der in A ſtehenden lothrechten Thurmkante in $a^\circ a^2$ auf, und ſchneidet eine durch a gezogene Lothrechte durch eine Linie, von a^2 nach $t\alpha^1$ gezogen, in a^1, ſo iſt $a a^1$ die Perſpective jener Thurmkante, und zieht man von α^1 durch a^1 bis zur Grenze der zweiten Bildebene, ſo iſt $a^1 l^1$ ein Theil der Perſpective der obern horizontalen Kante des Thurmes.

Zweite Bildebene. In dieſe fallen die Perſpectiven der Thurmkanten B und G, der Kante C des Stadttheiles C N E F, der zwiſchen dieſem und dem Thurme durchgehenden Straße, und zunächſt des Stückes L J der Linie A N. Letzteres bildet mit der Verticalebene O R den Winkel von $59\frac{1}{2}°$, weshalb α^2 ſein Verſchwindungspunkt und $t\alpha^2$ dazu der Theilpunkt iſt. Ueberträgt man, da die verlängerte zweite Bildebene die Linie A N im Punkte Q ſchneidet, das Maß $P^2 Q$ in $p^2 q$ und zieht $q\alpha^2$, ſo iſt das Stück i l hiervon die Perſpective des Stückes J L, welche ſich an den in der Grenze der erſten Bildebene ſchon vorhandenen Punkt l anſchließt. Die Perſpectiven c und b der Punkte C und B werden gefunden, wenn man $q c^\circ$ und $q b^\circ$ gleich Q C und Q B macht und dann i l durch Linien, von c° und b° nach dem Theilpunkte $t\alpha^2$ gezogen, ſchneidet. Macht man dann wieder $b^\circ b^2$ gleich der gegebenen Thurmhöhe, und $c^\circ c^2$ gleich der gegebenen Höhe des Stadttheiles und zieht von b^2 und c^2 Linien nach dem Theilpunkte $t\alpha^2$, ſo ſchneiden dieſe auf den durch b und c zu ziehenden Lothrechten in $b b^1$ und $c c^1$ die perſpectiviſchen Größen der in B und C ſtehenden Gebäudekanten ab. — Die Richtung der Straße weicht von der der Verticalebene um 26° ab, weshalb γ der Verſchwindungspunkt der ihr folgenden horizontalen Kanten iſt, und dahin auch b g und $b^1 g^1$ gerichtet ſind. Die Perſpective g des Punktes G wird in der $b\gamma$ vermittelſt des dem Verſchwindungspunkte γ entſprechenden Theilpunktes beſtimmt.

Dritte Bildebene. Das auf dieſer zu conſtruirende Stück J S der Linie A N weicht von der Verticalebene $O P^3$, dem Grundriſſe nach, um $89\frac{1}{2}°$ ab, weshalb ſein Verſchwindungspunkt in ſehr großer Entfernung außerhalb

des Conſtructionsraumes liegt und es rathſam iſt, zuvor die Perſpective s u auf der vierten Bildebene zu conſtruiren und dann i mit s durch eine Linie zu verbinden.

Die Conſtruction der Perſpectiven auf den übrigen Bildebenen gleicht der auf den erſten beiden und bedarf es dabei keiner weitern Erläuterung. —

Schließlich liegt in der gebrochenen Linie a l i s u n die Perſpective der §. 382.
Linie A N vor. Die nunmehr herantretende Schwierigkeit, dieſe gebrochene Linie, von der überdies nur wenige Punkte perſpectiviſch ganz richtig ſind, in eine Curve umzuwandeln, wird erſt recht verſtändlich, wenn man ſie mit der entſprechenden Linie in Fig. 109 vergleicht. Dies und der Hinblick auf die Umſtändlichkeit des Verfahrens bei der etwaigen Annahme noch ſchmälerer Bildebenen, als hier gewählt ſind, ſpricht wohl überzeugend für die Vorzüglichkeit der Grundriß-Methode bei der vorliegenden Art von Conſtructionen.

Funfzehntes Kapitel.

Das Kuppelbild.

Die Anleitung zur Conſtruction von Perſpectiven auf der inneren §. 383.
Fläche eines Kugelſtückes iſt aus dem vorhergehenden Kapitel zu entnehmen:

Sieht man in Fig. 107 den Kreis um O als die Grundriß-Projection einer halbkugelförmigen Kuppel an, ſo fallen die Perſpectiven der Stücke, welche dort durch die Verlängerungen der Radien (Geſichtslinien-Ebenen) in den gegebenen Objecten bezeichnet werden, in die entſprechenden Meridianlinien der Kuppel. Die Höhen der Perſpectiven in dieſen Meridianlinien ſind durch eine Aufrißprojection, wie Fig. 108 iſt, zu ermitteln, wenn man an Stelle der dort geraden Linie (Cylinderſeite) Y° Y die Kuppelkrümmung, eine Meridianlinie, ſetzt und dazu den Geſichtspunkt entſprechend orientirt.

Von einer Abwickelung der Kuppelfläche behufs der perſpectiviſchen Conſtruction kann ſelbſtverſtändlich nicht die Rede ſein.

Fünfter Abschnitt.

Construction der Perspectiven der Schattengrenzen.

Sechzehntes Kapitel.

Allgemeines.

§. 384. Nachdem in der Ersten Abtheilung das Wesen des Lichtes und sein Verhalten bei der Berührung mit Körpern im Allgemeinen erörtert worden, bleibt dem vorliegenden Abschnitte die Aufgabe, Anleitung zu geben 1) zur Ermittelung der Grenzen, bis zu welchen gegebene Körper von gegebenem Lichte beleuchtet werden, sowie der Grenzen des Raumes, welchem durch solche Körper das Licht entzogen wird, und 2) zur Construction der Perspectiven dieser Grenzen.

§. 385. Schon Eingangs der Ersten Abtheilung ist die Fortpflanzungsbahn des Lichtes als eine geradlinige bezeichnet worden. Da die ebendaselbst späterhin erwähnten Inflexionserscheinungen des Lichtes beim Vorübergange an scharfen Kanten so überaus subtiler Art sind, daß sie, wo es sich, wie hier, um breite Lichtbüschel handelt, der Beobachtung fast ganz entgehen, so kann für den vorliegenden Zweck von ihrem Auftreten gänzlich abgesehen und ein Lichtstrahl als in einer unter allen Umständen geradlinigen Bahn fortschreitend angesehen werden.

Eine nächſte Folgerung aus dieſer Vorausſetzung iſt, daß auch der Schatten, welchen ein Körper durch den Raum wirft, ſein Schlagſchatten, ſich in gerader Richtung fortpflanzt, da ſeine Grenzen durch geradlinige Lichtſtrahlen gebildet werden. Es muß demnach, wenn man das Licht als von einem Punkte ausgehend annimmt, der Schlagſchatten eines körperlichen Punktes, etwa einer Kegelſpitze, eine unendlich lange gerade Linie ſein; es muß der Schlagſchatten einer mit allen ihren Punkten dem Lichte ausgeſetzten körperlichen geraden Linie, etwa einer Würfelkante, eine Ebene ſein; es muß ferner der Schlagſchatten einer etwa viereckigen Scheibe oder eines Würfels eine unendlich lange abgekürzte Pyramide, und der Schlagſchatten einer runden Scheibe oder einer Kugel einen unendlich langen abgekürzten Kegel bilden, u. ſ. w.

§. 386. Wie nun die durch den Raum an dem Auge vorübergehenden Lichtſtrahlen an ſich nicht ſichtbar, dies vielmehr erſt dann ſind, wenn ſie, auf einen Körper treffend, von dieſem in das Auge reflectirt werden, ſo iſt auch der Schlagſchatten im Raume an ſich ſelbſt nicht — da er überhaupt nichts Poſitives iſt, vielmehr nur die Abweſenheit des Lichtes bedeutet — ſondern nur dann wahrnehmbar, wenn er von einem Körper theilweiſe aufgefangen wird, und zwar erkennt das Auge in dieſem Falle ihn und ſeine Grenzen an dem Ausbleiben der Reflexion an den durch den Schatten verurſachenden Körper der Erleuchtung beraubten Theilen des den Schatten auffangenden Körpers.

§. 387. Fängt man die Schlagſchatten der oben angeführten Objecte auf einer Fläche auf, ſo bilden ſie hierauf Figuren, welche der Geſtalt der Schatten werfenden Körper in der Weiſe entſprechen, daß, wenn an die Stelle des Lichtes das Auge träte, die Grenzen der aufgefangenen Schlagſchatten mit den dann ſichtbaren Grenzen der Körper zuſammenfallend erſcheinen würden. Da die unter dieſer Annahme ſichtbaren Grenzen der Körper an dieſen ſelbſt auch die wirklichen Grenzen zwiſchen deren beleuchteten und nicht beleuchteten Theilen, alſo die Schattengrenzen ſein müſſen, ſo ſind die Schlagſchattengrenzen insbeſondere als die Schlagſchatten der Schattengrenzen an den Körpern ſelbſt anzuſehen.

§. 388. Die Perſpectiven der Schlagſchattengrenzen werden deshalb auch in Verbindung mit denen der Schattengrenzen an den Körpern ſelbſt conſtruirt.

Der Kürze wegen werden in der Folge beide Schattenarten durch die Bezeichnungen Schlagſchatten und Objectſchatten unterſchieden werden.

§. 389. Wenn das Licht nicht von einem Punkte, ſondern von einem Körper von gewiſſer Größe, alſo von einer Menge bei einander liegender Punkte ausgeht, ſo verurſacht jeder derſelben einen beſondern Object- und einen entſprechenden Schlagſchatten. So weit dieſe Schatten nun von dem Lichte anderer Punkte des leuchtenden Körpers getroffen und dadurch wieder erhellt werden, nennt man ſie Halbſchatten. Die verhältnißmäßig kleine Stelle im Schatten, welche durch keinen der leuchtenden Punkte erhellt wird und deshalb am dunkelſten iſt, nennt man den Kernſchatten.

Iſt in Fig. 112 (Taf. 18) der Kreis um L der leuchtende Körper, etwa eine der Kugelform ſehr nahe kommende Milchglaskuppel einer Lampe, iſt ferner der Kreis um K der beleuchtete Körper, eine Kugel, und das Viereck daneben eine Tafel, welche den Schlagſchatten der letztern auffängt, ſo beleuchtet der Punkt A nur das Stück $\alpha^1 l \alpha$ der Kugel, und es iſt das Stück $\alpha^1 s \alpha$ mit der Grenze $\alpha^1 \alpha$ der Objectſchatten; auf der Tafel aber iſt der (perſpectiviſche) Kreis durch a^1 und a der Schlagſchatten. Der dem Punkte A entſprechend liegende Punkt B beleuchtet andererſeits das Stück $\beta^1 l \beta$ der Kugel, und es iſt das Stück $\beta^1 s \beta$ mit der Grenze $\beta^1 \beta$ der Objectſchatten, auf der Tafel aber der Kreis durch b^1 und b der entſprechende Schlagſchatten. An der Kugel wird demnach das Stück $\beta \alpha^1$ des dem Punkte A entſprechenden Objectſchattens durch das Licht des Punktes B wiedererhellt, ſowie andererſeits das Stück $\alpha \beta^1$ durch das Licht des Punktes A wiedererhellt wird. Außerdem erhellt noch das Licht der zwiſchen B und D und zwiſchen A C liegenden Punkte die erwähnten Objectſchatten bis δ und γ hin. Es folgt daraus, und, da Aehnliches mit allen innerhalb der Kugelzone $\alpha^1 \delta \gamma \beta^1$ gelegenen Stellen vorgeht, daß dieſe Zone Halbſchatten hat.

In gleicher Weiſe wird auf der Tafel das Stück $b a^1$ des dem Punkte A entſprechenden Schlagſchattens durch das Licht des Punktes B, andererſeits das Stück $a b^1$ des dem Punkte B entſprechenden Schlagſchattens durch das Licht des Punktes A wiedererhellt. Außerdem werden dieſe Schlagſchatten noch durch das Licht der zwiſchen B und D und zwiſchen A und C liegenden Punkte bis zu der Peripherie des durch d und c gehenden Kreiſes wiedererhellt, ſo daß, da Gleiches auch in der Ausdehnung g h und in allen anderen Ausdehnungen vorgeht, der ganze Schlagſchattenring um den Kernſchatten d c, welcher, von dem Lichte keines Punktes erreichbar, am dunkelſten iſt, als Schlagſchatten der Halbſchattenzone $\alpha^1 \delta \gamma \beta^1$ vorliegt. Er iſt ſelbſt ein Halbſchatten, kommt aber in der Nähe des Kernſchattens dieſem an Dunkelheit ziemlich nahe, weil hier weniger Punkte des leuchtenden Körpers auf ihn erhellend zu wirken vermögen oder, anders ausgedrückt, ſich hier die mehrſten Schlagſchatten decken.

An der Kugel K ſelbſt wird nur das Stück $\delta s \gamma$ von dem Lichte keines Punktes des leuchtenden Körpers L getroffen und hat deshalb vollkommenen Schatten. In dem vollkommen beleuchteten Stücke $\alpha^1 l \beta^1$ iſt in und um den Punkt l das ſogenannte „höchſte Licht“; denn hier fallen die mehrſten Strahlen nahezu rechtwinklig ein, und iſt dieſer Punkt dem leuchtenden Körper zugleich am nächſten. Nach α^1 und β^1 hin ſtuft ſich die Helligkeit des Stückes $\alpha^1 l \beta^1$ wegen der Schiefheit der dort einfallenden Strahlen in der Weiſe ab, daß das Auftreten der Halbſchattenzone bei $\alpha^1 \beta^1$ kaum merklich iſt.

§. 390. Aus Fig. 113 (Taf. 18) iſt zu erſehen, inwiefern die Größe des leuchtenden und des beleuchteten Körpers und die Entfernung derſelben von einander ſowohl, als von dem den Schlagſchatten auffangenden Körper von Einfluß auf die Bildung und die Dunkelheitsabſtufung des Schlagſchattens ſind. Auf der Tafel I iſt, weil ſie gerade durch die Spitze des Schlagſchattenkegels $\alpha x \beta$ geht, der Kernſchatten auf einen Punkt x reducirt; auf der Tafel II iſt gar kein Kernſchatten, alles Halbſchatten, da jeder Punkt des Schlagſchattens hier noch von dem Lichte irgendwelcher Punkte der leuchtenden Kugel L getroffen wird. Da dies jedoch in geringerem Grade

bei den in der Nähe des Mittelpunktes z gelegenen, etwa durch den Kreis $f^2 f^3$ umſchloſſenen Stellen der Fall iſt, ſo iſt hier ſowohl, wie auf der Tafel I in der Nähe von x, der Halbſchatten von ſtärkerer Dunkelheit, als an ſeinem, übrigens unbeſtimmt verlaufenden, Rande.

§. 391. Daß die Halbſchatten in den Figuren 112 und 113 ſo große Ausdehnungen haben, hat ſeinen Grund nicht allein in dem Umſtande, daß dort die Lichtquelle nicht ein einzelner Punkt, vielmehr eine Gruppe leuchtender Punkte iſt, ſondern auch in der großen Nähe des beleuchteten Körpers zum leuchtenden, da hierbei die äußeren Strahlen der Lichtbüſchel, die, von den einzelnen Lichtpunkten ausgehend, überhaupt dem beleuchteten Körper zugehen, ſo ſtark divergirende ſind. Denkt man ſich den Körper K in Fig. 113 allmählich in größere Entfernung von L rückend, ſo werden zugleich die äußeren Strahlen $A\alpha$ und $A\beta$ des Lichtbüſchels $\alpha A \beta$, und ſo auch die der anderen Büſchel, immer mehr an Divergenz verlieren; und denkt man K in ſo ungeheure Entfernung von L gerückt, wie die der Erde von dem Monde oder von der Sonne iſt, ſo iſt endlich die Verſchiedenheit der Richtung jener Strahlen in der Nähe von K ſo gering geworden, daß ſie, als in Parallelität übergegangen, unbeachtet gelaſſen werden darf. So iſt es für die bildliche Darſtellung zu rechtfertigen, daß man hierbei das Sonnen- und Mondlicht als von einem Punkte, dem Mittelpunkte der Sonne oder des Mondes ausgehend, in parallelen Strahlen kommend und darum Halbſchatten ausſchließend, anſieht.

Das einzige Merkmal einer Verſchiedenheit der Strahlenrichtung jener Himmelskörper an irdiſchen Objecten iſt die Unbeſtimmtheit der Grenzen von Schlagſchatten, wenn dieſe in einiger Entfernung vom Schatten werfenden Körper aufgefangen werden — ein in bildlichen Darſtellungen leicht zu beachtender Umſtand.

Die bei theilweiſe bewölktem Himmel oft vorkommende Erſcheinung von Sonnenſtrahlen, welche, durch Wolkenlücken gehend, ſtark divergiren, iſt kein Beweis für die wirkliche Divergenz der Sonnenſtrahlen; vielmehr iſt dieſe Erſcheinung nur ſubjectiv und dahin zu erklären, daß die auch hier als in der That parallel aufzufaſſenden

Strahlen nach der Sonne zu etwa so zu convergiren scheinen, wie die an sich parallelen Schienenstränge einer Eisenbahn nach dem Horizonte zu. —

§. 392. Nachdem nunmehr die Wirkungen sowohl der von leuchtenden Punkten in der Nähe (künstliche Flamme) ausgehenden divergirenden Lichtstrahlen, als der von Punkten in unendlicher Entfernung (Sonne und Mond) ausgehenden parallelen Lichtstrahlen als ausreichend erörtert angesehen werden können, muß hier noch der Wirkungen einer dritten Gattung von Licht mit gleichsam convergirenden Strahlen gedacht werden. Es ist dies das sogenannte atmosphärische Licht oder Tageslicht, welches, wenn die Sonne bei sonst klarem Himmel von einer Wolke verdeckt ist, von den Lufttheilchen reflectirt, oder an trüben Tagen von dem die Sonne verdeckenden Wolkenschleier reflectirt und refractirt zur Erdoberfläche gelangt. Seine in allen Richtungen durcheinander leuchtenden Strahlen wirken auf die Objecte im Freien, wie wenn sie von einer über diese gestülpten, mit ihrer inneren Fläche leuchtenden Halbkugel herrührten.

§. 393. Ist in Fig. 114 (Taf. 18) das Dreieck A B C der Grundriß eines in freiem Felde stehenden dreiseitigen Prismas, der Kreis darum der Horizont, d. h. die scheinbare Grenze zwischen Himmel und Erde, so empfängt zunächst die obere Grundfläche des Prismas das Licht der ganzen leuchtenden Halbkugel, des Himmels. Jede lothrechte Prismafläche aber, wie B C, empfängt nur das Licht einer Hälfte des Himmels, und wirft dabei vor sich eine unendliche Menge dreieckiger Halbschatten, welche von dem aus rückwärts liegenden Gegenden, wie 1 und 11, 2 und 12, 3 und 13 u. s. w. kommenden Lichte verursacht werden. Während nämlich auf den etwa von 1 und 11 verursachten Schatten außer dem halben Himmel H M J noch die großen Stücke von H bis 1 und von J bis 11 wiedererhellend wirken, vermögen auf einen etwa von 8 und 18 verursachten Schatten außer dem halben Himmel H M J nur die kleinen Stücke H 8 und J 18 erhellend zu wirken, weshalb jene weitabfallenden Schatten fast aufgehoben, die in großer Nähe, dicht bei s liegenden aber, wenn auch mit sehr verschwommenen Umrissen, erkenn-

bar bleiben. Von den anderen Prismaflächen ist ein Gleiches nachzuweisen.

§. 394. Auf eine lothrecht stehende Fläche A B C D (Fig. 115, Taf. 18), welche von einer horizontalen Fläche C D E F überdacht ist, wirft die letztere ebenfalls eine unendliche Menge dreieckiger Halbschatten, welche weiter ab von D C durch die seitlich einfallenden Strahlen wieder aufgehoben werden, in größerer Nähe jedoch zu D C, etwa bei s, in einem kleinen, unbestimmt begrenzten Halbschatten-Dreieck erkennbar bleiben.

§. 395. Uebrigens wirkt das atmosphärische Licht, in der Bedeutung als reflectirtes Licht, erheblich modificirend auf die Dunkelheit der der Sonne entsprechenden Schatten im Freien.

Von besonderm Interesse ist dieses Licht, wenn seine Strahlen durch eine Oeffnung in einen übrigens umschlossenen Raum, durch das Fenster in ein Zimmer dringen. Wegen der in diesem Falle eigenthümlichen Gestaltung der Schatten sind weiter unten, in Kap. 20, auch einige dem atmosphärischen Lichte entsprechenden Schattenconstructionen vorgeführt. —

§. 396. Von dem erheblichsten Einflusse auf den Grad der Dunkelheit der Schatten im Allgemeinen ist *das reflectirte Licht*, und, wegen seiner großen Leuchtkraft, namentlich das reflectirte Sonnenlicht.

Setzt man, um der täuschenden Einwirkung der verschiedenen Farben der Körper auf das Urtheil über den Dunkelheitsgrad der Schatten zu entgehen, gleiche, am besten weiße Färbung für den Schatten werfenden wie für den Schatten fangenden Körper voraus, so ist im Allgemeinen der Schlagschatten dunkler als der Objectschatten, weil er nur auf solche Flächen fallen kann, welche bei Beseitigung des Schlagschatten werfenden Körpers von *directem Lichte* beleuchtet sein würden und demnach der Seite abgewendet sind, von woher wirksame *Reflexe* kommen können. Deshalb ist er auch, wenn er über gekrümmte Flächen fällt, auf diesen immer da am dunkelsten, wo sonst die höchsten Lichter sein würden. Der Objectschatten liegt hingegen stets auf der Seite der Körper, welche dem reflectirten Lichte am meisten ausgesetzt ist. Dem entsprechend ist auch seine

Dunkelheit, wenn er Körpern angehört, die von krummen Flächen begrenzt ſind und ſich deshalb zur Beobachtung beſonders eignen, am geringſten auf ſolchen Flächentheilen, die zu der Richtung des directen Lichtes nahezu rechtwinklig gerichtet ſind, und am ſtärkſten auf den Flächentheilen, deren Richtung ſich der des directen Lichtes nähert; d. i. gewöhnlich in der Nähe der Grenze des Objectſchattens.

§. 397. Befindet ſich aber ein anderer reflectirender Körper in der Nähe auf der Seite des Objectſchattens, ſo wird dadurch dieſe allgemeine Anordnung des Dunkelheitsverhältniſſes in letzterem in einer Weiſe modificirt, die ſich am deutlichſten an einem Beiſpiele, Fig. 116 (Taf. 20), erläutern läßt:

Hier bedeuten die beiden concentriſchen Kreisſtücke den Grundriß eines zwiſchen A und B ausgeſchnittenen hohlen Cylinders, der von Sonnenlicht, das hier des beſſeren Verſtändniſſes halber in unter ſich gleich entfernte einzelne Strahlen zerlegt vorgeführt iſt, beleuchtet wird.

Von der äußeren Fläche des Cylinders iſt die Hälfte D F E beleuchtet, in F wäre das höchſte Licht; die andere Hälfte D H E hat Objectſchatten. Nimmt man nun in einiger Entfernung vom Cylinder auf der Seite des Objectſchattens und in der Richtung des Strahles 9 H einen gleichfalls von der Sonne beleuchteten Körper an, ſo treffen die von dieſem reflectirten Strahlen den Cylinder am reichlichſten und am wenigſten ſchief in der Nähe von H, weshalb ſein Objectſchatten hier am wenigſten dunkel erſcheinen wird. — Nimmt man den reflectirenden Körper in größerer Nähe bei dem Cylinder an, wie etwa die zu den Sonnenſtrahlen normal gerichtete Tafel T U, ſo fängt dieſe zwiſchen d und e den Schlagſchatten des Cylinders auf; ſie vermag an dieſer Stelle nicht allein ſelbſt nicht zu reflectiren, ſondern ſie verhindert hier auch den Zugang des von anderen Körpern hinter ihr reflectirten Lichtes; es wird deshalb der Objectſchatten in der Umgebung von H am dunkelſten ſein. Die regelmäßige Reflexion an den Stellen d T und e U der Tafel fände derart ſtatt, daß die Sonnenſtrahlen in ſich ſelbſt und nicht in der Richtung nach dem Cylinder zu reflectirt würden;

die aber an jenen Stellen unregelmäßig reflectirten Strahlen treffen den Objectschatten aus größter Nähe, am reichlichsten und am wenigsten schief bei C und bei N, weshalb derselbe hier mehr als bei D, bei H und bei E erhellt sein wird. — Nimmt man jedoch die reflectirende Tafel schief zu den Sonnenstrahlen, etwa wie S V gerichtet an, so fällt der Schlagschatten zunächst wieder zwischen d^1 und e^1. Es ist derselbe zwischen Q und e^1 dunkler als zwischen Q und d^1, weil er wegen der Nähe des Cylinders dort nur spärlich von seitlich einfallenden Reflexen wiedererhellt werden kann; darum vermag er von dort aber auch um so weniger erhellend auf den Objectschatten zwischen H und W zu wirken, und ist dieser deshalb hier, und besonders bei H, am dunkelsten. Während ferner die von dem Stücke d^1 S regelmäßig reflectirten Strahlen sich von dem Cylinder abwenden, erhellen die von dem Stücke e^1 V reflectirten die ihnen naheliegenden Theile des Objectschattens sehr erheblich, und besonders bei C, da sie ihn hier aus größter Nähe, am reichlichsten und am wenigsten schief treffen; und zwar wird diese Wirkung durch die unregelmäßig reflectirten und bis gegen W hin wirkenden Strahlen nur noch verstärkt. Auf der andern Seite des Objectschattens wird durch die unregelmäßige Reflexion N augenscheinlich mehr als D erhellt sein.

Was die innere Cylinderfläche betrifft, so sind davon die einen Hälften der Stücke A β a und B α b Object-, die anderen Hälften Schlagschatten. Das allein von directem Lichte getroffene Stück a r b hat bei r das höchste Licht, weil hier der eine Strahl normal, und dessen benachbarte Strahlen nahezu normal einfallen. Verfolgt man die Richtungen der von den Punkten l, g und a reflectirten Strahlen, so findet man, daß dieselben die innere Cylinderfläche in näher bei einander liegenden Punkten und an sich weniger schief gerichtet treffen zwischen B und γ, als zwischen γ und α, und deshalb dort erhellender wirken müssen, als hier. Es ist daher auch das Schattenstück B α b bei α dunkler als bei λ, vollends dunkel aber bei b, wohin kaum wiederholt reflectirte Strahlen zu dringen vermögen. In Bezug auf das Schattenstück A β a ist das Gleiche zu sagen. —

§. 398. Für die nun folgenden Conſtructionen iſt die hier mehrfach hervorgehobene Unterſcheidung des Lichtes, ſeinem Urſprunge und der damit zuſammenhängenden Strahlenrichtung nach, als Licht, deſſen Strahlen

1) von einem Punkte ausgehen und divergiren,

2) von einem Punkte ausgehen und parallel ſind,

3) von unendlich vielen Punkten ausgehen und convergiren,

feſtgehalten, für die einzelnen Kapitel jedoch überſchriftlich ausgedrückt worden durch die Bezeichnungen:

1) die künſtliche Lichtflamme,

2) Sonnen- und Mondlicht,

3) atmoſphäriſches Licht.

Bei allen Aufgaben ſind die Perſpectiven ſowohl des Schatten werfenden als des im Schlagſchatten befindlichen Körpers, und außerdem die bei ihrer perſpectiviſchen Conſtruction verwendeten Hülfspunkte und -Linien gegeben. Denn, handelt es ſich um die Conſtruction der Schatten der von ebenen Flächen begrenzten Körper, ſo bilden wohl perſpectiviſch ſchon vorliegende Kanten ſelbſt die Objectſchattengrenzen, und ſind auch als ſolche nach einer kurzen Ueberlegung leicht zu erkennen; in Bezug jedoch auf die Objectſchattengrenzen an ſolchen Körpern, welche ganz oder theilweiſe von krummen Flächen begrenzt ſind, bedarf es ſtets der beſondern Conſtruction ihrer Perſpectiven, und ſind dazu jene Hülfspunkte und -Linien unentbehrlich.

Siebzehntes Kapitel.

Conſtructionen.

§. 399. Das Verfahren bei der Conſtruction der Schlagſchatten-Perſpective eines körperlichen Punktes (einer Spitze) oder einer körperlichen geraden Linie (einer Kante) ergiebt ſich von ſelbſt, wenn man feſthält, daß der Schlagſchatten

1) auf der Oberfläche des Schatten fangenden Körpers,
2) in einer durch das Licht und zugleich durch den Punkt, oder die gerade Linie, gehenden Ebene (Lichtebene), demnach in der Schnittlinie dieſer mit der Oberfläche liegt, und hierin
3) durch Lichtſtrahlen bezeichnet wird, welche durch den gegebenen Punkt, oder die Punkte der gegebenen Linie, gehen.

§. 400. Iſt L in Fig. 117 (Taf. 19) der Lichtpunkt, R ein Punkt, deſſen auf die ebene Fläche H fallende Schlagſchatten-Perſpective r conſtruirt werden ſoll, ſo kann man nach Obigem, um r zu finden,

1) durch L und R die zur Ebene H normale Lichtebene LFMN annehmen, deren Schnittlinie FM mit der Ebene H conſtruiren, und dieſelbe durch einen Strahl, von L durch R gezogen, in r ſchneiden; man könnte aber auch

2) durch L und R eine zur Ebene H ſchiefe Lichtebene S annehmen und die Schnittlinie EG beider durch den Strahl Lr in r ſchneiden.

Da jedoch die perſpectiviſche Conſtruction der Schnittlinien zu einander normaler Ebenen weniger umſtändlich iſt, als die der Schnittlinien zu einander ſchiefer Ebenen, ſo giebt man bei der Conſtruction der Schlagſchatten von Punkten den normal zur Schatten fangenden Ebene anzunehmenden Lichtebenen den Vorzug, zumal dieſe dann, wegen der vorwiegend horizontalen und lothrechten Richtung der ebenen Flächen der Objecte, meiſtens zugleich lothrecht ſind. Lothrecht angenommene Lichtebenen ſind außerdem bei der Conſtruction der Schattenperſpectiven von Körpern mit gekrümmten Oberflächen im Ganzen bequemer anzuwenden, als ſchiefe Lichtebenen.

§. 401. Die Conſtruction der Perſpectiven von Schnittlinien zwiſchen Ebenen iſt in den §§. 322 bis 339 gezeigt worden. — Eine vom Lichtpunkte L (Fig. 117) auf die Schatten fangende Ebene H gefällte, hier normale Linie LF nennt man die Lichtachſe, ihren Fußpunkt F auf der Schatten fangenden Ebene den Fußpunkt des Lichtes; doch kommt die Bezeichnung als Lichtachſe auch einer zur Ebene H ſchiefen Linie LE zu, welche, wenn z. B. der

Schatten der Linie $R\varrho^1$ gesucht werden soll, mit dieser parallel gegen die Schatten fangende Ebene gezogen wird, und ist dann E dazu der Fußpunkt des Lichtes.

Ist in Fig. 118 (Taf. 19) die Perspective eines Prismas ge- §. 402.
geben, in L die eines Lichtpunktes, so ist zunächst F der Fußpunkt des letztern auf der Grundebene, und LF die Lichtachse. Der Fußpunkt auf der erweitert gedachten oberen Prismafläche M ist F^1, die Lichtachse dazu LF^1; der Fußpunkt auf der erweitert gedachten Prismafläche J ist F^2, und LF^2 die Lichtachse dazu. Soll nun die Schlagschatten-Perspective r^1 eines Punktes R^1 construirt werden, dessen Projection (gleichfalls Fußpunkt) auf der Grundebene der Punkt ϱ, auf der erweiterten Prismafläche J der Punkt ϱ^1 ist, so ist die durch F und ϱ gezogene Linie F (r^2) die Schnittlinie der durch L und R^1 anzunehmenden lothrechten Lichtebene mit der Grundebene, und würde der durch den verlängerten Strahl LR darin abgeschnittene Punkt (r^1) die gesuchte Schlagschatten-Perspective auf der Grundebene sein. Da diese der lothrechten Lichtebene angehörige Schnittlinie aber in a an die lothrechte Prismafläche J stößt, so setzt sie sich auf dieser lothrecht in a b fort und ergiebt in ihrem Schnittpunkte r^1 mit dem Strahle L (r^1) die wirkliche Schlagschatten-Perspective von R^1.

Faßte man statt der hier gewählten Lichtebene die zu der erweiterten Prismafläche J normale Lichtebene ins Auge, und zog die den letzteren beiden entsprechende Schnittlinie $F^2\varrho^1$, so erzielte man in dem Schnittpunkte derselben mit dem Strahle L (r^1) kürzer den Punkt r^1.

Soll die Schlagschatten-Perspective r^2 eines lothrecht über R^1 liegenden Punktes R^2 construirt werden, so ist dieselbe in der Fortsetzung der Schnittlinie der zuerst angenommenen Lichtebene mit dem Prisma und zwar auf dessen oberer Fläche M zu finden, zu welcher F^1 der Fußpunkt des Lichtes und ϱ^2 die Projection des Punktes R^2 ist. Zieht man deshalb von F^1 durch ϱ^2, oder gleich durch b eine Linie, so ist diese die Fortsetzung der Schnittlinie, und der durch den verlängerten Strahl LR^2 in ihr abgeschnittene Punkt r^2 der gesuchte.

Die Schattenperſpective r eines lothrecht unter R^1 liegenden Punktes R fällt, wie der Strahl L r zeigt, vor das Prisma.

§. 403. Da es nach dem gezeigten Verfahren möglich iſt, die Schlagſchatten-Perſpective eines Punktes auf jeder beliebigen Schatten fangenden Ebene zu finden, ſo iſt daſſelbe auch zureichend, um die Schlagſchatten-Perſpective einer geraden Linie zu conſtruiren, da man ja nur der Perſpectiven wenigſtens zweier ihrer Punkte bedarf, um jene Perſpective ſelbſt ziehen zu können.

Faßt man demnach in Fig. 117 die Punkte ρ und R als Endpunkte einer Linie ρR, und die Punkte ρ^1 und R als Endpunkte einer Linie ρ^1R auf, ſo iſt ρr der Schlagſchatten der erſteren, und ρ^1r der Schlagſchatten der andern Linie, da die Schlagſchatten der Punkte ρ und ρ^1 mit dieſen ſelbſt zuſammenfallen, und r der Schatten des Punktes R iſt. Und ſieht man in Fig. 118 die Punkte ρ und R als Endpunkte einer Linie ρR an, ſo iſt ρr die Schlagſchatten-Perſpective dieſer Linie. So iſt ferner die gebrochene Linie ρ a b r^2 die Schlagſchatten-Perſpective der als Linie aufzufaſſenden Punktreihe zwiſchen ρ und R^2, wie denn überhaupt die Schnittlinie der durch ρR gehenden lothrechten Lichtebene mit der Grundebene und dem Prisma die Schlagſchatten-Perſpectiven aller innerhalb derſelben Lichtebene denkbaren Objecte enthält.

So wäre hier auch, da g die Schlagſchatten-Perſpective des Punktes G iſt, bg die Schlagſchatten-Perſpective von bG, dieſe als gegebene gerade Linie aufgefaßt. Sieht man endlich die erweiterte Prismafläche J als eine Wand, und $R^1\rho^1$ als eine zu ihr normale Linie an, ſo iſt das Stück $\rho^1 r^1$ der Linie $F^2 r^1$, welche die Schnittlinie der Lichtebene L $F^2 r^1$ mit der Wand iſt (F^2 iſt der Licht-Fußpunkt dazu), die Schlagſchatten-Perſpective von $\rho^1 R^1$ auf der Wand.

§. 404. Für die Conſtruction im Allgemeinen am förderlichſten iſt es, wenn man dabei an folgender, aus den Figuren 117 und 118 abzuleitenden Regel feſthält:

Die Schlagſchatten-Perſpective einer gegebenen geraden Linie, dieſelbe ſei normal oder ſchief zur Schatten fangenden Ebene, findet man, wenn man gegen letztere

aus dem Lichtpunkte eine der gegebenen parallele Linie (Lichtachſe) zieht, darauf durch die Fußpunkte dieſer und der gegebenen Linie auf der Schatten fangenden Ebene eine andere Linie (die Schnittlinie der letztern mit der Lichtebene, d. i. die Schlagſchatten-Perſpective) zieht und deren Länge durch einen durch den Endpunkt der gegebenen Linie gehenden Strahl abſchneidet.

Denn wie jede in der Lichtebene der gegebenen Linie liegende andere, mit dieſer parallele Linie, muß auch die aus dem Lichtpunkte ſelbſt der gegebenen Linie parallel zu ziehende und meiſtens leicht zu conſtruirende Lichtachſe die Schatten fangende Ebene in der Schnittlinie beider Ebenen ſchneiden, und muß umgekehrt der Fußpunkt einer ſolchen Lichtachſe auf der Schatten fangenden Ebene als ein Punkt der Schnittlinie zu verwenden ſein.

Danach wären in Fig. 117 die Schlagſchatten ϱr und $\varrho^1 r$ der beiden Linien ϱR und $\varrho^1 R$ auch als dadurch gefunden anzuſehen, daß, nachdem dort die den beiden Linien parallelen Lichtachſen LF und LE gezogen worden, in den beiden, von F durch ϱ und von E durch ϱ^1 gezogenen Linien die Schnittlinien der lothrechten Lichtebene $LFMN$ und der ſchiefen Lichtebene S mit der Schatten fangenden Ebene dargeſtellt und dieſelben durch den Strahl LR beide in r abgeſchnitten wurden. §. 405.

In Fig. 118 aber wäre die Schlagſchatten-Perſpective bg von bG der gegebenen Regel nach dadurch zu ermitteln geweſen, daß man Le perſpectiviſch parallel bG, dann von e durch b zog und dieſe Linie durch den Strahl LG in L ſchnitt. —

Da auch bei den Conſtructionen der Schatten-Perſpectiven gekrümmter Linien (Kanten) und der Körper, welche von krummen Flächen begrenzt ſind, die gerade Linie das Conſtructionsmittel iſt, bedarf es für dieſelben keiner beſondern Erörterung. §. 406.

Beispiele.

Achtzehntes Kapitel.

Die künstliche Flamme.

Beispiel 39.

§. 407. **Aufgabe.** In Fig. 119 (Taf. 20) ist die Perspective (P Hauptpunkt, P D_2 halbe Distanz) eines **Zimmers und verschiedener Objecte darin gegeben** — es sollen die Schattenperspectiven der Objecte bei der Annahme des **Lichtpunktes L einer** auf dem Wandtische rechts stehenden **Kerze** construirt und einige Andeutungen über die Abstufung der Erleuchtung gegeben werden.

§. 408. **Ausführung.** Zunächst ergiebt die Feststellung der Fußpunkte des Lichtes auf den verschiedenen Wandflächen (die hier nach den ihnen entsprechenden Fußpunkten benannt sind), der Decke und dem Fußboden zugleich die Orte der hellsten Erleuchtung dieser Flächen. Es wird die rechte Seitenwand in der Nähe des Fußpunktes F^2 am hellsten von allen, von dieser Stelle an aber nach allen Seiten hin verhältnißmäßig stärker abnehmend erleuchtet sein, als dies bei den übrigen Flächen der Fall ist, weil wegen der großen Nähe des Lichtes die Strahlen schon in kleiner Entfernung von F^2 sehr spitzwinklig einfallen. Aehnliches ist in Bezug auf die schiefe Wand rechts zu sagen, deren Licht-Fußpunkt F^3 in ihrer Verlängerung liegt. Auch für die Flächen der anderen Wände und Objecte ist festzuhalten, daß sie in der Nähe ihrer Licht-Fußpunkte am hellsten erleuchtet sind; es ist aber auch des Grundgesetzes zu gedenken, daß die Stärke der Erleuchtung der Objecte im quadratischen Verhältnisse zu der Zunahme ihrer Entfernung vom Lichte abnimmt. Wie schwer es dabei ist, den Helligkeitsgrad der Flächen mit einiger Genauigkeit zu bestimmen, ist klar, wenn man bedenkt, daß, wenn in einem Falle die Nähe eines Objectes zum Lichte es als stark erleuchtet erscheinen lassen möchte, dieser Vorzug, wie bei der Wand rechts, wieder durch ein zu spitzwinkliges Einfallen der Strahlen aufgehoben werden kann; und daß ferner, wenn wirklich der

Digitized by Google

Erleuchtungsgrad für zwei Objecte unter Berücksichtigung ihrer Entfernung vom Lichte und der Einfallswinkel der Strahlen vergleichsweise festgestellt wäre, das Urtheil wieder durch einen dritten Factor, nämlich durch die Einwirkung der von anderen in der Nähe befindlichen Objecten regelmäßig oder unregelmäßig reflectirten Strahlen unsicher gemacht wird, abgesehen von dem nicht minder in Betracht kommenden Einflusse, welchen die Farben der Objecte, die Beschaffenheit ihrer Oberflächen und die Größe der Winkel, unter welchen das Auge die letzteren sieht, auf das Urtheil üben. Will man sich demnach nicht mit einer nur ungefähren Schätzung begnügen, so muß man — was für alle Fälle besonders zu empfehlen ist — die Natur selbst zu Rathe ziehen.

§. 409. Der Schlagschatten des Tisches, auf welchem das Licht steht, wird gefunden, wenn man entweder vom Fußpunkte F^2 durch A bis β am Fußboden (Grundebene) zieht, durch β eine der AB parallele Linie βb legt, diese durch den Strahl LB in b abschneidet, dann bc perspectivisch parallel BC zieht und wieder durch den Strahl LC abschneidet u. s. s.; oder wenn man die Projectionen b° und c° der Punkte B und C auf dem Fußboden feststellt, vom Fußpunkte F aus durch b° und c° gezogene Linien durch Strahlen in b und c abschneidet und durch diese Punkte $b\beta$ u. s. w. zieht.

§. 410. Um den Schlagschatten des links auf dem Fußboden stehenden Prismas zu finden, werden zuerst diejenigen seiner lothrechten Kanten gesucht, indem man durch deren Fußpunkte H°, G° und E° vom Licht-Fußpunkte F aus Linien zieht und diese durch die Strahlen LH, LG und LE in h, g und e schneidet. h und e sind darauf durch gerade Linien mit (g) zu verbinden. Da aber G° (g) in γ an die lothrechte Wand F^5 stößt und deshalb der Schlagschatten von G auf diese fallen muß, so wird durch γ eine Lothrechte gezogen und in deren Schnittpunkte g mit dem Strahle LG der wirkliche Schlagschatten von G ermittelt. Schließlich sind noch von g Linien nach den Punkten zu ziehen, in welchen h (g) und e (g) an die Wand stoßen.

§. 411. Von der Pyramide wird zunächst ihr Schlagschatten O (s) M auf dem Fußboden construirt, indem man vom Licht-Fußpunkte F aus den Schlagschatten S° (s) ihrer lothrechten Achse S° S und dann O (s) und M (s), als die Schatten ihrer Kanten OS und MS, zieht. Da aber der Schatten der Achse in σ an die Wand stößt, so wird durch σ eine Lothrechte

gezogen, dieſe durch den Strahl L S in s geſchnitten, und werden nun nach dieſem Punkte die an der Wand emporſteigenden Stücke der Schlagſchatten der ſchiefen Kanten O S und M S gezogen. Um den auf das Prisma fallenden Theil des Schlagſchattens zu conſtruiren, wird der der oberen Grundfläche des Prismas entſprechende Fußpunkt F^1 in der Lichtachſe L F beſtimmt und in gleicher perſpectiviſcher Höhe mit ihm innerhalb der Pyramide ein ihrer Grundfläche paralleler Durchſchnitt $N^1 O^1 M^1$ gezeichnet; es wird dann eine Linie von F^1 aus durch S^1 über die Prismafläche gezogen und durch den Strahl L S in (s^1) geſchnitten, wonach andere Linien, von O^1 und M^1 nach (s^1) gezogen, die Schlagſchatten der Kanten O S und M S auf der Prisma-Grundfläche ergeben, während das auf die Seitenfläche des Prismas fallende Schlagſchattenſtück durch die Verbindungslinie der Punkte i und d begrenzt wird.

§. 412. Den in einer gebrochenen Linie K b p f q über die Stufe, den darauf ruhenden Kaſten und die linke Seitenwand fallenden Schlagſchatten der in k° auf dem Fußboden ſtehenden Kante der Niſche findet man, wenn man die vordere Kaſtenfläche ſowohl, als die Seitenwand bis zum Fußboden verlängert, ſie hier beide durch eine vom Fußpunkte F durch k° gezogene Linie in β und φ ſchneidet, und darauf durch β die Lothrechte b p und durch φ die Lothrechte f q zieht. Verbindet man ſchließlich K mit b, und p mit f durch gerade Linien, ſo haben dieſe als perſpectiviſch parallele Linien einerſeits die Richtung nach einem gemeinſchaftlichen Verſchwindungspunkte x, andererſeits nach ſolchen in der Lichtachſe L F gelegenen Fußpunkten, deren perſpectiviſche Höhen denen der oberen Flächen der Stufe und des Kaſtens entſprechen.

§. 413. Um den Schlagſchatten des an der Wand F^4 befindlichen Wandtiſches und zunächſt ſein auf dieſe Wand ſelbſt fallendes Stück zu finden, conſtruirt man auf der über die Niſche hinweg erweitert gedachten Wand den Schatten (r) des Punktes R, indem man entweder vom Fußpunkte F^4 durch J eine Linie zieht und dieſe durch den Strahl L R in (r) ſchneidet, wonach die Stücke J E und U C der nach dieſem Punkte gerichteten Linien J (r) und U (r) das geſuchte Stück des Schlagſchattens ergeben; oder indem man die Projection r° des Punktes R auf dem Fußboden beſtimmt, von F durch r° bis an die erweiterte Wand in (q) zieht und eine hierdurch gezogene Lothrechte durch den Strahl L R in (r) ſchneidet. Das auf den Kaſten fallende Schlagſchattenſtück findet man, wenn man vermittelſt der Strahlen L E und L C in der Linie b p die Schlagſchatten e und c der Punkte E und C feſtſtellt, dann den Schlagſchatten r^1 des Punktes R unter der Annahme ſucht, daß er auf die ſeitlich verlängerte

lothrechte Kaſtenfläche fiele; und zwar wird er hier gefunden, wenn man von F durch r° bis ϱ^1 zieht und durch eine durch ϱ^1 gezogene Lothrechte den Strahl L R ſchneidet. Von c und c nach r^1 gezogene Linien ergeben darauf das über den Kaſten fallende Schlagſchattenſtück; und bricht man dieſe Linien da, wo ſie an die Wand F^5 ſtoßen, nach r, der eigentlichen Schlagſchatten-Perſpective von R, um, ſo wird damit der Schlagſchatten des Wandtiſches vollendet. r aber iſt der Schnittpunkt einer durch ϱ gezogenen Lothrechten mit dem Strahle L R.

Der Schlagſchatten des an die Wand F^4 ſich lehnenden Stabes A D wird gefunden, wenn man beliebig hoch, hier aber am beſten in der Höhe der oberen Fläche des Wandtiſches, eine in der lothrechten Neigungsebene des Stabes angenommene, zur Wand perſpectiviſch normale Linie z° Z bis an den Stab zieht und dann den Schlagſchatten z des Punktes Z ſucht, indem man von F^4 aus eine Linie durch z° zieht und dieſe durch den Strahl L Z in z ſchneidet. Es müſſen alsdann eine von A durch z bis δ gezogene Linie den Schatten auf der Wand, und andere, von a° bis Z und von δ bis D gezogene Linien den Schatten auf dem Tiſche und den auf dem Fußboden ergeben. Eine vierte Linie aber, von dem Schnittpunkte der Linie a° Z mit der vordern Tiſchkante nach z gezogen, ergiebt den Schatten auf der ſchiefen Unterfläche des Tiſches. §. 414.

So iſt auch der Schlagſchatten des gegen die Ecke gelehnten Stabes V W zu finden, wenn man zuvor in der lothrechten Neigungsebene des Stabes beliebig die Lothrechte m° M annimmt und dann den Schlagſchatten m des Punktes M auf der verlängert gedachten Fußbodenfläche dadurch beſtimmt, daß man eine von F durch m° gezogene Linie durch den Strahl L M in m ſchneidet. Zieht man darauf W m, jedoch nur bis μ, und außerdem V μ, ſo iſt die gebrochene Linie W μ V der Schlagſchatten des Stabes. §. 415.

Der Schlagſchatten des vornüber geneigten Spiegels an der rechten Seitenwand wird gefunden, wenn man den Schatten (r) des Punktes R zunächſt auf der oben verlängert gedachten lothrechten Seitenwand dadurch feſtſtellt, daß man den Strahl L R durch eine vom Licht-Fußpunkte F^2 durch den Fußpunkt r° gezogene Linie ſchneidet und E (r), jedoch nur bis ε in der Grenze der ſchiefen Wand, zieht. Ermittelt man darauf auf letzterer in F^3 den in ihrer Verlängerung liegenden Fußpunkt des Lichtes, und in s den des Punktes R (indem man nämlich E r° bis ϱ verlängert, ϱ s parallel $F^7 F^6$ zieht und R s normal auf ϱ s fällt), und ſchneidet dann den Strahl L R durch eine von F^3 durch s gezogene Linie in r, ſo iſt dieſer Punkt die wirkliche Schlagſchatten-Perſpective von R, und demnach §. 416.

E ε r diejenige der Spiegelkante E R. r q iſt perſpectiviſch parallel R Q zu ziehen u. ſ. w.

§. 417. Den Schlagſchatten der von der ſchiefen Wand lothrecht herabhängenden Schnur N K findet man, wenn man nach §. 404 in F^7 den Fußpunkt einer mit der N K parallel aus L gegen die ſchiefe Wand gezogenen Linie feſtſtellt, von F^7 durch N bis x zieht, dann x k lothrecht fortſetzt und durch einen Strahl L K in k abſchneidet.

§. 418. In gleicher Weiſe findet man das Stück G y des auf die ſchiefe Wand fallenden Schlagſchattens des Balkens, wenn man L F^6 parallel den Balkenkanten bis zum Fußpunkte F^6 auf der verlängert gedachten ſchiefen Wand, und darauf von F^6 aus G y zieht. Die Richtung des Schlagſchattenſtückes des Balkens auf der Wand links wird durch Linien, vom Licht-Fußpunkte F^5 aus gezogen, beſtimmt.

§. 419. Um den Schlagſchatten des Ankers J U zu conſtruiren, beſtimmt man zunächſt in dieſem ſelbſt durch eine beliebige, zu U G perſpectiviſch normale Linie A B einen Punkt B und ſucht den Schatten b deſſelben, indem man von F^6 durch A eine Linie zieht und dieſelbe durch den Strahl L B in b ſchneidet. U b iſt dann die Richtung des Schlagſchattens auf der ſchiefen Wand. Seine Fortſetzung über die horizontale Decke muß nach i, dem durch den Strahl L J beſtimmbaren Schatten des Punktes J, gerichtet ſein; nach dem Punkte y aber dieſer Fortſetzung muß das auf den Balken ſelbſt fallende kurze Schlagſchattenſtück J h gerichtet ſein, da, wenn die vordere Balkenfläche bis zur Decke verlängert gedacht wird, dieſelbe in y den Schatten an der Decke ſchneiden und dieſer ſich alsdann auf ihr in der Richtung y J fortſetzen würde.

Beiſpiel 40.

§. 420. **Aufgabe.** In Fig. 120 (Taf. 19) ſind in einer Gruppe gegeben die Perſpectiven (P Hauptpunkt, P D_2 die halbe Diſtanz) eines **aufgerichteten, der Länge nach geſpaltenen Cylinders**, eines **liegenden Cylinders**, eines **Kegels**, einer mit ihrem Pole K auf der Grundebene ruhenden **Kugel**, deren mit der Bildebene zuſammenfallende lothrechte Achſe K G iſt, und einer **Wandfläche** — es ſollen unter Annahme einer im Punkte L befindlichen Kerzenflamme, deren Fußpunkte auf der obern Cylinder-Grundfläche F^1, auf der Grundebene F und auf der Wandfläche F^2 ſind, die Perſpectiven der Object- und Schlagſchatten aller Körper und der Orte der höchſten Lichter auf ihnen conſtruirt werden.

Die **Ausführung** geſchieht im Allgemeinen in der Weiſe, daß mehrere, §. 421.
durch die Lichtachſe L F und die Körper gehende lothrechte Lichtebenen angenommen, deren Schnittlinien mit den Oberflächen der Körper conſtruirt, und vom Lichtpunkte aus tangirende Strahlen an die Schnittlinien gezogen werden. Die Berührungspunkte derſelben ſind dann Punkte der Objectſchattengrenzen, ihre Schnittpunkte aber mit den Schnittlinien Punkte der Schlagſchattengrenzen.

In der Figur ſind zwei ſolche durch alle Körper zugleich gehenden Lichtebenen angewandt, deren Schnittlinien mit der Grundebene für die erſte Lichtebene: w F t, und für die zweite: y F s ſind. Durch den liegenden Cylinder iſt, um den auf ihn fallenden Schlagſchatten zu conſtruiren, eine dritte Lichtebene mit der Schnittlinie 3 F, und durch den ſtehenden Cylinder ſind, um Schlagſchattenpunkte ſeiner oberen Grundfläche zu finden, noch andere, die übrigen Körper nicht treffende Lichtebenen angenommen.

Die Schnitte der Lichtebenen mit der Kugel ſind an ſich Kreiſe, der eine ein größter Kugelkreis; ihre Perſpectiven H I A I^1 und J Q B V ſind nach Anleitung des §. 245, die Perſpectiven aber $1 S^1$ v und o r o^1 der Schnitte mit dem Kegel, von denen der eine ein Dreieck, der andere eine Hyperbel iſt, nach Anleitung des §. 256 conſtruirt. Die Schnitte mit dem liegenden Cylinder ſind dadurch conſtruirt, daß auf dem Cylindermantel acht gleichweit von einander entfernte Seiten, wie N P, T P, S P, T^1 P u. ſ. w., und auf der Grundebene deren Projectionen Q P, τ P, σ P u. ſ. w. dargeſtellt wurden. Durch die Punkte, in welchen letztere durch die Schnittlinien der Lichtebenen geſchnitten werden, wie z. B. 1, 2 und 3, ſind dann Lothrechte gezogen und die entſprechenden Cylinderſeiten dadurch ſelbſt in ſolchen Punkten 1, 2 und 3 geſchnitten worden, durch welche die Schnitt-Perſpective gezeichnet werden kann. Die Schnitte durch den ſtehenden Cylinder, wie z. B. Z K $\varkappa$ ζ, ſind Rechtecke.

An dem ſtehenden Cylinder iſt nur ſeine obere Grundfläche be- §. 422.
leuchtet. Der Schlagſchatten der letztern wird gefunden, wenn man durch die den einzelnen Punkten ihrer Peripherie, wie J, B und E, entſprechenden Projectionen auf der Grundebene, wie ι, β und ε, Linien vom Licht-Fußpunkte F aus zieht und dieſe durch entſprechende Strahlen in i, b und e ſchneidet. — Da die gerade Kante B E parallel der Grundebene iſt, ſo hat ſie mit ihrem Schlagſchatten b e denſelben Verſchwindungspunkt x. — Da übrigens die obere Grundfläche an ſich ein Kreis und der Schatten fangenden Grundebene parallel iſt, ſo iſt ihr Schlagſchatten auf dieſer, als ein der Grundfläche des Strahlenkegels paralleler Schnitt, ebenfalls ein

Kreis, deſſen Perſpective mittels des ihn einſchließenden Quadrates, deſſen eines Seitenpaar in P verſchwindet, conſtruirt werden kann, wenn man in a^1 die Schlagſchatten-Perſpective des Mittelpunktes A^1, und in $a^1 c$ die des Halbmeſſers $A^1 C$ ermittelt hat.

§. 423. Die obengedachten beiden Lichtebenen ſchneiden den Cylinder und den Kegel in der gebrochenen Linie K x l S^1 und in der gebrochenen, zum Theil gekrümmten Linie R ϱ o r T o^1. Zieht man nun durch K und R Strahlen, ſo ſchneiden dieſe die Kegelſchnitte in den Punkten k und r, die demnach Punkte des über den Kegel fallenden Schlagſchattens ſind, ſo wie h ein ſolcher Punkt iſt, da b e in ihm an den Kegel ſtößt. — Der Object- und der Schlagſchatten des Kegels werden gefunden, wenn man zuvörderſt den Schatten $S^1 s$ ſeiner Achſe $S^1 S$ ſucht und dann von s aus Tangenten s ϑ und s τ an die Grundfläche zieht, worin ſich die Schlagſchattengrenzen ergeben. Zieht man darauf von den Berührungspunkten ϑ und τ nach der Spitze S^1 die Kegelſeiten ϑ S^1 und τ S^1, ſo ſind dieſe die Objectſchattengrenzen. Fiele der Punkt s ſo entfernt, daß er nicht darzuſtellen wäre, ſo müßte durch einen, an einem Schnitte wie o r T o^1 tangirenden Strahl L t in T ein Punkt der Object-, und in deſſen Schlagſchatten t ein Punkt der Schlagſchattengrenze conſtruirt werden, wonach an der Kegel-Grundfläche die Tangente t τ, und die Kegelſeite τ S^1 ebenfalls gezogen werden können. — Ein anderes, freilich umſtändlicheres Verfahren, die Objectſchattengrenze am Kegel zu conſtruiren, iſt in §. 571 vorgeführt. (S. außerdem auch §. 451.)

Die hellſte Erleuchtung iſt in der Kegelſeite 1 S^1, in welcher die durch die Achſe gehende Lichtebene den Kegelmantel ſchneidet. Andererſeits iſt aber auch hier das Stück 1k des Schlagſchattens des Cylinders am dunkelſten, weil dieſe Kegelſeite reflectirenden Flächen am meiſten abgewandt iſt (§. 396). Der Ort des höchſten Lichtes iſt im Fußpunkte einer vom Lichtpunkte L perſpectiviſch normal zu der Kegelſeite 1 S^1 gezogenen Linie, und zwar in der Verlängerung von 1 S^1 über S^1 hinaus zu finden. Der Verſchwindungspunkt u dieſer normalen Linie iſt in der lothrechten Grenzlinie (ω herabgeſchlagener Geſichtspunkt) der durch die Kegelachſe gehenden Lichtebene als correſpondirender Verſchwindungspunkt zu dem Verſchwindungspunkte y der Kegelſeite 1 S^1 gelegen. (S. auch hierzu §. 571.)

§. 424. Die Grundflächen des liegenden Cylinders liegen im Schatten. Die Objectſchattengrenzen des Cylindermantels ſind Cylinderſeiten, welche perſpectiviſch parallel der Achſe durch diejenigen Punkte der Cylinderſchnitte zu ziehen ſind, in welchen die letzteren durch Strahlen berührt werden. Durch die Punkte, in welchen dieſelben Strahlen die Grundebene treffen,

gehen die der Achſe parallelen Schlagſchattengrenzen des Mantels. Die Punkte r und o, in welchen die Kugelſchnitte durch jene Strahlen zuerſt geſchnitten werden, ſind Punkte der Grenze des auf die Kugel fallenden Schlagſchattenſtückes. — Der Schlagſchatten der vorderen Grundfläche wird am kürzeſten gefunden, wenn man durch Punkte der Peripherie, wie N, T, S, T^1 u. ſ. w., Ordinaten zur Grundebene zieht und deren Schlagſchatten conſtruirt, indem man vom Licht-Fußpunkte F aus Linien durch die Fußpunkte Q, τ, σ u. ſ. w. jener Ordinaten zieht und dieſelben durch die Strahlen L N, L T, L T^1, L S u. ſ. w. in n, t, t^1, s u. ſ. w. ſchneidet.

An ſich iſt dieſer Schlagſchatten der kreisförmigen Grundfläche eine Ellipſe, deren ebenfalls elliptiſche Perſpective man jedoch wie eine Kreisperſpective vermittelſt eines einſchließenden Quadrates conſtruiren kann, wenn man zuvor den Schlagſchatten a des Mittelpunktes A, a s als den des Halbmeſſers A S feſtſtellt, und dann eine durch den Licht-Fußpunkt F gehende, der Schatten werfenden Kreisebene perſpectiviſch parallele, hier alſo horizontale Grenzlinie für die zu ſupponirende Ebene (der als Kreisperſpective aufgefaßten Schattenellipſe) dazu wie einen Horizont, F darin als Hauptpunkt, und die Höhe F L des Lichtes über F als Diſtanz verwendet. Stände die Cylinder-Grundfläche ſchief zur Bildebene, ſo ließe ſich eine derartige Conſtruction der Perſpective der Schlagſchatten-Ellipſe ähnlich ausführen, wäre jedoch wegen ihrer Umſtändlichkeit nicht zu empfehlen. —

Punkte des von dem aufgerichteten auf den liegenden Cylinder fallenden Schlagſchattens, wie g, z und d, findet man, wenn man die krummen Cylinderſchnitte durch Strahlen ſchneidet, welche durch die ihnen entſprechend liegenden Punkte G, Z und D der oberen Grundfläche des ſtehenden Cylinders gezogen werden.

Die am hellſten erleuchtete Cylinderſeite findet man, wenn man den Mittelpunkt m eines Cylinderſchnittes, in der Figur etwa des der erſten Lichtebene entſprechenden, feſtſtellt, letzteren durch einen nach m gerichteten Strahl in l ſchneidet und durch dieſen Punkt jene Cylinderſeite zieht. Das höchſte Licht würde in dieſer Seite da liegen, wo eine zur Cylinderachſe normale Lichtebene ſie ſchneidet, weshalb man beſſer die Ermittelung von l ſogleich in dem Schnitte einer ſolchen Ebene vornimmt.

Punkte des Objectſchattens an der Kugel, wie H, J, B und A, findet §. 125.
man da, wo aus dem Lichte an die Kugelſchnitte gezogene Strahlen dieſe berühren. Und wo dieſelben Strahlen die Grundebene oder die Wand treffen, liegen die entſprechenden Punkte h, i, b und a der Grenze des Schlagſchattens. e iſt der Schlagſchatten des Punktes E, in welchem der

Cylinder-Schlagſchatten den Objectſchatten der Kugel ſchneidet. — Das höchſte Licht liegt in dem Lichtpole l, in welchem ein vom Lichtpunkte L nach dem Kugel-Mittelpunkte C gezogener Strahl den in ſeiner Lichtebene liegenden größten Kugelkreis ſchneidet. l^1 iſt hiernach der dem Lichtpole entgegengeſetzte Pol.

In dem nächſtfolgenden Beiſpiele wird Anleitung gegeben werden, die Schatten der Kugel ohne vorherige Conſtruction von Kugelſchnitten perſpectiviſch darzuſtellen. —

§. 426. An Körpern, welche von anderen krummen Flächen begrenzt ſind, als die hier vorgeführten einfachen geometriſchen Körper, conſtruirt man zuvor die Schnittfiguren der Lichtebenen, wie dies in §. 255 am Kegel gezeigt iſt, und ermittelt dann die Schattengrenzen, wie hier, durch tangirende Strahlen.

Beiſpiel 41.

§. 427. **Aufgabe.** In Fig. 121 (Taf. 21) iſt um den Mittelpunkt C die Perſpective (P Hauptpunkt, O herabgeſchlagener Geſichtspunkt) einer mit ihrem Pole K auf der Grundebene ruhenden **Kugel** gegeben, deren mit der Bildebene zuſammenfallende lothrechte Achſe KG iſt. L iſt die Perſpective des **Lichtpunktes einer Kerze**, deren Fußpunkt auf der Grundebene F iſt — es ſollen die Perſpectiven der Object- und Schlagſchattengrenzen der Kugel, des Poles im höchſten Lichte und des dieſem entgegengeſetzten Poles conſtruirt, und Anleitung zur Conſtruction der Grenzen gleicher Erleuchtung auf dem, dem Lichte ausgeſetzten Kugelabſchnitte gegeben werden.

§. 428. Die **Ausführung** giebt Gelegenheit, die in dem 33. Beiſpiele ausgeführten Conſtructionen praktiſch anzuwenden; denn die Objectſchattengrenze, an ſich ein Kugelkreis (Strahlen-Berührungskreis), welcher beſchrieben wird durch den die Kugel berührenden Strahlenkegel, iſt als Schnittfigur der Kugel mit einer Ebene zu conſtruiren, welche normal zu dem vom Lichtpunkte nach dem Kugel-Mittelpunkte denkbaren Strahle (Strahlenkegel-Achſe) iſt. Das geometriſche Maß des Halbmeſſers des Berührungskreiſes und des Abſtandes ſeines Mittelpunktes vom Kugel-Mittelpunkte ſind am ſicherſten durch eine geometriſche Hülfsconſtruction zu ermitteln. Die Lage der Ebene des Berührungskreiſes geht ſchon aus den perſpectiviſchen Orten der gegebenen Stücke hervor und iſt auch ihre

Grenzlinie danach zu ermitteln. Da dieſe Ebene nämlich normal zu der Strahlenkegel-Achſe C L gerichtet iſt, deren Verſchwindungspunkt der Punkt S in der lothrechten Grenzlinie S s (F^1 Hauptpunkt, ω herabgeſchlagener Geſichtspunkt) der durch C und L gehenden Lichtebene iſt, ſo muß ihre Grenzlinie einerſeits durch den Punkt s (Parallelſtrahl ω s normal zu Parallelſtrahl ω S), andererſeits durch den Punkt ε (Parallelſtrahl O ε normal zu Parallelſtrahl O F^1) gehen. Es muß demnach s e ihre Grenzlinie (H^1 Hauptpunkt, Δ und Δ^1 Diſtanzpunkte, S Verſchwindungspunkt für normale Linien) ſein, und muß dem Vorhergehenden nach die Neigung der Ebene unter die Grundebene gleich dem (53° großen) Winkel $F^1 \omega$ s ſein, während der Abweichungswinkel ihrer Schnittlinie mit der Grundebene von der Verticalebene gleich P O ε iſt. Die Richtigkeit der ermittelten Größe des Neigungswinkels wird beſtätigt durch die vorerwähnte geometriſche Hülfsconſtruction der Aufrißprojection der Kugel und der Kerze, und kann dieſelbe in der Figur ſelbſt unter Benutzung des Kreiſes um C ausgeführt werden. Macht man hier nämlich vermittelſt des der perſpectiviſch horizontalen Linie K F^1 entſprechenden Theilpunktes ω das Maß K φ geometriſch gleich dem perſpectiviſchen Maße K F, und die Lothrechte $\varphi \lambda$ geometriſch gleich der perſpectiviſchen Größe F L, ſo liegt in dem Kreiſe um C und in der Linie $\varphi \lambda$ die geometriſche Aufrißprojection der Kugel und der Kerze vor. Zieht man nun aus λ die Tangenten λ B und λ A an den Kreis, und innerhalb deſſelben die Sehne B A, ſo iſt deren Länge das geometriſche Maß des Durchmeſſers des Strahlen-Berührungskreiſes, M C der geometriſche Abſtand ſeines Mittelpunktes vom Kugel-Mittelpunkte, N der Punkt, in welchem ſeine Ebene die Bildebene ſchneidet, und φ W σ der, wie vorher ſchon ermittelt, (53° große) Winkel, um welchen ſeine Ebene ſich unter die Grundebene neigt. Hiernach iſt zunächſt durch N die der Grenzlinie s ε parallele Grundlinie β u der ſchiefen Berührungskreisebene, und von u nach ε die Schnittlinie der letztern mit der Grundebene zu ziehen. Ferner iſt die Perſpective m des Mittelpunktes M des Berührungskreiſes, da ſie offenbar in einer zu der Ebene des letztern normalen, von C nach L gerichteten Linie, zugleich aber auch in einer innerhalb der Lichtebene von N aus ſich um 53° ſenkenden Linie N s liegt, im Schnittpunkte von C S und N s zu beſtimmen; oder auch dadurch, daß man C q geometriſch gleich C M macht und dieſes Maß vermittelſt des der Linie C S entſprechenden Theilpunktes t S perſpectiviſch in C m überträgt. Die perſpectiviſche Länge des der Grenzlinie s ε parallelen Durchmeſſers i e des Berührungskreiſes findet man endlich, wenn man von H^1 durch m bis μ in der ſchiefen Grundlinie zieht, hier $\mu \beta$ und $\mu \alpha$

geometriſch gleich M B und M A macht und dann, von β und α nach H^1 ziehend, auf dem Durchmeſſer die Punkte i und e abſchneidet, wonach die Perſpective des Strahlen-Berührungskreiſes, mit anderen Worten: der Objectſchattengrenze, vermittelſt des einſchließenden Quadrates, deſſen eines Seitenpaar in H^1 verſchwindet, conſtruirt werden kann. Nach der Vollendung müſſen die Punkte b, N, m, a und w in einer nach s gerichteten Linie liegen, wie die Punkte B, N, M, A und W der geometriſchen Hülfsconſtruction in einer ſich um 53° unter die Grundebene ſenkenden Linie liegen. —

Den größtentheils außerhalb des Conſtructionsraumes fallenden Schlagſchatten, welcher an ſich eine Ellipſe bildet, deren Perſpective jedoch eine Hyperbel iſt, findet man, wenn man, wie bisher immer, die Schlagſchatten-Perſpectiven einzelner Punkte der Objectſchattengrenze, wie z. B. von a und r, ſucht. Zu dem Zwecke zieht man von a und r Linien a H^1 und r H^1 nach H^1 (Ordinaten) und bezeichnet ſowohl deren Fußpunkte auf der Grundebene in δ und ϱ der Schnittlinie u ε, als den Fußpunkt F^2 einer jenen Ordinaten parallelen, alſo nach H^1 gerichteten Linie L F^2 auf der Grundebene, indem man nämlich zunächſt die Schnittlinie u ε durch eine von m nach H^1 gezogene Linie in τ, und darauf L H^1 durch eine von τ nach P gezogene Linie in F^2 ſchneidet. Zieht man alsdann Linien von F^2 durch δ und ϱ und ſchneidet ſie durch Strahlen, von L durch a und r gezogen, in v und r^1, ſo ſind dies Punkte der Schlagſchatten-Hyperbel. Mehr Punkte derſelben laſſen ſich nach Erfordern auf dieſelbe Art conſtruiren. Die Perſpective m^1 der Mittelpunkte C und m der Kugel und des Berührungskreiſes liegt gleichfalls im Schnittpunkte einer von F^2 durch τ gezogenen Linie mit einem von L durch m und C zugleich gehenden Strahle. Wie die geometriſche Hülfsconſtruction V als Schlagſchatten von A ergiebt, ſo hat ſich in der perſpectiviſchen Conſtruction v als Schatten von a ergeben und wäre derſelbe auch, im Anſchluſſe an die geometriſche Conſtruction, in der Linie K F^1 durch eine von V nach ihrem Theilpunkte ω gezogene Linie zu beſtimmen geweſen. —

Die Perſpectiven l und l^1 des Lichtpoles und des dieſem entgegengeſetzten Poles findet man, wenn man in der Strahlenkegel-Achſe C S vermittelſt des ihr entſprechenden Theilpunktes t S die Stücke C l und C l^1 perſpectiviſch gleich C G und C K macht. —

Conſtruirt man noch unter Anwendung des Hauptpunktes H^1 die Perſpectiven mehrerer dem Kreiſe um m parallelen kleineren Kugelkreiſe bis nach dem Pole l hin, wobei man deren Durchmeſſer und Mittelpunkte zuvor durch Linien, welche man in der geometriſchen Hülfsconſtruction

parallel B A zieht, geometriſch ermittelt und dann perſpectiviſch überträgt, wie dies mit B A geſchehen, ſo ergeben dieſelben die Grenzen gleicher Erleuchtung auf dem dem Lichte ausgeſetzten Kugelabſchnitte. Als deren eine und zwar als die mit der Grenzlinie s ε zuſammenfallende iſt das Stück 2. 3 der letztern ſelbſt anzuſehen, welches die Kugelperſpective in ihr abſchneidet. —

Im 47. Beiſpiele (§. 469) iſt die Conſtruction der Perſpectiven der Schatten u. ſ. w. dieſer Kugel unter Annahme der Sonnen-Perſpective im Punkte S gezeigt.

Beiſpiel 42.

Aufgabe. In Fig. 122 (Taf. 20) iſt die Perſpective (P Hauptpunkt, D Diſtanzpunkt) eines **Kreuzgewölbes** und die des **Lichtpunktes** L einer Kerzenflamme gegeben — es ſollen die Perſpectiven der höchſten Lichter im Gewölbe und der Object- und Schlagſchatten darin conſtruirt werden. §. 429.

Die **Ausführung** erfordert die Anwendung des Verfahrens, welches im §. 424 bei der Conſtruction der Schatten an dem liegenden Cylinder eingeſchlagen wurde. Stellt man zunächſt die Fußpunkte F, F^1 und F^2 des Lichtes auf der Grundebene (dem Fußboden), auf der Ebene der der Bildebene parallelen Wölbungscurve V n J und auf der verlängerten Ebene der linken Seitenwand feſt, und zieht alsdann eine Linie von F^1 durch den Mittelpunkt m der halbkreisförmigen Wölbungscurve bis 1 in deren Peripherie, und von 1 nach P die Cylinderſeite $1 1^1$, ſo bezeichnet dieſe den Ort des höchſten Lichtes in den Kappen U und X. Zieht man ferner von F^1 aus eine Tangente F^1 n an die Wölbungscurve, und durch n die ebenfalls nach P gerichtete Cylinderſeite, ſo bezeichnet dieſe die Objectſchattengrenze in denſelben Kappen; n aber iſt zugleich der Punkt, in welchem die Grenze des von der Kante n V H offenbar in das Gewölbe geworfenen Schlagſchattens anfängt. Zieht man ebenſo vom Fußpunkte F^2 durch den Mittelpunkt m^1 des Bogens über der linken Seitenwand bis 1^2 in der Peripherie und legt durch dieſen Punkt die der Bildebene parallele Cylinderſeite $1^2 1^3$, ſo bezeichnet dieſe den Ort des höchſten Lichtes in den Kappen W und Y, während wieder eine aus F^2 an den Bogen gezogene Tangente die Cylinderſeite bezeichnen würde, mit welcher die Objectſchattengrenze in jenen Kappen zuſammenfällt. Da dieſelbe jedoch durch die Gratbogen dem Auge verdeckt wird, bleibt ſie hier außer Betracht. §. 430.

Wie geſagt, wirft die von n bis V gekrümmte Kante n V H einen Schlagſchatten in das Gewölbe. In welche der vier Gewölbekappen zunächſt der Schlagſchatten des Kämpferpunktes V fällt, ergiebt ſich von ſelbſt, wenn man mit der Schlagſchatten-Conſtruction des geradlinigen Stückes H V jener Kante beginnt; zu dieſem Zwecke vom Licht-Fußpunkte F durch H über die Grundebene (Fußboden) bis o, dann $o\,o^1$ lothrecht zieht und den Fortgang dieſer Schattengrenze durch die Punkte o^2, o^3, o^4 der Kappe X dadurch conſtruirt, daß man die Cylinderſeiten der letztern durch ſolche Lothrechten ſchneidet, welche durch die Schnittpunkte ω^2, ω^3, ω^4 der entſprechenden Cylinderſeiten-Projectionen mit der Schnittlinie H o der durch die Kante H V gehenden Lichtebene mit der Grundebene gehen. Da nun ein Strahl L V die Curve $o^1\,o^2\,o^3\,o^4$ nicht ſchneidet, ſo fällt der Schlagſchatten v von V nicht in die Kappe X, ſondern in eine der beiden Kappen U und W, und iſt es rathſam, jener Curve mit der Conſtruction des in dieſe Kappen fallenden Schlagſchattens des Kreisbogens n V von n aus entgegenzukommen. Man faßt zu dem Ende beliebige einzelne Punkte der Curve n V ins Auge, z. B. den Punkt B, und beſtimmt vermittelſt des Strahles L B ſeinen Schlagſchatten b in dem Schnitte B 1. 2. 3. 4 einer durch B gehenden lothrechten Lichtebene mit der Kappe U, nachdem man dieſen Schnitt dadurch conſtruirt, daß man in der Grundebene die Projectionen der Cylinderſeiten durch eine von F durch β (die Projection von B) gezogene Linie in den Punkten 1. 2. 3. 4, die Cylinderſeiten in der Kappe oben aber durch Lothrechte ſchnitt, welche durch 1. 2. 3. 4 unten gehen. Hat man auf dieſe Weiſe die Schatten mehrerer zwiſchen n und G liegenden Punkte ermittelt, ſo kann man von n aus durch ſie hindurch die Grenze n b g des in die Kappe U fallenden Schlagſchattens zeichnen. — Die nunmehr offenbar in die Kappe W fallenden Schlagſchatten der Punkte zwiſchen G und V, und des Punktes V ſelbſt, werden auf dieſelbe Art gefunden.

Das horizontale Stück des das Gewölbe haltenden Ankers liegt, wie ſeine Projection auf der Grundebene zeigt (ſ. hier Punkt ϱ), bis R ſelbſt im Schlagſchatten der Kante H V; der Schatten r aber von R wird in der Schlagſchattengrenze $o^1\,o^2\,o^3\,o^4$ in der Kappe X durch den Strahl L R beſtimmt. Den übrigens in die Kappen X und Y fallenden Schlagſchatten des Ankerſtückes R T findet man wieder durch die Conſtruction der Schatten s und t einzelner Punkte S und T, und zwar in den Schnitten durch S und T lothrecht angenommener Lichtebenen mit jenen Kappen. Das in die Kappe Y fallende Schlagſchattenſtück iſt geradlinig und wie eine (Cylinder-) Seite der Kappe gerichtet, da es der Schnitt einer durch den geraden

horizontalen Anker denkbaren Lichtebene mit einem, ſeiner Achſe nach, der Bildebene parallelen Cylinder iſt. Ebenſo, innerhalb des Schnittes 5. 6. 7 einer durch A lothrechten Lichtebene mit der Kappe U, wird der Schlagſchatten a des Punktes A gefunden. Der Schlagſchatten K 8. 9. 10. 11 des lothrechten Ankerſtückes iſt der Schnitt einer lothrechten Lichtebene mit der Kappe U und wird in den Cylinderſeiten dieſer Kappe durch Lothrechte abgeſchnitten, welche man in der Grundebene in den Punkten 8, 9 u. ſ. w. der Cylinderſeiten-Projectionen errichtet, in welchen die letzteren von derſelben Lichtebene geſchnitten werden. —

Für die Conſtruction der Schatten auf ſchiefen Flächen §. 431.
iſt die Anleitung aus den Conſtructionen der Sonnenſchatten auf ſchiefen Flächen zu entnehmen.

Neunzehntes Kapitel.

Sonnen- und Mondlicht.

Das Verfahren bei der Conſtruction der Perſpectiven der dem §. 432.
Sonnen- und Mondlichte entſprechenden Schatten iſt weſentlich daſſelbe, wie bei der Conſtruction der Perſpectiven der dem Kerzenlichte entſprechenden Schatten und unterſcheidet ſich davon nur dadurch, daß, während bei letzterer der Lichtpunkt und ſein Fußpunkt auf der Schatten fangenden Ebene in der Nähe liegen, dieſe beiden Punkte bei Sonnen- und Mondlicht — in der Folge wird der Kürze wegen ſtets nur die Sonne genannt werden — wegen der ungeheuern Entfernung dieſer leuchtenden Körper als in unendlicher Entfernung liegend zu behandeln ſind.

Wenn demnach die Schlagſchatten-Perſpective irgend einer ge- §. 433.
raden Körperkante conſtruirt werden ſoll und dieſerhalb, entſprechend der in §. 404 gegebenen und für dieſe Conſtructionen beſonders wichtigen Regel, aus der Sonne eine der Kante parallele Linie (Lichtachſe) gegen die Schatten fangende Ebene gezogen wird, ſo fällt, weil die Linie ebenfalls in unendlicher Entfernung iſt, ihr

Fußpunkt (Sonnen-Fußpunkt) auf der Schatten fangenden Ebene in deren in unendlicher Entfernung liegende Grenzlinie.

Es tritt hierbei die Lichtachſe ſelbſt als Grenzlinie der durch das Schatten werfende Object angenommenen einen oder mehreren Lichtebenen auf, der Sonnenpunkt darin als der Verſchwindungspunkt des der Erde zugehenden parallelen (§. 391) Strahlenſyſtems, und der Sonnen-Fußpunkt als Verſchwindungspunkt der perſpectiviſch parallelen Schnittlinien jener Lichtebenen mit der Schatten fangenden Ebene (§. 322). —

§. 434. Die Sonne kann in bildlichen Darſtellungen fünferlei Stellung haben; ſie kann nämlich ſtehen

a) im Horizonte,
über dem Horizonte, und zwar
b) im Zenithe, oder
c) an einem andern Orte in der verlängerten Bildebene,
d) hinter der Bildebene, oder
e) vor der Bildebene.

§. 435. **a) Die Sonne im Horizonte**

iſt je nach ihrer Stellung dabei zur Bildebene ſelbſt darſtellbar oder nicht; ihre Strahlen ſind horizontal. Schlagſchatten fallen, da alle horizontalen Ebenen im Streiflichte ſind, nur auf lothrechte und ſchiefe Ebenen und werden perſpectiviſch conſtruirt wie bei den nachfolgend unter c), d) und e) erörterten verſchiedenen Sonnenſtänden.

§. 436. **b) Die Sonne im Zenithe**

iſt ſelbſt nicht darſtellbar. Jede lothrechte Linie fällt mit einem Strahle zuſammen. Iſt das Schatten werfende Object eine lothrechte gerade Kante, ſo iſt bei dieſem, das in §. 433 Geſagte allein ausſchließenden Sonnenſtande jede ihr parallele, alſo lothrechte Linie zugleich eine Lichtachſe, und jeder Punkt einer nicht lothrechten Ebene ein Sonnen-Fußpunkt. Iſt die Schatten fangende Ebene horizontal, wie z. B. die Grundebene, ſo iſt jeder Schlagſchatten gleich einer Horizontalprojection des Schatten werfenden Objectes und iſt ſeine Perſpective deshalb gleich einem perſpectiviſchen Hülfsgrundriſſe des Objectes zu conſtruiren.

c) Die Sonne in der verlängerten Bildebene.

In dieſem Falle iſt die Sonne ſelbſt nicht darſtellbar. Die Perſpectiven ihrer Strahlen ſind, weil dieſe der Bildebene parallel oder mit ihr zuſammenfallend ſind, geometriſch parallel, d. h. zum Horizonte ſämmtlich unter demſelben Winkel geneigt zu ziehen. §. 437.

Handelt es ſich um die Conſtruction des *auf eine horizontale Ebene fallenden Schattens eines Punktes oder einer lothrechten Linie*, ſo liegt die lothrechte Lichtachſe der durch dieſe Objecte anzunehmenden lothrechten Lichtebene in unendlicher Entfernung. Ihr Fußpunkt, d. i. ihr Schnittpunkt mit dem Horizonte liegt deshalb ebenfalls in unendlicher Entfernung, ſo daß die dahin gerichtete Schnittlinie jener Lichtebene mit der horizontalen Ebene eine dem Horizonte parallele Linie iſt. Stände z. B. die Sonne 36° hoch, und es ſoll in Fig. 123 (Taf. 20) der auf die Grundebene fallende Schlagſchatten der lothrechten Stange B A conſtruirt werden, ſo iſt von dem im Horizonte in unendlicher Entfernung gelegenen Sonnen-Fußpunkte F durch A die Schnittlinie F b der durch B A angenommenen lothrechten Lichtebene mit der Grundebene zu ziehen und dieſelbe durch einen durch B gehenden zum Horizonte oder zu F b um 36° geneigten Strahl S B in b zu ſchneiden, wonach A b der Schlagſchatten iſt. §. 438.

Handelt es ſich aber, wie in Fig. 124 (Taf. 20), darum, den *Schlagſchatten der in H^2 verſchwindenden ſchiefen Linie*, der Kante B A eines Prismas zu conſtruiren, das *auf einer doppeltſchiefen Ebene* ſteht, deren Grenzlinie (H^1 Hauptpunkt, H^2 Verſchwindungspunkt für normale Linien) $\varepsilon\varrho$ iſt, bei einer beliebigen Sonnenhöhe von etwa 45°, ſo iſt nach der in §. 404 enthaltenen Regel aus der Sonne eine der B A parallele, d. h. gleichfalls in H^2 verſchwindende und zwar zum Horizonte um 45° geneigte Lichtachſe — denn nur eine ſo geneigte Linie iſt hier nach der Sonne gerichtet — gegen die Schatten fangende ſchiefe Ebene zu ziehen; es iſt dann ihr Schnittpunkt F mit der ſchiefen Grenzlinie der der Kante B A und allen ihr parallelen Kanten entſprechende Sonnen-Fußpunkt, und demnach auch eine von F durch A gezogene Linie die §. 439.

Schnittlinie der durch B A anzunehmenden schiefen Lichtebene mit der gegebenen schiefen Ebene, der darin durch einen zum Horizonte um 45° geneigten Strahl S B abgeschnittene Punkt b der Schlagschatten von B; b A aber ist der Schlagschatten von B A. — Da die Kante B M, als der Grenzlinie ε ϱ geometrisch parallel, der Bildebene parallel ist, so ist auch ihr Schlagschatten b m parallel ε ϱ; der Schlagschatten m des Punktes M ist darin durch einen zum Horizonte um 45° geneigten Strahl abzuschneiden.

§. 440. Will man aber den Schlagschatten des Punktes B unter Annahme einer durch diesen Punkt lothrechten Lichtebene finden, so stellt man zunächst den in der schiefen Ebene lothrecht unter B liegenden Fußpunkt β fest und zieht dann aus dem in der schiefen Grenzlinie in unendlicher Entfernung, ebenfalls lothrecht unterhalb des Sonnenpunktes gelegenen Sonnen-Fußpunkte F^2 durch β eine, hiernach mit ε ϱ geometrisch parallele Linie β m, deren Schnittpunkt b mit dem Strahle S B gleichfalls den Schlagschatten von B ergiebt. Es wäre demnach β b der Schlagschatten der lothrechten Linie β B auf der schiefen Ebene, und die gerade Linie β m der Schlagschatten der gebrochenen Linie β B M.

§. 441. Dem Vorhergehenden entsprechend ist der Schlagschatten der schiefen Kante B C auf der horizontalen Grundebene zu finden, wenn das Prisma bis in letztere verlängert gegeben ist. Die mit B C perspectivisch parallele Lichtachse S H^2 schneidet dann die Grenzlinie der Schatten fangenden Grundebene, den Horizont, im Sonnen-Fußpunkte F^1, und ist eine von F^1 durch C gezogene Linie die Schnittlinie der durch B C annehmbaren schiefen Lichtebene mit der Grundebene und b° darin der Schlagschatten von B. Fällt man aber von B auf die Grundebene eine Lothrechte B β°, so ist die dem Horizonte parallele β° b° deren Schlagschatten, und ist Punkt b° darin als vermittelst einer durch Punkt B lothrecht angenommenen Lichtebene construirt anzusehen.

Beispiel 43.

§. 442. **Aufgabe.** Es ist in Fig. 125 (Taf. 21) die Perspective (P Hauptpunkt, D Distanzpunkt) eines **Grabens** gegeben,

deſſen horizontale Bodenfläche G H J K iſt und deſſen Seitenwände gebildet werden durch die einfach-ſchiefe Fläche Q N G K mit der Grenzlinie (n)(g), durch die einfach-ſchiefe Fläche E C H J mit der Grenzlinie c(h), ferner durch die einfach-ſchiefe Fläche E Q K J, und endlich durch die doppelt-ſchiefe Fläche C H G N mit der Grenzlinie p(m). Die Schnittlinie der letztern Fläche mit der Grundebene iſt M ε, und H G die mit der Bodenfläche des Grabens. Neben dem Graben ſteht ein **Maſt** A B, an deſſen Spitze B **zwei Taue** R B und T B befeſtigt ſind — es ſollen unter Annahme der **Sonne** als links **in der verlängerten Bildebene** $29^1/_2°$ über dem Horizonte ſtehend die Schlagſchatten-Perſpectiven des Maſtes, der Taue und der einen Grabenwand conſtruirt werden.

Ausführung. Um den Schlagſchatten des Maſtes zu finden, iſt, §. 443.
da dieſer ſelbſt lothrecht ſteht, durch ihn eine lothrechte Lichtebene anzunehmen und die dieſer entſprechende lothrechte Lichtachſe (Grenzlinie) durch die Sonne zu legen, wonach deren Schnittpunkte mit den Grenzlinien der verſchiedenen Flächen, über welche der Schlagſchatten fällt, die Sonnen-Fußpunkte für dieſe ergeben. Da dieſe Punkte aber, wie die Lichtachſe ſelbſt, ſämmtlich in unendlicher Entfernung liegen, ſo ſind die nach ihnen gerichteten einzelnen Stücke der gebrochenen Schlagſchattenlinie A a^1 a^2 a^3 a^4 a^5 b, mit A a^1 beginnend, je geometriſch parallel den entſprechenden Grenzlinien zu ziehen. Ein durch den Punkt B gehender, mit dem Horizonte den Winkel von $29^1/_2°$ bildender Strahl S b bezeichnet in b den Schlagſchatten des Spitzpunktes B.

Der Schlagſchatten des Taues T B findet ſich in der gebrochenen §. 444.
Schnittlinie einer durch T B angenommenen ſchiefen Lichtebene mit den den Graben bildenden Flächen. Die Lichtachſe (Grenzlinie) dieſer ſchiefen Lichtebene muß zunächſt durch die Sonne gehen, alſo eine zum Horizonte um $29^1/_2°$ geneigte Linie ſein. Sie muß außerdem parallel T B ſein, d. h. mit ihr in demſelben Punkte y verſchwinden. Beide Eigenſchaften hat die Linie (w)(g). Die Schnittpunkte w, p, c und g dieſer Lichtachſe mit den verſchiedenen Grenzlinien ſind die Sonnen-Fußpunkte, aus denen man die gebrochene Schlagſchattenlinie T t^1 t^2 t^3 ..... b, bei T beginnend, derart zu ziehen hat, daß die Stücke T t^1, t^2 t^3 und t^5 t^6, weil ſie auf horizontale Flächen fallen, nach dem Sonnen-Fußpunkte w im Horizonte gerichtet ſind; die Stücke t^3 t^4 und t^6 b aber müſſen, weil ſie auf die doppeltſchiefe Ebene fallen, nach p, t^4 t^5 nach c, und t^1 t^2 nach g gerichtet ſein.

Ebenſo wird, um den Schlagſchatten des Taues R B zu finden, eine dieſem perſpectiviſch parallele Lichtachſe, d. h. eine durch den Verſchwindungspunkt u der Linie R B gehende, zum Horizonte um $29^1/_2{}^\circ$ geneigte (hier außerhalb des Conſtructionsraumes gelegene) Linie u x gezogen, und ſind dann die Schnittpunkte x, m, h und n derſelben mit den Grenzlinien der verſchiedenen Flächen die Sonnen-Fußpunkte für dieſe, ſo daß nun R r^1, r^2 r^3 und r^4 r^5 nach x, r^5 b nach m, r^3 r^4 nach h, und r^2 r^1 nach n gezogen werden können.

§. 445. Kommt es nicht darauf an, wie hier, die Aufgabe als ein Beiſpiel zu den vorher gegebenen Regeln zu löſen, ſo iſt der kürzere Weg der Ausführung der, daß man zunächſt den Schlagſchatten (b) des Punktes B auf der Grundebene und ſeinen Schlagſchatten β auf der Ebene des Grabengrundes, und dazu auf dieſer die Punkte α, τ und ϱ feſtſtellt, in welchen ſie von den Verlängerungen des Maſtes und der Taue getroffen wird. Zieht man alsdann von A nach (b), ſo findet man A a^1 und a^4 a^5, und zieht man von α nach β, ſo ergiebt ſich das Stück a^2 a^3, während a^1 a^2, a^3 a^4 und a^5 b parallel den entſprechenden Grenzlinien gezogen werden. Ferner ergiebt eine von T nach (b) gezogene Linie die Schlagſchattenſtücke T t^1 und t^5 t^6, und eine Linie von τ nach β das Stück t^2 t^3, wonach b t^6 und t^4 t^3, und darauf t^5 t^4 und t^1 t^2 als Verbindungslinien zwiſchen ſchon vorhandenen Punkten gezogen werden können u. ſ. w.

§. 446. Ein Punkt a^7 des von der Grabenwand Q N G K auf den Grund geworfenen Schlagſchattens — welcher zugleich zeigt, daß die auf jener Grabenwand conſtruirten Schlagſchatten, die hier nur ihres Zuſammenhanges wegen mit ausgeführt ſind, in der Wirklichkeit nicht vorhanden ſein können — wird durch einen durch a^1 gezogenen Strahl a^1 a^7 beſtimmt, wonach durch a^7 die Grenze des Schlagſchattens der Kante Q N mit dieſer perſpectiviſch parallel, alſo nach P zu ziehen iſt. Von ihren Schnittpunkten λ und π mit den Grenzen H G und J K der anderen ſchiefen Grabenwände werden ſchließlich Linien λ N und π Q nach N und nach Q gezogen. Die Verſchwindungspunkte dieſer Linien findet man leicht nach Anleitung der §§. 404 und 433. φ z. B., den Verſchwindungspunkt der Linie λ N, findet man, wenn man die Grenzlinie p (m) der Schatten fangenden Fläche C H G N durch eine durch die Sonne gehende, der Schatten werfenden Kante Q N parallele Linie, d. h. alſo eine in P verſchwindende und um $29^1/_2{}^\circ$ über den Horizont ſich erhebende Linie φ P in φ ſchneidet u. ſ. w. —

Beiſpiel 44.

§. 447. **Aufgabe.** In Fig. 126 (Taf. 21) iſt die Perſpective (P Hauptpunkt, D und D^1 Diſtanzpunkte) eines mit einer

Kuppel bedeckten **cylindrischen Gebäudes**, ferner die Perspective eines an der abgestumpften Ecke eines andern Gebäudes angebrachten **Thürmchens**, dessen Achse q^1E mit der Ecke zusammenfallen würde, wenn diese nicht abgestumpft wäre, und außerdem die Perspective einer **Nische** gegeben — es sollen unter Annahme der **Sonne**, als 45° über dem Horizonte, **innerhalb der verlängerten Bildebene** links des Beschauers stehend, die Schattenperspectiven der gegebenen Objecte construirt werden.

Ausführung. Um die Objectschattengrenze an dem Cylinder des erstgenannten Gebäudes zu construiren, wird aus dem in unendlicher Entfernung liegenden Fußpunkte der Sonne die hiernach dem Horizonte parallele Schnittlinie einer den Cylinder berührenden Lichtebene mit der Grundebene berührend an die Grundfläche des Cylinders gezogen, wonach die im Berührungspunkte α stehende Cylinderseite $\alpha\,a$ sich als Ort der Objectschattengrenze ergiebt. Das durch den Strahl $A\,a^1$ (alle Strahlen sind hier unter 45° zum Horizonte geneigt) abgeschnittene Stück $\alpha\,a^1$ jener Schnittlinie bildet die Grenze des Schlagschattens, so viel davon überhaupt sichtbar wird. §. 448.

Da die Perspective der halbkugelförmigen Kuppel in Rücksicht auf die aufgegebene Beleuchtung nach Anleitung des §. 243 (Fig. 59) construirt worden, so können hier an die dabei verwendeten, der Bildebene parallelen Hülfskreise, welche so wie ihre Mittelpunkte C^2, C^3, C^4, C^5, C^6, soweit nöthig, vorliegen, sofort berührende, zum Horizonte um 45° geneigte Strahlen gezogen werden, um danach durch die Berührungspunkte T^1, T^2, T^3 u. s. w. bis zum Pole 7 die Curve der Objectschattengrenze an der Kuppel zeichnen zu können. — Punkte des Schlagschattens der Kuppel findet man wie den Punkt t^2, wenn man nämlich die Projection 2 des Punktes C^2 auf der Grundebene feststellt, durch Punkt 2 die Linie $2\,t^2$ zieht und dieselbe durch den entsprechenden berührenden Strahl $T^2\,t^2$ in t^2 abschneidet, u. s. w. — Der Ort des übrigens nicht sichtbaren höchsten Lichtes auf der Kuppel ist der Punkt 1, in welchem ein durch den Mittelpunkt C^1 der Kuppel gehender Strahl ihren der Bildebene parallelen, in der Figur vorliegenden Durchschnitt schneidet. §. 449.

Der zum Theil auf den Cylinder fallende Schlagschatten der vorspringenden Kante (Peripherie der Grundfläche) des Gesimskegels wird gefunden, wenn man zuvor die Projection dieser Kante auf der Grundebene construirt, dann beliebige Punkte, wie z. B. B, in der Kante selbst, und deren Projectionen, wie hier also b°, in der Grundebene bezeichnet, darauf §. 450.

durch b^0 die Schnittlinie $b^0\beta$ einer lothrechten Lichtebene, am Cylinder als eine Seite emporſteigend, zieht und dieſelbe ſchließlich durch einen durch B gehenden Strahl in b, als einem Punkte der Schlagſchattengrenze, ſchneidet. So findet man auch im Punkte a der Objectſchattengrenze den Schlagſchatten des Punktes A der Kante. — Punkte der Fortſetzung dieſes Schlagſchattens auf der Grundebene, wie z. B. a^1 und h als Schatten von A und H, werden durch Strahlen in den Schnittlinien mit der Grundebene abgeſchnitten; oder man conſtruirt vermittelſt des einſchließenden Quadrates die Perſpective des Kreiſes, welchen der Schlagſchatten der Geſimskegel-Grundfläche auf der Grundebene bilden muß, da letztere beiden mit einander parallel ſind, nachdem man zuvor den Schlagſchatten $g\,g^1$ des in dem gegebenen Höhendurchſchnitte des Gebäudes vorliegenden Durchmeſſers $G\,G^1$ der Geſimskegel-Grundfläche feſtgeſtellt hat.

§. 451. Ob der Mantel des Kegels $K\,G\,G^1$ überhaupt von Licht getroffen wird oder nicht, hängt davon ab, ob der Schlagſchatten k der Spitze K innerhalb des Schlagſchattens der Grundfläche oder außerhalb deſſelben fällt. Wo, wie hier, erſteres der Fall iſt, liegt der ganze Kegelmantel im Schatten ſeiner Grundfläche. Stände der vorliegende Kegel umgekehrt, mit der Spitze nach oben, ſo würde der Schlagſchatten der letztern innerhalb desjenigen der Grundfläche fallen und der Mantel überall mehr oder weniger beleuchtet ſein, d. h. keinen Objectſchatten haben und keinen Schlagſchatten werfen. Und wären die Kegelſeiten wie die Lichtſtrahlen, nämlich hier um 45° zur Grundfläche geneigt, ſo würde in der vorliegenden Stellung des Kegels ſein Mantel mit Ausnahme der einen, im Streiflichte befindlichen Seite G K Objectſchatten haben, während, wenn unter derſelben Annahme der Kegel mit der Spitze nach oben ſtände, nur eine Seite $G^1\,K$ Objectſchatten, oder vielmehr nur Streiflicht haben würde. In beiden Fällen fiele jedoch der Schlagſchatten des Mantels ebenfalls noch innerhalb desjenigen der Grundfläche.

§. 452. Punkte der Schlagſchattengrenze in der Niſche werden zum Theil analog dem Verfahren bei der Kuppel gefunden. Wie bei dieſer conſtruirt man nämlich, da die Decke der Niſche eine Viertelkugel iſt, ihrer Fläche angehörige, der Bildebene parallele Kreisſtücke, wie z. B. diejenigen um die Mittelpunkte C und C^1, legt dann aber durch die Punkte J und G, in welchen der Niſchenrand ſie ſchneidet, Strahlen, deren zweite Schnitt-

punkte i und g mit denſelben Kreiſen Punkte der Schlagſchattengrenze ſind. Die Schlagſchatten k und b anderer Punkte K und B des Niſchenrandes findet man mit Hülfe der entſprechenden Projectionen k°, b° und α, β auf der Grundfläche des Niſchencylinders. — Der Ort des höchſten Lichtes in demſelben Cylinder iſt die Seite $i^1 i$. Sie wird darin beſtimmt durch eine durch den Mittelpunkt i° der Grundfläche gelegte horizontale, die Peripherie der letztern in i^1 ſchneidende Linie.

Die in die Seite N M fallende Objectſchattengrenze an dem Cylinder des Eckthürmchens wird wie bei dem Kuppelgebäude durch an die Grundflächen gezogene horizontale Tangenten N n° oder M m° ermittelt. Der Schlagſchatten dieſer Cylinderſeite auf der Mauer wird gefunden, wenn man die eben gezogenen Tangenten bis in letztere, d. h. bis zu den Punkten n° und m° der der Verlängerung der Mauer angehörigen Linien q v und $q^1 v^1$ verlängert und dann eine durch dieſe Punkte gezogene Lothrechte durch Strahlen, welche durch die Punkte N und M gehen, in n und m abſchneidet. Die Schlagſchattenſtücke n r und m a ergeben ſich am leichteſten nach der Conſtruction der Schatten des Daches und der Conſole des Eckthürmchens. §. 453.

Die Objectſchattengrenze an dem dem Thürmchen als Dach dienenden Kegel wird gefunden, wenn man zuvor den Schlagſchatten (e) der Spitze E auf der verlängert gedachten Kegel-Grundfläche feſtſtellt, und dann Tangenten aus (e) an die letztere ſelbſt zieht. Von der einen derſelben wird die Grundfläche in R berührt, und iſt hiernach die Kegelſeite R E die Objectſchattengrenze. Den Schlagſchatten von dieſer findet man, wenn man zuerſt den des Punktes R, wie vorher den des Punktes N auf der Mauer ſucht. Da die letztere, bis in den Kegel verlängert, mit deſſen Achſe zuſammenfallen würde, muß der auf ſie fallende Schlagſchatten der Kegelſeite R E von r nach E gerichtet ſein, in dem Punkte c aber der Kante der Mauer ſich nach e, dem wirklichen Schlagſchatten der Spitze E (im Schnittpunkte des Strahles E e mit dem Schatten q ε e der Achſe liegend) umbiegen. Zeichnet man ſchließlich durch die Punkte v, r, n eine elliptiſche Curve, ſo iſt dieſe ein Theil des Schlagſchattens der dem Cylinder und dem Kegel gemeinſchaftlichen Grundfläche, und das Stück r n davon der Schlagſchatten des Stückes R N. c r iſt eine Tangente an dieſer Curve. §. 454.

Um Object- und Schlagſchatten des dem Thurme als Conſole dienenden umgekehrten ſchiefen Kegels zu finden, deſſen Spitze X in der die Ecke abſtumpfenden Fläche liegt, denkt man ſich die letztere verlängert und conſtruirt auf ihr den elliptiſchen Schlagſchatten v^1 (m) (a) t^1 der dem Kegel und dem Cylinder gemeinſchaftlichen Grundfläche vermittelſt einzelner §. 455.

ſeiner Punkte, indem man z. B. von M horizontal bis (μ) in der verlängerten $t^1 v^1$ zieht, durch (μ) eine Lothrechte zieht und dieſe durch einen durch M gehenden Strahl in (m) ſchneidet u. ſ. w. Eine alsdann aus X an dieſe Ellipſe gezogene Tangente ergiebt (a) als Berührungspunkt, und ein durch (a) gezogener Strahl ergiebt im Punkte A der Peripherie der Grundfläche denjenigen Punkt, nach welchem die als Objectſchattengrenze auftretende Kegelſeite X A gerichtet iſt. Von jener Tangente X (a) iſt ſelbſtverſtändlich nur das Stück X z der die Ecke abſtumpfenden Fläche angehörig. Von z aus muß, nachdem der elliptiſche Schlagſchatten v^1 m a der Cylinder-Grundfläche neuerdings auf der die Niſche enthaltenden Mauerfläche vermittelſt einzelner ſeiner Punkte, wie dies vorher mit m geſchehen, conſtruirt worden, abermals eine, hier ſehr kurze Tangente z a an dieſe Ellipſe gezogen werden, wodurch ſich in a der wirkliche Schlagſchatten von A ergiebt. Es liegt hiernach in der Curve m a der Schlagſchatten des Stückes M A der Grundfläche, und in der gebrochenen Linie a z X der der Kegelſeite A X vor. —

§. 456. **d) Die Sonne hinter der Bildebene**

iſt darſtellbar; ihr Stand wird durch ihren Abweichungswinkel von der Verticalebene und durch ihren Höhenwinkel über dem Horizonte bezeichnet, und wird auch ihre Perſpective demgemäß conſtruirt. Steht die Sonne z. B. um den Winkel von 20° rechts der Verticalebene und 36° über dem Horizonte, ſo wird der erſtere an die Verticale in O (Fig. 127, Taf. 20) angetragen, der Horizont dadurch in F geſchnitten, durch F die lothrechte Grenzlinie (F Hauptpunkt, F O Länge der Diſtanz, ω herabgeſchlagener Geſichtspunkt) der Höhenwinkel-Ebene gezogen, an F ω in ω der Höhenwinkel von 36° angetragen und dadurch die Grenzlinie in S geſchnitten, wonach S die Perſpective der Sonne, der Verſchwindungspunkt der Strahlen, iſt.

§. 457. Handelt es ſich nun um die Conſtruction des auf eine horizontale Ebene, etwa die Grundebene, fallenden Schlagſchattens eines lothrechten Stabes B A, ſo iſt die der B A parallele S F ſelbſt die Lichtachſe, d. i. die Grenzlinie der durch B A anzunehmenden lothrechten Lichtebene; Punkt F, als ihr Schnittpunkt mit der Grenzlinie der Schatten fangenden Ebene (mit dem Horizonte) iſt der Sonnen-Fußpunkt, d. i. der Verſchwindungspunkt

für die Schnittlinie beider Ebenen, und deshalb die nach F gerichtete b A, durch einen Strahl in b abgeschnitten, der Schlagschatten von B A.

§. 458. Bei der Construction des auf die horizontale Grundebene fallenden Schlagschattens des der Bildebene parallelen schiefen Stabes B C ist die der B C parallele S F¹ die Lichtachse (Grenzlinie der durch B C anzunehmenden schiefen Lichtebene), Punkt F¹, ihr Schnittpunkt mit dem Horizonte, der Sonnen-Fußpunkt, demnach die nach F¹ gerichtete Linie b C, durch einen Strahl in b abgeschnitten, der Schlagschatten von B C.

§. 459. Ist S in Fig. 128 (Taf. 21) die Perspective der Sonne, B A die eines schiefen Stabes, welcher in A normal auf einer doppelt-schiefen Ebene steht, deren Grenzlinie (H¹ Hauptpunkt, H² Verschwindungspunkt für normale Linien) ε ϱ, und deren Schnittlinie mit der horizontalen Grundebene u ε ist, so ist für die Construction des auf die schiefe Ebene fallenden Schlagschattens der Linie B A die dieser parallele, d. h. in H² verschwindende S F die Lichtachse (Grenzlinie der schiefen Lichtebene), ihr Schnittpunkt F mit der Grenzlinie ε ϱ der Sonnen-Fußpunkt, und die nach diesem gerichtete b A, durch einen Strahl S B in ḃ abgeschnitten, der Schlagschatten.

Wird der schiefe Stab B A bis C in der horizontalen Grundebene verlängert und sein Schlagschatten auf dieser gesucht, so ist S F² dazu die Lichtachse, F² der Sonnen-Fußpunkt und b° C der Schlagschatten.

§. 460. Für die Construction des auf die schiefe Ebene fallenden Schlagschattens des lothrechten Stabes B G ist die der B G parallele, also lothrechte S F¹ die Lichtachse, F¹ der Sonnen-Fußpunkt, demnach die nach F¹ gerichtete b G der Schlagschatten.

Zu dem in J auf der Grundebene stehenden lothrechten Stabe B J ist wieder F³ der Sonnen-Fußpunkt, und b° J der Schlagschatten von ihm. —

Beispiel 45.

§. 461. **Aufgabe.** In Fig. 129 (Taf. 22) ist die schon im Beispiele 19 (Fig. 63, Taf. 10) vorgeführte Perspective (P Hauptpunkt,

P D/$_2$ halbe Diſtanz) **eines Thurmes mit geſchweiftem Dache** und die eines an einer Mauer emporgeführten **Schornſteins** gegeben; die **Sonne** ſtehe **hinter der Bildebene** 36° über dem Horizonte und 29° rechts der Verticalebene — es ſollen die Schattenperſpectiven der gegebenen Objecte conſtruirt werden.

§. 462. **Ausführung.** Um die hier nicht weit außerhalb des Conſtructionsraumes fallende Perſpective S der Sonne darzuſtellen, wird an die Verticale rechts in O der Winkel von 29° angetragen, dadurch der Horizont im Punkte F geſchnitten, durch F eine Lothrechte als Grenzlinie (F Hauptpunkt, ω herabgeſchlagener Geſichtspunkt) der Höhenwinkel-Ebene gezogen, und dieſelbe durch einen an den Horizont, zu dieſem um 36° geneigten, in ω angetragenen Winkelſchenkel in S geſchnitten. Bei Annahme lothrechter Lichtebenen iſt dann S F die Lichtachſe, F der Sonnen-Fußpunkt. Wird aber irgendwo eine horizontale Lichtebene angenommen, wie hier, um zunächſt das Stück u g des Schlagſchattens der horizontalen Schornſteinkante A G auf der lothrechten Mauerfläche zu conſtruiren, die, als normal zur Bildebene, die Verticale zur Grenzlinie hat, ſo iſt eine aus dem Sonnenpunkte, der A G, alſo dem Horizonte geometriſch parallel gegen die Verticale zu ziehende Linie S F^1 die Lichtachſe, und ihr Schnittpunkt F^1 mit der Verticale der Sonnen-Fußpunkt, ſo daß eine Linie, aus F^1 durch A gezogen und durch einen Strahl S G in g abgeſchnitten, in u g jenes Schlagſchattenſtück ergiebt.

Um den Schlagſchatten des Schornſteins zu vollenden, kann man nun durch g lothrecht den Schatten der durch G lothrecht gehenden Kante, durch a parallel mit A G das auf die obere horizontale Fläche der Mauer fallende, durch einen Strahl S A in a abzuſchneidende Schlagſchattenſtück u a ziehen und die Richtigkeit darin controliren, daß hierbei a zugleich in eine vom Sonnen-Fußpunkte F durch α zu ziehende Linie fallen muß. a r endlich, durch einen Strahl S R in r abzuſchneiden, iſt perſpectiviſch parallel A R, d. h. in P verſchwindend.

§. 463. Die Cylinderſeite, in welcher die Objectſchattengrenze an dem Thurmcylinder liegt, wird dadurch beſtimmt, daß man aus dem Fußpunkte F an die obere oder untere Grundfläche, oder auch wohl an das oberhalb der Conſtruction vorliegende Stück des perſpectiviſchen Hülfsgrundriſſes des Thurmcylinders und des Dachvorſprunges eine Tangente zieht; es iſt dann eine Lothrechte, durch die Berührungspunkte b°, oder β, oder c gezogen, die Objectſchattengrenze. Die von F durch c gezogene Tangente

c d ergiebt zugleich die Grenze des auf die obere Mauerfläche fallenden Schlagſchattens des Thurmcylinders.

Die Kegelſeiten, in welchen die Objectſchattengrenzen des umgekehrten Geſimskegels liegen, deſſen Spitze E iſt, werden dadurch ermittelt, daß man von dem Mittelpunkte 2 der Kegel-Grundfläche eine Linie nach F zieht, dieſelbe durch einen Strahl S E in e ſchneidet, von e Tangenten, wie e T deren eine iſt, an die Grundfläche und hiernach die Kegelſeite E T zieht. Da dieſe in der Figur mit der den Umriß des Geſimskegels bildenden Seite zuſammenfällt, iſt das Geſims, ſoweit es ſichtbar iſt, im Schatten. Punkte der Grenze des zum Theil auf den Thurmcylinder fallenden Schlagſchattens der Geſimskegel-Grundfläche werden am genaueſten unter Anwendung des ſchon erwähnten, oberhalb der Figur vorliegenden Stückes des perſpectiviſchen Hülfsgrundriſſes der Kegel- und der Thurmcylinder-Grundfläche conſtruirt, indem man nämlich von F aus (Schnitt-) Linien (lothrechter Lichtebenen mit der Grundrißebene) durch die Peripherien zieht, wie z. B. B° b°, dann durch lothrechte Linien die Punkte B° und b° in die Punkte B und β der Conſtruction überträgt, durch β eine Cylinderſeite zieht und dieſelbe durch einen Strahl S B in b ſchneidet. Auf dieſelbe Art iſt der Schlagſchatten t des Punktes T feſtgeſtellt worden. §. 464.

Punkte des Objectſchattens an dem geſchweiften Dache werden gefunden, wenn man zuvor die Schnitte mehrerer beliebigen lothrechten Lichtebenen mit dem Dache conſtruirt, wie dies im Beiſpiele 19 gezeigt worden; es ſind dann die Berührungspunkte, wie h, i, K, k, m und n von Strahlen, welche berührend an dieſe Curven gezogen werden, Punkte der Objectſchattengrenze. In der Figur trifft es ſich zufällig, daß der Punkt k, weil er der zweite Berührungspunkt deſſelben Strahles S K iſt, zugleich der Schlagſchatten von K und deshalb ein Punkt der Grenze des Schlagſchattens iſt, welchen der zwiebelförmige obere Theil des Daches auf den glockenförmigen unteren Theil deſſelben wirft. Andere Punkte dieſer Schlagſchattengrenze ergeben ſich in den Schnittpunkten der die oberen Schnittfiguren berührenden Strahlen mit den unteren Schnittfiguren. §. 465.

Beiſpiel 46.

Aufgabe. In Fig. 130 (Taf. 23) ſind die ſchon im Beiſpiele 32 (Fig. 90, Taf. 15) vorgeführten Perſpectiven eines **Cylinders** und eines **Kegels** gegeben, welche beide auf einer doppelt-ſchiefen Ebene, deren Grenzlinie $y^1 F^3$ und deren Schnittlinie mit der horizontalen Grundebene M_E iſt, liegen und §. 466.

zwar beide auf Seiten, welche in y^1 verſchwinden. Beide ſind von einer horizontalen Ebene, einer Waſſerfläche (P Hauptpunkt im Horizonte, D Diſtanzpunkt), geſchnitten — es ſollen unter Annahme der Sonne im Punkte S die Schattenperſpectiven der aus dem Waſſer ragenden Stücke conſtruirt werden.

§. 467. **Ausführung.** Die Perſpectiven der Grundflächen des Cylinders, deren Grenzlinie wH^2 iſt, ſind in Fig. 90 vermittelſt im Punkte H^2 verſchwindender Ordinaten, wie rq, tt^1, r^1q^1 u. ſ. w., conſtruirt. Um nun Punkte des Schlagſchattens der zum Theil aus dem Waſſer ragenden einen Grundfläche zu ermitteln, conſtruirt man in Fig. 130 die Schlagſchatten jener Ordinaten, ſo weit dieſe die Schnittlinie pp° der Waſſerfläche überragen. Um ſo z. B. den über die Waſſerfläche fallenden Schlagſchatten pt des Ordinatenſtückes pT zu finden, ſtellt man vermittelſt der aus der Sonne perſpectiviſch parallel mit pT, alſo in H^2 verſchwindend, zu ziehenden Lichtachſe SF^1 in der Grenzlinie der Waſſerfläche, d. i. der Horizont, den Sonnen-Fußpunkt F^1 feſt, zieht von dieſem eine Linie durch p und ſchneidet dieſelbe durch den Strahl ST in t, u. ſ. w. — Die Seite, in welcher der Objectſchatten am Cylindermantel liegt, findet man, wenn man wieder unter Anwendung von in H^2 verſchwindenden Ordinaten, wie z. B. ni eine iſt, die Schnittfigur des Cylinders mit einer beliebigen Lichtebene, die jedoch die Lichtachſe SF^5 zur Grenzlinie haben muß, conſtruirt und aus der Sonne einen berührenden Strahl Sh an dieſelbe zieht; die durch h gehende, in y^1 verſchwindende Cylinderſeite iſt alsdann die Objectſchattengrenze. Da dieſe in g die Schnittfigur des Cylinders mit der Waſſerfläche ſchneidet, ſo iſt eine von g berührend an den Schlagſchatten der Cylinder-Grundfläche gezogene Linie $g(F^4)$ die Grenze des über die Waſſerfläche fallenden Schlagſchattens des Cylindermantels. Die Richtung dieſer Linie kann allenfalls dadurch controlirt werden, daß man mit einer aus der Sonne parallel der durch h liegenden Cylinderſeite, alſo durch y^1 gezogenen Lichtachſe SF^4 den Horizont, als Grenzlinie der Schatten fangenden Waſſerfläche, in dem links weit entfernt gelegenen Sonnen-Fußpunkte F^4 ſchneidet, und nach dieſem von g aus unmittelbar die Schlagſchattengrenze zieht.

§. 468. Dieſem Verfahren entſprechend findet man den zum Theil über die Waſſerfläche, zum Theil die gegebene ſchiefe Ebene bergauf fallenden Schlagſchatten, und danach den Objectſchatten des Kegels. Da y^2 in der Grenzlinie xz^1 der Kegel-Grundfläche der Verſchwindungspunkt der Ordinaten δD, βB, αA u. ſ. w. iſt, unter deren Anwendung die Perſpective der Grundfläche conſtruirt wurde, ſo ergiebt die aus der Sonne

nach y^2 zu ziehende Lichtachſe in ihrem Schnittpunkte F^2 mit dem Horizonte den Sonnen-Fußpunkt zu dem auf die Waſſerfläche fallenden Schlagſchatten des Ordinatenſtückes $x^1 K$, und hat man danach nur von F^2 durch x^1 eine Linie zu ziehen und dieſelbe durch einen Strahl S K in k zu ſchneiden, um in k einen Punkt des auf die Waſſerfläche fallenden Schlagſchattens der Grundfläche zu erzielen. Zu dem die gegebene ſchiefe Ebene bergauf fallenden Schlagſchattenſtücke der Grundfläche iſt der Schnittpunkt F^3 der Lichtachſe $S y^2$ mit der Grenzlinie $y^1 F^3$ der Sonnen-Fußpunkt, ſo daß Linien, von F^3 durch die Fußpunkte β und α der Ordinaten βB und αA gezogen, in ihren Schnittpunkten b und a mit den Strahlen S B und S A Punkte der Grenze des in Rede ſtehenden Schlagſchattenſtückes ergeben. Zieht man ſchließlich aus der Kegelſpitze s eine Tangente s c an dieſes Schlagſchattenſtück, ſo iſt dieſe die Grenze des Schlagſchattens des Kegelmantels, und ſchneidet man die Peripherie der Kegel-Grundfläche durch einen Strahl S c in C, und zieht dann die Kegelſeite C s, ſo ergiebt ſich hierin die Objectſchattengrenze am Kegelmantel.

Beiſpiel 47.

Aufgabe. Es ſoll zu Fig. 121 (Taf. 21), unter Annahme der **Sonne hinter der Bildebene** im Punkte S, Anleitung zur Conſtruction der Perſpectiven des Object- und des Schlagſchattens der **Kugel**, des Lichtpoles und der Grenzen gleicher Erleuchtung an derſelben gegeben werden. §. 469.

Ausführung. Die Aufgabe unterſcheidet ſich von der in §. 427 gegebenen nur dadurch, daß, während dort der Lichtpunkt L und ſein Fußpunkt F auf der Grundebene in der Nähe lagen, hier beide Punkte S und F^1 in unendlicher Entfernung liegen; daß ferner, während dort der die Objectſchattengrenze bildende Kreis als Berührungskreis eines Strahlenkegels nicht ein größter Kugelkreis war und deshalb der Ort ſeines Mittelpunktes und die Länge ſeines Durchmeſſers erſt durch eine geometriſche Hülfsconſtruction feſtgeſtellt werden mußten, hier dieſer Kreis als Berührungskreis eines Strahlencylinders ein größter Kugelkreis um den Kugelmittelpunkt C von bekanntem Durchmeſſer iſt. Daß übrigens die Ebene des hier zu conſtruirenden Berührungskreiſes der jenes Kreiſes parallel iſt und desbalb ebenfalls ε s als Grenzlinie hat, geht ſchon daraus hervor, daß der von der Sonne nach dem Kugel-Mittelpunkte C gerichtete Strahl S C zugleich durch den Lichtpunkt L geht. Die Grundlinie aber der hier in Betracht kommenden Kreisebene iſt die durch C gehende Linie x z; ihre Schnittlinie mit der horizontalen Grundebene iſt ε z. §. 470.

Conſtruirt man hiernach um C mit dem Durchmeſſer x y des um C geometriſch vorliegenden Kreiſes die Perſpective eines größten Kugelkreiſes unter Anwendung des einſchließenden Quadrates, deſſen eines Seitenpaar in H^1 verſchwindet, ſo iſt dieſe die Perſpective der Objectſchattengrenze an der Kugel. Vermittelſt der hierbei verwandten, in H^1 verſchwindenden Ordinaten wird auch der auf die Grundebene fallende Schlagſchatten der Kugel gefunden. Die Lichtachſe dazu iſt die den Ordinaten parallele, alſo nach H^1 gezogene Linie $S H^1$, und der Schnittpunkt P derſelben mit dem Horizonte der Sonnen-Fußpunkt. Zieht man nun von P Linien durch die Punkte, in welchen jene Ordinaten die Schnittlinie ε z treffen, und ſchneidet dieſelben durch entſprechende Strahlen wie im Beiſpiele 41, ſo ergeben die Schnittpunkte die Grenze des Schlagſchattens. Der Schlagſchatten des Mittelpunktes C würde, wie der des Punktes m, in m^1 fallen.

Der Lichtpol iſt auch hier der Punkt l. Das Stück 2. 3 der Grenzlinie ε s, welches innerhalb der Kugelperſpective liegt, ſowie die im Beiſpiele 41 um den Mittelpunkt m conſtruirte Kreisperſpective ſelbſt ſind als Grenzen gleicher Erleuchtung auf dem dem Lichte ausgeſetzten Kugelabſchnitte anzuſehen.

§. 471. **c) Die Sonne vor der Bildebene**

iſt ſelbſt nicht darſtellbar. Für die Conſtruction der von ihr bei dieſem Stande verurſachten Schatten wird die Perſpective des Verſchwindungspunktes ihrer Strahlen vermittelſt des nach ihr ſelbſt gerichteten, aber rückwärts gegen die Bildebene verlängerten Parallelſtrahles beſtimmt, und fällt dieſelbe hierbei ſelbſtverſtändlich auf die dem gegebenen Stande der Sonne entgegengeſetzte Seite der Verticalebene und unterhalb des Horizontes, wenn die Sonne ſelbſt über demſelben ſteht.

Iſt zu Fig. 131 (Taf. 20) die Sonne z. B. als 20° rechts der Verticalebene und 36° über dem Horizonte ſtehend gegeben, ſo fällt die Perſpective (S) des Verſchwindungspunktes der von ihr ausgehenden parallelen Strahlen 20° links der Verticalebene und 36° unter den Horizont, und hat man, um ſie zu conſtruiren, an die Verticale in O links den Winkel von 20° anzutragen, dadurch den Horizont in F zu ſchneiden, durch F die lothrechte Grenzlinie (F Hauptpunkt, ω herabgeſchlagener Geſichtspunkt) der Höhenwinkel-Ebene zu ziehen und dieſelbe durch einen an den Horizont in ω

unterhalb anzutragenden, von diesem um 36° abweichenden Winkelschenkel in (S) zu schneiden.

Soll hiernach der auf die horizontale Grundebene fallende Schlagschatten b A eines lothrechten Stabes B A construirt werden, so ist dazu die lothrechte Grenzlinie (S) F selbst als Lichtachse, und ihr Schnittpunkt F mit dem Horizonte als Sonnen-Fußpunkt anzusehen, demnach F A zu ziehen und durch einen Strahl (S) B in b abzuschneiden. §. 472.

Im Uebrigen ist dieser Strahlen-Verschwindungspunkt (S) in jeder Beziehung so zu verwenden, wie in dem Vorhergehenden der Sonnenpunkt selbst und ist dieserhalb Neues nicht hinzuzufügen.

Beispiel 48.

Aufgabe. Es ist in Fig. 132 (Taf. 23) die Perspective (P Hauptpunkt, $O/_3$ ein Drittel der Distanz) eines an der abgestumpften Ecke eines Gebäudes angebrachten **Balkons** gegeben — es sollen unter Annahme der **Sonne vor der Bildebene**, 32° rechts der Verticalebene und $20\frac{1}{2}$° über dem Horizonte stehend — wonach (S) der Verschwindungspunkt der Strahlen ist — die Perspectiven der Schatten des Balkons construirt werden. §. 473.

Ausführung. Um die Object- und Schlagschatten an der Vorderfläche des Balkons selbst und auf der die Ecke abstumpfenden Wandfläche zu finden, wird am zweckmäßigsten die Schnittfigur des Balkons mit einer lothrechten Lichtebene, welche die Lichtachse (S) F zur Grenzlinie hat, construirt, wie eine solche in der Figur vorliegt. Es ergeben dann Strahlen, durch vorspringende Eckpunkte des Schnittes, wie z. B. durch $\varkappa$ und J gezogen, daß durch $\varkappa^1$ und λ der Schlagschatten der Kante K L der Console, durch i und i^1 der der Kante des Architraves geht u. s. w. Ein berührender Strahl, an den Schnitt durch das deckende Glied gezogen, ergiebt für dieses in E den Ort des Objectschattens, in e den des Schlagschattens u. s. w. §. 474.

Das Stück des Schlagschattens, welches auf die Façade links fällt, wird am leichtesten dadurch construirt, daß man durch die Eckpunkte eines zuvor angefertigten perspectivischen Hülfsgrundrisses die Schnittlinien der horizontalen Grundebene mit den durch jene Eckpunkte annehmbaren Lichtebenen nach F zieht, dann durch die Punkte, in welchen diese Linien an die Façade links stoßen, lothrechte Linien zieht und diese durch entsprechende

Strahlen ſchneidet. So iſt, um z. B. den Schlagſchatten r von R zu finden, durch die Projection r° des Punktes R eine nach F gerichtete Linie bis ϱ zu ziehen, und eine durch ϱ gezogene Lothrechte durch den Strahl (S) R in r zu ſchneiden u. ſ. w. — Punkte des gerade auf das Geſims der Façade links fallenden Schlagſchattens der lothrechten Kante N Q des Balkons ergeben ſich, wenn man die Grundriß-Projection dieſes Geſimſes durch eine von q° nach F gezogene Linie ſchneidet und die Schnittpunkte durch lothrechte Linien in die entſprechenden Kanten der Geſimsperſpective ſelbſt überträgt. Ein an das ſo entſtandene Schlagſchattenprofil in dem deckenden Gliede berührend gezogener Strahl ergiebt hierin zugleich die Punkte, durch welche die Object- und Schlagſchattengrenzen nach x gezogen werden können. Conſtruirt man an dem Geſimſe der Façade rechts auf gleiche Art den Durchſchnitt einer lothrechten Lichtebene und zieht an denſelben einen berührenden Strahl, ſo ergiebt derſelbe hier gleichfalls den Ort der Object- und der Schlagſchattengrenze.

Um den auf die Façade links fallenden Schatten des Balkons ohne Benutzung des perſpectiviſchen Hülfsgrundriſſes zu conſtruiren — was wegen der großen Entfernung der hierbei zu benutzenden Sonnen-Fußpunkte nicht zu empfehlen iſt — müßte man die Schlagſchatten der nach Punkt y des Horizontes gerichteten Kanten des Balkons ſuchen. Der dieſen Kanten und der linken Façade, deren Grenzlinie lothrecht durch den weit links gelegenen Punkt x geht, entſprechende Sonnen-Fußpunkt F^1 iſt der Schnittpunkt der durch die Sonne (S) den Kanten parallel, alſo durch y, zu ziehenden Lichtachſe mit jener Grenzlinie; es iſt danach eine z. B. von T nach F^1 gezogene, durch den Strahl (S) M in m abgeſchnittene Linie T m der Schlagſchatten der Kante T M, u. ſ. w.

Ebenſo wäre zu verfahren, wenn es darauf ankäme, auf der die Ecke abſtumpfenden Fläche den Schlagſchatten einer im Punkte y verſchwindenden Linie, wie z. B. der Fuge V U, zu ſuchen. Da eine durch den rechts liegenden Punkt z gehende Lothrechte die Grenzlinie der die Ecke abſtumpfenden Fläche iſt, ſo iſt der Schnittpunkt F^2 dieſer Grenzlinie mit einer durch die Sonne (S) parallel V U, d. h. durch y zu ziehenden Lichtachſe (S) F^2 der Sonnen-Fußpunkt, und wäre demnach eine aus F^2 durch U gezogene und durch den Strahl (S) V in v abgeſchnittene Linie v U der Schlagſchatten von V U.

Beiſpiel 49.

§. 475. **Aufgabe.** In Fig. 133 (Taf. 22) ſind die Perſpectiven (P Hauptpunkt, P O_3 ein Drittel der Diſtanz) I und II der

neben einander liegenden elliptiſchen **Eingänge zweier cylindriſchen Tunnels** gegeben. Die Seiten des Tunnelcylinders I verſchwinden im Hauptpunkte P, die des andern in dem rechts außerhalb der Conſtruction liegenden Punkte z; (S) ſei der Verſchwindungspunkt der Strahlen **der vor der Bildebene ſtehenden Sonne** — es ſollen die Schlagſchatten-Perſpectiven der Tunneleingänge conſtruirt werden.

Ausführung. Da die Grundflächen eines Cylinders ebene Flächen §. 476. und ſeine Seiten gerade Linien ſind, ſo kann man zur Conſtruction der Schatten mit Vortheil die ſehr leicht zu conſtruirenden geradlinig begrenzten Schnitte des Cylinders mit ſolchen, hier offenbar einfach ſchiefen, Lichtebenen verwenden, welche der Achſe des Cylinders parallel ſind, alſo durch je zwei Seiten deſſelben gehen. Die Endpunkte der Schlagſchatten, welche die einen Cylinderſeiten auf die in denſelben Lichtebenen liegenden anderen Cylinderſeiten werfen, ergeben alsdann Punkte der Grenze des in den Cylinder fallenden Schlagſchattens. — Die Grenzlinie jener Lichtebenen muß durch die Sonne, oder was hier daſſelbe iſt, durch Punkt (S), und zugleich durch den Verſchwindungspunkt P der Cylinderſeiten gehen, alſo die Linie (S) P ſein. Da ferner die Ebene des Tunneleinganges I (Grundfläche des Tunnelcylinders) parallel der Bildebene iſt, ſo müſſen die Schnitte ſolcher Lichtebenen mit dieſer Grundfläche gerade, der Grenzlinie (S) P geometriſch parallele Linien ſein, während die Schnitte derſelben mit dem Cylindermantel in P verſchwindende (gerade) Cylinderſeiten ſind. Es ſind demnach $A\alpha P$ und $B\beta P$ Schnitte dieſer Art. Zieht man nun von den Endpunkten A und B der Cylinderſeiten A P und B P, welche Punkte des Schatten werfenden Umfanges der Grundfläche ſind, die Strahlen A (S) und B (S), ſo ſchneiden dieſe die Cylinderſeiten αP und βP in den Punkten a und b, welche die Schlagſchatten von A und B ſind. So iſt auch in dem Schnitte $E\varepsilon P$ der durch den Strahl E (S) abgeſchnittene Punkt e der Schlagſchatten von E; doch kann man dieſen Punkt auch wie andere Schlagſchattenpunkte, die auf die Grundebene fallen, vermittelſt einer lothrechten Lichtebene, als Schnittpunkt einer von der Projection ε° nach dem der Grundebene entſprechenden Sonnen-Fußpunkte F gezogenen Linie mit dem Strahle E (S) ermitteln.

Faßt man die Ausführung als im Sinne der in den §§. 404 und 433 hervorgehobenen Regel geſchehen auf, ſo iſt danach

P b als Schlagſchatten der horizontalen Cylinderſeite P B und als dadurch conſtruirt anzuſehen, daß man die Lichtachſe (S) P parallel P B, d. h. durch P gehend, alſo horizontal, zog, ihren Schnittpunkt P

mit dem Horizonte als Sonnen-Fußpunkt zur Conſtruction des auf eine horizontale Cylinderſeite P β fallenden Schlagſchattens der ſelbſt horizontalen Cylinderſeite P B feſtſtellte und dann b darin durch einen Strahl abſchnitt;

es kann aber andererſeits b β auch als Schlagſchatten der einfach-ſchiefen Linie B β der Grundfläche, und demgemäß als dadurch conſtruirt angeſehen werden, daß durch (S) die der Linie B β parallele, alſo ebenfalls einfach-ſchiefe Lichtachſe (S) F¹ gezogen und in dem Schnittpunkte P derſelben mit dem Horizonte der Sonnen-Fußpunkt zur Conſtruction des auf die horizontale Cylinderſeite P β fallenden Schlagſchattens von B β feſtgeſtellt worden.

Die Seite, in welcher der Objectſchatten der Cylinderfläche liegt und von deren Endpunkte T an der Grundfläche die Schlagſchattencurve in der Cylinderhöhlung anfängt, wird durch eine an den Cylindermantel berührend gelegte Lichtebene beſtimmt. T iſt dadurch zu ermitteln, daß man an die Curve des Tunneleinganges aus dem in der unendlich entfernten Grenzlinie der Ebene dieſer Curve liegenden Sonnen-Fußpunkte F¹ eine, wegen dieſer Lage von F¹, der B β und A α geometriſch parallele Tangente zieht. Um hierbei den Berührungspunkt T durch einfache Linealconſtruction feſtzuſtellen, kann man, da jene Curve ein Kegelſchnitt iſt, verfahren, wie in §. 231 gezeigt iſt, durch dieſelbe nämlich an einer beliebigen Stelle eine Linie v q nach dem unendlich entfernten Verſchwindungspunkte F¹ der Linie A α, alſo hier dieſer geometriſch parallel ziehen, ferner α v und A q ziehen und bis zu ihrem Schnittpunkte n verlängern, dann den Schnittpunkt m der Diagonalen des Vierecks α A q v feſtſtellen und zuletzt den Kegelſchnitt durch eine n und m verbindende Linie in dem geſuchten Berührungspunkte T ſchneiden.

Eine ſchließlich durch die Punkte T, a, b und c gezeichnete Curve iſt die Grenze des Schlagſchattens des Tunneleinganges I.

§. 177. Die Conſtruction der Schattengrenze an dem Tunneleingange II geſchieht dem Vorhergehenden entſprechend. c K x d und h G y i ſind hier wieder Schnitte des Cylinders mit ſolchen (hier doppelt-ſchiefen) Lichtebenen, welche durch die Sonne und zugleich durch je zwei Cylinderſeiten gehen; und zwar iſt die Grenzlinie dieſer Ebenen die Linie (S) (z), weil dieſe durch die Sonne, oder was daſſelbe iſt, durch den Punkt (S), und zugleich durch den Verſchwindungspunkt z der Cylinderſeiten geht. In ihrem Schnittpunkte w mit der lothrechten Grenzlinie y w der Cylinder-Grundfläche bezeichnet dieſelbe den Verſchwindungspunkt für die Schnittlinien K x und G y jener Lichtebenen mit dieſer Grundfläche. Schneidet man nun wieder

die Cylinderſeiten αd und γi durch Strahlen, von (S) durch K und G gezogen, in den Punkten k und g, ſo ſind dies Punkte der Schlagſchatteneurve. In der Seite, welche an dem Tunnelcylinder durch eine ihn berührende Lichtebene — in der Figur durch eine von w an den Umfang ſeiner Grundfläche, dieſe in N berührend, gezogene Tangente beſtimmt — feſtgeſtellt wird, liegt wieder der Objectſchatten der Cylinderfläche, und in dem Punkte N dieſer Seite beginnt zugleich die Schlagſchattencurve. w iſt hier der Sonnen-Fußpunkt zu der Ebene des Tunneleinganges II, denn er iſt der Schnittpunkt einer aus der Sonne normal, wie die Cylinderſeiten (nämlich in z verſchwindend), gegen jene Ebene gerichteten Linie (S) z mit der Grenzlinie y w derſelben. —

Faßt man wieder die Conſtruction als im Sinne der in den §§. 404 und 433 hervorgehobenen Regel geſchehen, d k z. B. als den in die horizontale Cylinderſeite $d\alpha$ fallenden Schlagſchatten der horizontalen Cylinderſeite c K auf, ſo iſt (S) z als horizontal wie die in z verſchwindende Schatten werfende c K, und als Lichtachſe zu der entſprechenden Lichtebene anzuſehen, und z, ihr Schnittpunkt mit dem Horizonte, als Sonnen-Fußpunkt dazu. Faßt man aber $k\alpha$ als den in die horizontale Cylinderſeite αd fallenden Schlagſchatten der doppelt-ſchiefen Linie $K\alpha$ auf, ſo iſt (S) z, weil ſie wie die Schatten werfende $K\alpha$ durch w geht, als doppelt-ſchiefe Lichtachſe zu der entſprechenden Lichtebene, und z, ihr Schnittpunkt mit dem Horizonte, wieder als der Sonnen-Fußpunkt dazu anzuſehen.

Beiſpiel 50.

Aufgabe. In Fig. 134 (Taf. 24) iſt die Perſpective (P Hauptpunkt, PO_2 halbe Diſtanz) einer von einer Viertel-Kugelfläche überwölbten, in einer ebenen Wand angebrachten **Niſche** gegeben. Die Ebene der Wand hat zur Grenzlinie eine durch den rechts außerhalb der Conſtruction liegenden Punkt z gehende Lothrechte. **Die Sonne ſtehe vor der Bildebene,** (S) ſei der Verſchwindungspunkt ihrer Strahlen, F demnach der Sonnen-Fußpunkt für horizontale Ebenen — es ſoll die Perſpective des Schlagſchattens in der Niſche conſtruirt werden. §. 478.

Ausführung. Man conſtruirt, wie im Beiſpiele 44, §. 452, Schnitte der Niſche mit ſolchen lothrechten Lichtebenen, welche die Lichtachſe (S) F zur Grenzlinie haben, und beſtimmt in ihnen die Schlagſchatten ihrer Schnittpunkte mit dem oberen Niſchenrande durch Strahlen. Während nun §. 479.

aber in §. 452 die Perſpectiven dieſer Schnitte, die an ſich Kreiſe ſind, als Kreisſtücke um leicht zu ermittelnde Mittelpunkte geſchlagen werden konnten, ſind dieſelben hier, wo die Sonne nicht, wie dort, innerhalb der Bildebene ſteht, Stücke von Ellipſen. Das zweckmäßigſte Verfahren, dieſe zu conſtruiren, iſt wohl folgendes: Nachdem man zuvor die Perſpective K C L Q des Halbkreiſes dargeſtellt hat, welcher die Grenze zwiſchen der Cylinder- und der Kugelfläche bildet, conſtruirt man über beliebigen, in z verſchwindenden Sehnen J H und C L dieſes Halbkreiſes die Perſpectiven J G D H und C R N lothrechter, dem Niſchenrande paralleler, in der Kugelfläche liegender Halbkreiſe, ſchneidet darauf die Sehnen und die Curve K C L Q durch beliebige, nach F gerichtete Linien α F und β F in Punkten wie α, γ, ϱ, E und β, δ, L, und überträgt dieſe vermittelſt lothrechter Linien in die den Sehnen entſprechenden Halbkreiſe, wonach man hier durch die Punkte A, G, R, E und B, D, L jene Schnitte der Lichtebenen, ſo weit ſie durch die Kugelfläche gehen, zeichnen kann. Ihre Fortſetzungen durch den Cylinder ſind gerade Seiten deſſelben. Schneidet man dieſe Schnitte nun durch Strahlen, welche von A und B nach (S) gezogen werden, in a und b, ſo ſind dies Punkte der Grenze des Schlagſchattens. a fällt hierbei nicht mehr in die Kugelfläche der Niſche, ſondern in die durch E liegende Seite des Niſchencylinders. Da der Schlagſchatten k von K offenbar noch tiefer als a fällt, ſo bedarf es nicht der Conſtruction eines durch K gehenden vollſtändigen Niſchenſchnittes; es genügt vielmehr, mit einer von K nach F gezogenen Linie den Halbkreis K C N Q in $\varkappa$ und darauf die durch dieſen Punkt gehende Cylinderſeite durch einen Strahl (S) K in k zu ſchneiden. Der Anfangspunkt T der Schlagſchattencurve im Niſchenrande iſt der Berührungspunkt einer Tangente, welche aus dem in der Ebene der Wand liegenden Sonnen-Fußpunkte F^1 an jene Curve gezogen wird. Da dieſer Punkt F^1 der Fußpunkt einer aus der Sonne normal gegen die Ebene der Wand gezogenen Lichtachſe ſein muß, ſo iſt er feſtzuſtellen im Schnittpunkte der durch z gehenden lothrechten Grenzlinie (z Hauptpunkt, y Verſchwindungspunkt für normale Linien) mit einer von y durch (S) gezogenen Linie.

Zwanzigſtes Kapitel.

Atmoſphäriſches Licht.

§. 480. Das Weſen des atmoſphäriſchen Lichtes und ſeine Wirkung auf Körper im Freien iſt in den §§. 392—395 genügend erörtert

worden, und bedarf es demnach hier nur noch einer Unterſuchung der Entſtehung der dieſem Lichte entſprechenden Schatten im umſchloſſenen Raume.

Während, wie in den angeführten Paragraphen gezeigt iſt, im Freien eine Bildung von Kernſchatten kaum möglich iſt, findet wegen der Abgrenzung der in den umſchloſſenen Raum dringenden Lichtmaſſe durch die Fenſtergrenzen hier allerdings eine Bildung von Kernſchatten ſtatt, und erklären ſich die Umſtände, von welchen die Geſtaltung dieſer Schatten und der mit einiger Deutlichkeit wahrnehmbaren Halbſchatten abhängt, am leichteſten, wenn man Folgendes berückſichtigt: §. 481.

Faßt man in einem durch ein eckiges oder rundes Fenſter erhellten Raume, etwa einem Zimmer, als Schatten werfendes Object zunächſt nur einen körperlich gedachten Punkt ins Auge, ſo kommen von allen in das Zimmer dringenden Strahlen nur diejenigen in Betracht, welche nach dem Punkte gerichtet ſind und demnach in ihrer Geſammtheit eine Lichtpyramide oder einen Lichtkegel bilden, deſſen Baſis das Fenſter und deſſen Spitze der Punkt iſt. Wegen der geradlinigen Fortpflanzung der Strahlen entzieht folgerecht der Punkt einem hinter ihm gelegenen Raume, welcher entſprechend als Schattenpyramide oder Schattenkegel zu bezeichnen iſt, deſſen Baſis die Schatten fangenden Wandflächen des Zimmers enthalten, die vollſtändige Erleuchtung derart, daß alle darin gelegenen Punkte eine Spur eines das Licht theilweiſe auffangenden Hinderniſſes zeigen, d. h. im Halbſchatten ſind. Die Grenzen aber jener Schattenbaſis, d. h. die Grenzen des Schlagſchattens des Punktes, müſſen dieſelben und überhaupt feſtzuſtellen ſein, gleichviel ob man die ganze Fenſteröffnung, oder, wie es bei der perſpectiviſchen Conſtruction geſchieht, nur die Grenzen des Fenſters als leuchtend anſieht. §. 482.

Iſt nun F E in Fig. 135 (Taf. 22) der Grundriß einer Fenſteröffnung, und P R der Grundriß eines ſchmalen Prismas, deſſen Schlagſchatten auf den Fußboden fällt, ſo bezeichnen, dem Vorhergehenden nach, von F durch R und von E durch P zu ziehende Strahlen die Grenzen des (Halb-) Schattenraumes hinter dem Prisma. §. 483.

Zum Verſtändniſſe der innerhalb dieſes Raumes vorhandenen Dunkelheits-Verſchiedenheiten gelangt man, wenn man ſich die leuchtende Fenſteröffnung in Theile zerlegt denkt und die dieſen entſprechenden Schlagſchatten ins Auge faßt. Hier entſpricht dann der Schlagſchatten p P R ϱ dem von dem Punkte E, und der Schlagſchatten π P R r dem von dem Punkte F kommenden Lichte. Der Raum zwiſchen den Grenzen P p und R r überhaupt iſt erfüllt von den Schlagſchatten ſämmtlicher zwiſchen E und F liegenden Lichttheile. Während nun in dem kleinen Dreiecke P q R, in welches gar kein directes Licht dringt, ſich ſämmtliche Schlagſchatten decken und hier einen *Kernſchatten* bilden, werden alle anderen Schlagſchatten von dem Lichte mehrerer oder weniger Theile des Fenſters mehr oder weniger wiedererhellt und zu *Halbſchatten* umgewandelt. So empfängt die Stelle k dicht neben dem Kernſchatten nur das Licht, welches von den dem Punkte E zunächſt liegenden Theilen des Fenſters kommt, während andererſeits die Stelle n das von allen, mit Ausnahme der dem Punkte F zunächſt liegenden, Fenſtertheilen kommende Licht empfängt; k, wo ſich die Mehrzahl der Schatten decken, iſt deshalb an ſich erheblich dunkler als die Stelle n, welche ſelbſt wegen des Contraſtes zu der ihr benachbarten vollkommen erleuchteten Stelle o noch dunkler *erſcheint*, als ſie wirklich iſt, und dabei zugleich verurſacht, daß o aus demſelben Grunde heller erſcheint, als ferner liegende Stellen des beleuchteten Fußbodens.

Das von k und n Geſagte trifft in gleicher Weiſe auch die Stellen l und m, ſodaß, wenn man den Schlagſchattentheil m n auf einer lothrechten ebenen Fläche y z auffängt, ſich darauf ſeine Dunkelheits-Verſchiedenheiten ſo, wie ſie Fig. 136 (Taf. 22) vorführt, zeigen.

In weiterer Entfernung vom Prisma ändern ſich die Dunkelheits-Verhältniſſe des Schattens. Wenn zunächſt der Spitze q des Kernſchattens die Stelle i noch denſelben Einwirkungen wie die Stelle k unterliegt, ſo iſt dies ſchon weniger an der Stelle b der Fall, weil hierhin das Licht *mehrerer* dem Punkte E nahe liegenden Theile des Fenſters gelangt. Die Stelle d wird in gleicher Weiſe erhellt, wie die Stelle n. Auffallend anders aber zeigt ſich die

Mitte des ganzen Schattens, zwiſchen b und c. Da hier nämlich das Dreieck ϱ q π Licht zugleich empfängt von den den beiden Punkten E und F zunächſt liegenden Fenſtertheilen, ſo iſt es erheblich heller als die benachbarten Halbſchatten h c und i b, und je weiter entfernt in ihm Punkte von q und je näher ſie dabei der Mitte des Dreiecks liegen, wie z. B. u, deſto mehr Licht empfangen ſie. Scheinbar verſtärkt werden die Erleuchtungsgrade des Dreiecks ϱ q π noch dadurch, daß darin z. B. die Stelle a wegen des Contraſtes zu der dunklen Stelle b heller, dieſe aber andererſeits wegen des Contraſtes zu der helleren Stelle b dunkler erſcheint, als ſie wirklich iſt. In den übrigen Theilen des Schlagſchattens erſcheint wieder die Stelle d im Contraſte zu der helleren Stelle t dunkler, als ſie wirklich iſt u. ſ. w.

Da das von a, b und d Geſagte in gleicher Weiſe auch die Stellen s, c und g trifft, ſo zeigen ſich die Dunkelheits-Verſchiedenheiten des Schlagſchattens zwiſchen d und g, wenn man denſelben auf einer lothrechten ebenen Fläche w x auffängt, wie dies Fig. 137 (Taf. 22) vorführt.

Dem Vorhergehenden entſprechend erklärt ſich die Schattenbildung da, wo das durch das Fenſter eindringende Licht durch einen dunklen Gegenſtand, etwa das Fenſterkreuz, getheilt iſt. §. 484.

Iſt in Fig. 138 (Taf. 22) wieder F E der Grundriß einer Fenſteröffnung, das Viereck D C in der Mitte derſelben der Grundriß des lothrechten Pfoſtens des Fenſterkreuzes, P R der Grundriß eines ſchmalen Prismas, deſſen Schlagſchatten auf den Fußboden fällt, ſo begrenzen wieder die den beiden Punkten F und E entſprechenden Schlagſchatten e P R ε und φ R P f den (Halb-) Schattenraum, und das Stück P q R, in welchem ſich dieſe beiden äußerſten und alle anderen Schlagſchatten decken, iſt der Kernſchatten. Denkt man ſich nun, des beſſeren Verſtändniſſes wegen, die beiden als leuchtend anzuſehenden Hälften des Fenſters je in eine Anzahl gleicher leuchtender Theile zerlegt — jede etwa in drei, wie ſie in der Figur durch die Nummern von 1 bis 6 bezeichnet vorliegen — und erwägt, in welcher Weiſe jeder einzelne leuchtende Theil erhellend auf den Schlagſchattenraum wirkt, ſo ergiebt ſich z. B.

hinſichtlich des dem Theile 1 entſprechenden Schlagſchattens e P R α, daß in ihm zunächſt das Stück a P R ε gewiſſermaßen als Schattenkern und die Stücke e P a und α R ε als Halbſchatten anzuſehen ſind; daß ferner auf ihn das Licht der anderen 5 Fenſtertheile ihrer Reihenfolge entſprechend mehr und mehr erhellend in der Art wirkt, daß das Licht des zweiten Fenſtertheiles außer dem ganzen Halbſchatten e P a und dem Stück ε b¹ b des andern Halbſchattens α R ε, von ſeinem Schattenkerne a P R ε das Stück a P b¹ ε erhellt, und endlich, daß das Licht des dritten Fenſtertheiles, abgeſehen von ſeiner Wirkung auf die genannten Halbſchatten, vom Schattenkerne auch noch das Stück b¹ P c¹ erhellt. Durch das Fehlen des Lichtes zwiſchen C und D wird die regelmäßige Folge erhellend wirkender Fenſtertheile plötzlich unterbrochen, und markirt ſich die Unterbrechung zum Theil im Halbſchatten ε R α, beſonders auffallend aber im Schattenkerne durch die dunkle Stelle c¹ P d¹. Durch die von der Grenze D des vierten Fenſtertheiles an wieder eintretende Lichtwirkung wird wieder das Stück d¹ P l¹ auffallend erhellt u. ſ. w.

Die Dunkelheit in dieſem — ſo zu ſagen — zweiten Kernſchatten c¹ P d¹ iſt bei c¹ P neben dem Stücke a P c¹ ε, welches dem vorhergehenden Paragraphen nach heller ſein muß, als das Stück d¹ P q, am ſtärkſten. Der Fortgang dieſes Kernſchattens, deſſen Dunkelheit über c¹ d¹ hinaus plötzlich abnimmt, durch die dem zweiten und dritten Fenſtertheile entſprechenden Schlagſchatten hindurch iſt wie ſein Anfang zu erklären. Selbſtverſtändlich gilt das, was von dem zweiten Kernſchatten c P d geſagt iſt, auch für den andern, entſprechend gelegenen Kernſchatten γ R δ.

Hinſichtlich des mittlern Theiles d P R γ des Geſammtſchattens iſt anzuführen, daß derſelbe mindeſtens ebenſo hell wie die Schattenmitte in Fig. 137 erſcheinen muß, da er von dem Vorhandenſein oder der Aufhebung des Lichtes zwiſchen C und D gänzlich unbetroffen bleibt, während der übrige Theil des Geſammtſchattens durch das Fehlen des Lichtes zwiſchen C und D um 1/7 ſchwächer erhellt wird, als er es ſein würde, wenn C D leuchtete.

§. 485. Daß die dem atmoſphäriſchen Lichte entſprechenden Schatten,

beſonders in einiger Entfernung vom Schatten werfenden Objecte, ſehr unbeſtimmt begrenzt ſind, in jedem Falle viel mehr, als ſie in den hierzu gehörigen Figuren der Deutlichkeit wegen haben vorgeführt werden müſſen, lehrt die oberflächlichſte Beobachtung. Ein weiteres Eingehen auf die feineren Dunkelheits-Abſtufungen dieſer Schatten, bei denen es wegen der Contraſte überhaupt ſchwer iſt, ſubjective Wahrnehmungen von objectiven ſtreng zu unterſcheiden, ſowie den Verſuch, die an den Grenzen der Geſammtſchatten und der zweiten Kernſchatten vorkommenden hellen Streifen, vielleicht durch Inflexion, zu erklären, läßt die Allgemeinheit des hier gewählten Beiſpieles nicht zu; es bedürfte dazu eines beſtimmter hingeſtellten Falles, da auf die Bildung der feineren Schattenabſtufungen viele Umſtände zugleich — wie etwa die Geſtalt und Größe des Fenſters ſowohl, als des Objectes, die Entfernung des letztern vom Fenſter, ſein Ort mitten vor dem Fenſter oder ſeitlich davon u. dgl. m. — von Einfluß ſind. Nach den gegebenen Andeutungen darf hier füglich von weiteren Erörterungen abgeſehen und auf die Beobachtung der Natur ſelbſt verwieſen werden.

Beiſpiel 51.

Aufgabe. Es iſt in Fig. 139 (Taf. 22) die Perſpective (P Hauptpunkt) des Innern eines **Zimmers** gegeben, welches durch das durch ein Fenſter ohne Kreuz eindringende **atmoſphäriſche Licht** erleuchtet wird — es ſollen die Schattenperſpectiven der **Fenſterwand** ſelbſt und der in dem Zimmer befindlichen Objecte, eines **Tiſches** und eines **Schrankes**, conſtruirt werden. §. 486.

Ausführung. Wie §. 482 hervorhebt, iſt in Bezug auf jeden einzelnen Punkt eines Objectes das durch ein eckiges Fenſter eindringende Licht als in einer Lichtpyramide kommend aufzufaſſen, deren Spitze der Punkt und deren Baſis die Fenſteröffnung iſt, und entſpricht dieſer Lichtmaſſe hinter dem Punkte eine Schattenpyramide, deren Spitze wieder der Punkt ſelbſt iſt und deren Baſis die Schatten fangenden Flächen des Zimmers enthalten, ſo, wie in der Figur die Wandfläche rechts in dem durch die Punkte r^1, r^2, r^3 und r^4 gebildeten Vierecke die Baſis der Schattenpyramide des Eckpunktes R des Tiſches enthält. Da die Lage §. 487.

dieſer Punkte genau der der vier Eckpunkte 1, 2, 3 und 4 der äußern Fenſteröffnung entſpricht, ſo ſind letztere als weſentlich beſtimmend für die Geſtaltung der Schatten überhaupt und demnach auch für die Conſtruction der Perſpectiven derſelben anzuſehen, ſo daß bei letzterer vornehmlich die dieſen Punkten entſprechenden Schatten ins Auge zu faſſen ſind.

Demgemäß ergeben Linien (Strahlen), von dieſen Eckpunkten die Fugen des Fenſtergewändes entlang gezogen, wie $2\,B\,b^2$, $3\,C\,c^3$ u. ſ. w., vermittelſt ihrer Schnittpunkte b^2, c^3 u. ſ. w. mit den Schatten fangenden Zimmerflächen hierauf zunächſt die durch die Figur $b^2\,u\,c^3\,d^4\,v\,a^1$ bezeichnete Stelle, welche von den wenigſten Halbſchatten getroffen wird und deshalb im Ganzen am hellſten erleuchtet iſt.

Um nun die den vier Eckpunkten der Fenſteröffnung entſprechenden Schatten von irgendwelchen Punkten zu conſtruiren, werden die Fußpunkte von dieſen ſowohl, als von jenen, auf den Schatten fangenden Flächen wie bei den anderen Schattenconſtructionen verwendet. In der Figur ſind die (Licht-) Fußpunkte von jenen auf der verlängert gedachten Ebene des Fußbodens F^1 und F^2, auf der Ebene der Decke F^7 und F^5, und auf der Ebene der Wand im Hintergrunde F^4 und F^3.

§. 488. Außer der eben bezeichneten hellſten Stelle ſind die Flächen des Zimmers überall mehr oder minder durch Halbſchatten verdunkelt, welche die Fenſterwand verurſacht; die Stellen aber im Zimmer, in welchen ſich ſämmtliche Halbſchatten decken und einen Kernſchatten bilden, ergeben ſich folgendermaßen: Eine von dem (Licht-) Fußpunkte F^1 durch den Fußpunkt γ der lothrechten Kante $B\gamma$ bis an die Hinterwand gezogene Linie $\gamma\,w$ und eine durch w gezogene Lothrechte $w\,x$ ergeben den Schlagſchatten der Kante $B\gamma$ auf dem Fußboden und der Hinterwand; eine von F^7 durch β gezogene Linie $\beta\,x$ ergiebt den Fortgang dieſes Schattens über die Decke. Dem entſprechend ſind die theils auf den Fußboden, theils über die Decke fallenden Stücke des Schlagſchattens der lothrechten Kante $A\delta$ zu finden. — Der Schatten $a^3\,b^4$ der innern horizontalen Kante AB des Fenſterſturzes an der Decke wird gefunden, wenn man von F^5 durch β eine Linie zieht, dieſelbe durch einen Strahl, von 3 durch B gezogen, in b^3 ſchneidet und dann $a^3\,b^4$ durch b^3 perſpectiviſch parallel AB, d. h. in P verſchwindend, zieht. a^3 iſt darin der Schatten des Punktes A, b^4 der des Punktes B. — Den über das Fenſtergewände fallenden Schatten $C\,e$ der Kante CD der Brüſtung ergiebt eine von Punkt 2 durch C gezogene Linie. Schneidet man mit derſelben Linie eine von F^2 durch γ gezogene in e^2 und zieht $e^1\,f^2$ durch e^2 perſpectiviſch parallel CD, ſo iſt dies der Fortgang deſſelben Schlagſchattens über den Fußboden, und der Punkt e^1 darin

der Schlagſchatten des Punktes e, welchen der bei dem Eckpunkte 1 der Fenſteröffnung durchkommende Lichtſtrahl verurſacht.

§. 489. Um den Schatten der Tiſchplatte, deren Dicke als unerheblich vernachläſſigt werden mag, zu finden, werden, nachdem die Projectionen m°, l°, r° und g° ihrer Eckpunkte auf dem Fußboden feſtgeſtellt worden, die je vier Schatten der einzelnen Eckpunkte der Tiſchplatte, wie dieſelben den vier Eckpunkten der Fenſteröffnung entſprechen, conſtruirt, indem man, um z. B. die vier Schatten r^4, r^3, r^2 und r^1 des Punktes R zu finden, von den Licht-Fußpunkten F^1 und F^2 Linien $r^\circ\varrho$ und $r^\circ\nu$ durch die Projection r° zieht und dann durch ϱ und ν lothrecht gezogene Linien durch Strahlen ſchneidet, welche von den vier Eckpunkten der Fenſteröffnung durch R gehen. In der Figur tragen die Schattenpunkte außer dem Buchſtaben des Schatten werfenden Punktes der Tiſchplatte auch die Ziffer des Eckpunktes der Fenſteröffnung, dem ſie entſprechen. Verbindet man die entſprechenden Schattenpunkte durch Linien — wobei man die Richtungen von Linien, wie $l^4 m^4$ und $l^1 m^1$, dadurch controliren kann, daß man den Fußpunkt λ der Schatten werfenden Tiſchkante ML auf der Wand rechts feſtſtellt, und von λ durch l^4 und l^1 zieht — ſo erzielt man in den vier Vierecken $l^4 r^4 g^4 m^4$, $l^3 r^3 g^3 m^3$, $l^1 r^1 g^1 m^1$ und $l^2 r^2 g^2 m^2$ die Schlagſchatten der Tiſchplatte, welche ſich in den beiden Vierecken $l^3 r^4 g^4 m^3$ und $l^2 r^1 g^1 m^2$, den beiden Kernſchatten, decken. Die Dunkelheit dieſer Kernſchatten iſt in der Nähe ihrer einander zunächſt liegenden Seiten $m^3 g^4$ und $l^2 r^1$ am ſtärkſten. Wäre die Fenſteröffnung weniger hoch, ſo würden die beiden Schatten zu einem einzigen, noch dunkleren, vereinigt ſein. — Tangenten, aus den Licht-Fußpunkten F^1 und F^2 an den runden Tiſchfuß gezogen, ergeben die Schatten deſſelben auf dem Fußboden; ihre Fortſetzung auf der Wand rechts iſt lothrecht.

§. 490. Bei der Conſtruction der vier auf die Hinterwand fallenden Schatten des Schrankes iſt daran zu denken, daß derſelbe nicht von dem Lichte erreicht werden kann, welches an der Grenze 2. 3 der Fenſteröffnung eindringt, weil dieſes Licht durch das Fenſtergewände bis zur Kante B γ abgefangen wird. Für die lothrechte Kante HJ des Schrankes iſt vielmehr die Kante B γ ſelbſt, oder in der äußern Fenſteröffnung die Linie 5. 6 (Fußpunkt F^6 auf der Ebene des Fußbodens) die Lichtgrenze, und zwar ergiebt ſich dieſe in einer lothrechten Linie, welche durch den Schnittpunkt F^6 einer von J durch γ gezogenen Linie mit der $F^1 F^2$ gezogen wird. So iſt auch für die lothrechte Kante NQ des Schrankes die Linie 7. 8, die durch den Punkt F^8 geht, in welchem eine von Q durch γ gezogene Linie die $F^1 F^2$ ſchneidet, die Lichtgrenze. Demnach ſind denn h^4, h^6, h^5

und h^1 die Schatten des Punktes H, welche den einzelnen bei 4, 6, 5 und 1 eindringenden Strahlen entsprechen, n^8, n^7, n^1 und n^4 aber die Schatten des Punktes N, welche den einzelnen bei 8, 7, 1 und 4 eindringenden Strahlen entsprechen. Daß von den nunmehr zu ziehenden Schlagschattengrenzen die beiden $h^6 n^8$ und $h^5 n^7$, obgleich sie Schatten der horizontalen Kante H N auf der ihr parallelen Hinterwand sind, nicht parallel mit H N, sondern schief sind, darf nicht befremden, da hier der Schatten jedes einzelnen Punktes der Kante H N — weil einem solchen stets eine andere Lichtgrenze, als 7. 8 und 5. 6 sind, entspricht — ein den Vierecken $h^4 h^6 h^5 h^1$ und $n^4 n^8 n^7 n^1$ ähnliches Viereck bilden muß, worin immer die der Lichtgrenze 1. 4 entsprechende Seite gleich lang, die der veränderlichen Lichtgrenze aber entsprechende Seite, je weiter der Schatten werfende Punkt selbst nach N zu liegt, desto länger ist.

Von dem Gesammtschatten des Schrankes, welcher von der gebrochenen Linie h h^6 n^8 p Q eingeschlossen ist, sind mit Ausnahme der von der gebrochenen Linie n n^1 o Q eingeschlossenen Stelle, welche, weil sie von allem Lichte ausgeschlossen ist, Kernschatten hat, alle übrigen Theile mehr oder weniger zu Halbschatten aufgehellt, unter denen jedoch die von den gebrochenen Linien h h^4 n^4 o Q und n n^7 p Q eingeschlossenen sich durch stärkere Dunkelheit besonders bemerklich machen.

Einundzwanzigstes Kapitel.

Construction der Schattenperspectiven auf der horizontalen ebenen Bildfläche.

§. 491. Da aus der Construction der Perspectiven der dem Sonnenlichte entsprechenden Schatten sich die Constructionen der den anderen Lichtgattungen entsprechenden Schatten leicht herleiten lassen, wird es genügen, in diesem Kapitel sowohl, wie in den beiden folgenden, ausschließlich das Sonnenlicht in Betracht zu nehmen.

Das Verfahren hierbei richtet sich genau nach den für die lothrechte Bildebene aufgestellten Regeln, und muß nur die Bezeichnung des Sonnenstandes der veränderten Stellung der Bildebene entsprechend geändert werden.

Sollte z. B., um an die in §. 366 ausgeführte Conſtruction §. 492.
auf der horizontalen ebenen Bildfläche anzuknüpfen, in jener Fig. 100 (Taf. 18) der Sonnenpunkt, bei Annahme der Sonne als vor dem Beſchauer 64° über dem Horizonte und 35° links von der in der Conſtruction angenommenen Verticalebene ſtehend, beſtimmt werden, ſo würde dieſe Angabe des Sonnenſtandes, bei der hier vorausgeſetzten Lage der Bildebene, in Bezug auf die Verticalebene feſtzuhalten, in Bezug aber auf den (Erd-) Horizont dahin anders zu faſſen ſein, daß die Sonne, wenn als 64° über dem Horizonte, dadurch als 26° unterhalb des Zenithes ſtehend, deſſen Perſpective in der Conſtruction mit dem Punkte P zuſammenfällt, gegeben ſei.

Es iſt demnach links an die Verticale P O in O der Winkel von 35° anzutragen, die Grenzlinie s ω dadurch in s zu ſchneiden und die Länge s O um s in dieſelbe Grenzlinie in s ω zu übertragen; es iſt ferner unterhalb der Grenzlinie in ω der Winkel von 26° anzutragen und eine durch s parallel der Verticale gezogene Linie dadurch in S, welcher der geſuchte Sonnenpunkt iſt, zu ſchneiden. Da in der Figur der herabgeſchlagene Geſichtspunkt O unten außerhalb des Conſtructionsraumes liegt, iſt zur Feſtſtellung der Punkte s und ω die halbe Diſtanz P $O_{/2}$ derart zu verwenden, daß man an P $O_{/2}$ in $O_{/2}$ den Winkel von 35° anträgt, die Grenzlinie s ω in $s_{/2}$ ſchneidet, die Länge $s_{/2}$ $O_{/2}$ um $s_{/2}$ in dieſelbe Grenzlinie in $s_{/2}$ $\omega_{/2}$ überträgt und dann P ω gleich 2 mal P $\omega_{/2}$, und P s gleich 2 mal P $s_{/2}$ macht.

Sollte hiernach der auf die über C L befindliche Wand fallende §. 493.
Schlagſchatten τ t des in derſelben Wand ſteckenden, zu ihr normalen Stabes τ T conſtruirt werden, ſo iſt vom Sonnenpunkte S aus eine τ T parallele Lichtachſe S F gegen die Grenzlinie jener Wandebene, d. i. die Verticale, zu ziehen, wonach F der Sonnen-Fußpunkt auf der Wandebene iſt. Eine von F durch τ gezogene Linie τ t, in t durch den Strahl S T abgeſchnitten, iſt dann der geſuchte, hier hinter den Geſimsvorſprung fallende Schlagſchatten.

Zweiundzwanzigſtes Kapitel.

Conſtruction der Schattenperſpectiven auf der ſchiefen ebenen Bildfläche.

§. 494. Für die Conſtruction der Perſpective des Sonnenpunktes iſt die Anleitung aus den für die Conſtruction der Perſpectiven ſchiefer Ebenen geltenden Regeln zu entnehmen.

Sollte z. B., um wieder an die in §. 369 ausgeführte Conſtruction anzuknüpfen, in der entſprechenden Fig. 102 (Taf. 18) bei Annahme der Sonne als vor der Bildebene 15° links der Verticalebene und 25° über dem Horizonte ſtehend, der auf die Hausfaçade fallende Schlagſchatten ρ r eines oben an der Thür horizontal in der Façade ſteckenden Stabes ρ R conſtruirt werden, ſo findet man dazu den Strahlen-Verſchwindungspunkt der Sonne folgendermaßen:

Dem gegebenen Sonnenſtande nach muß dieſer Punkt in der Grenzlinie einer lothrechten, durch das Auge gehenden Ebene, die 15° nach rechts von der Verticalebene abweicht, und zwar darin 25° unter der Grenzlinie der horizontalen Ebenen liegen. Die Grenzlinie der lothrechten Ebene wird am einfachſten gezogen durch die Verſchwindungspunkte zweier der Ebene angehörigen, zu einander normalen Linien, am beſten einer lothrechten und einer horizontalen Linie; und zwar iſt, wenn man an h o in o den Winkel von 15° anträgt und die Grenzlinie D D¹ der horizontalen Ebenen in x ſchneidet, dieſer der Verſchwindungspunkt für die horizontale Linie, der ſchon vorhandene Punkt l aber der Verſchwindungspunkt für die lothrechte Linie, demnach l x die Grenzlinie (H Hauptpunkt, ω herabgeſchlagener Geſichtspunkt), in welcher der Strahlen-Verſchwindungspunkt zu ſuchen iſt. Derſelbe findet ſich, wenn man zunächſt die Linie ω x zieht und an dieſelbe unterhalb in ω den Winkel von 25° anträgt, in dem hierdurch erzielten Schnittpunkte (S).

Um nun den Schlagſchatten des horizontalen Stabes ρ R zu finden, zieht man von (S) aus eine dem letztern parallele, alſo ebenfalls durch h gehende Lichtachſe (S) F gegen die Grenzlinie d l

der Ebene der Hauptfaçade, wonach F der Sonnen-Fußpunkt für letztere, und eine von F durch ϱ gezogene Linie ϱ r, durch den Strahl (S) R in r abgeschnitten, der gesuchte Schlagschatten ist.

Dreiundzwanzigstes Kapitel.

Construction der Schattenperspectiven auf der cylindrisch gekrümmten (Panorama-) Bildfläche.

Die Construction der Schattenperspectiven entspricht vollkommen §. 495.
dem bei der Construction der Perspectiven der Objecte selbst eingeschlagenen Verfahren. Hat man hierbei die Grundriß-Methode angewandt, so muß man, um diese durchzuführen, die Schlagschattengrenzen der Objecte, oder doch Punkte derselben, zuvor im Grund- und Aufrisse geometrisch feststellen und dann deren Perspectiven in derselben Weise auf die Bildfläche übertragen, wie die Perspectiven der Objecte selbst. Doch kann man bei der Construction der Schattenperspectiven nachträglich mit Vortheil in die Verschwindungspunkt-Methode übergehen, ohne hierbei Schwierigkeiten zu fürchten zu haben, da ja die Anwendung der Grundriß-Methode die Brechung der ganzen Bildfläche in einzelne Theile ebenfalls voraussetzt. Zudem sind schließlich, wie das folgende Beispiel zeigen wird, erhebliche Vortheile in einer Verbindung beider Methoden zu finden.

Auch hier wird es genügen, ausschließlich das Sonnenlicht in Betracht zu nehmen.

Da die mehreren sich an einander reihenden Bildebenen, in §. 496.
welche die cylindrische Panoramafläche beim Construiren zerlegt wird, nach einander die verschiedenen möglichen Stellungen zum Sonnenpunkte einnehmen, so müssen, wie sich am deutlichsten aus einem Beispiele ersehen läßt, bei der Construction der Schattenperspectiven die in dem Kapitel über Sonnen- und Mondlicht getrennten, dem Stande der Sonne innerhalb, vor oder hinter der Bildebene entsprechenden Constructionsarten zugleich zur Anwendung kommen.

Beiſpiel 52.

§. 497. **Aufgabe.** Es iſt in Fig. 140 (Taf. 24) in den Figuren I, II, IV, V, VI und dem Kreiſe III wieder der Grundriß des **Stadttheiles**, welcher ſchon im Beiſpiele 38 zum Theil vorgeführt worden, und in dem Kreiſe um O der Grundriß der cylindriſchen Bildfläche gegeben. In Fig. 141 iſt auf der zur Ebene abgewickelt vorliegenden, in 12 Bildebenen zerlegten Panoramafläche die Perſpective jenes Stadttheiles im doppelten Maßſtabe des Grundriſſes gegeben — es ſollen die Schattenperſpectiven der gegebenen Objecte conſtruirt werden unter Annahme der **Sonne** als 45° hoch in der lothrechten Ebene ſtehend, deren Grundriß-Projection in Fig. 140 die Linie (N)(S) iſt.

§. 498. **Ausführung.** Aus dem Grundriſſe iſt zu erſehen, daß dem in O ſtehenden Beſchauer von der einen Hälfte der Objecte die Schattenſeiten, von der andern Hälfte die beleuchteten Theile zugewandt ſind, und daß dem entſprechend der Stand der Sonne zu den einzelnen der zwölf Bildebenen, in welche die Panoramafläche zerlegt iſt, folgendermaßen zu bezeichnen iſt:

Die Sonne ſteht:

hinter der 8. Bildebene und zwar in der Verticalebene derſelben,
hinter der 7. und 9. Bildebene, 30° von deren Verticalebenen abweichend,
hinter der 6. und 10. Bildebene, 60° von deren Verticalebenen abweichend,
innerhalb der 5. und 11. Bildebene, mit denen ihre Strahlen parallel ſind,
vor der 4. und 12. Bildebene, 60° von deren Verticalebenen abweichend,
vor der 3. und 1. Bildebene, 30° von deren Verticalebenen abweichend,
vor der 2. Bildebene, innerhalb der Verticalebene derſelben.

Nach dieſer Feſtſtellung iſt in Fig. 141, der in dem Kapitel 19 gegebenen Anleitung gemäß, zu jeder einzelnen Bildebene der Ort des Sonnenpunktes oder des Strahlen-Verſchwindungspunktes nebſt dem entſprechenden Sonnen-Fußpunkt für horizontale Ebenen zu conſtruiren. Das darſtellbare perſpectiviſche Bild S^8 der Sonne ſelbſt fällt dabei in die 8. Bildebene. Es wird dadurch ermittelt, daß man an den Horizont in dem Diſtanzpunkte D der 8. Bildebene den gegebenen Höhenwinkel der Sonne von 45° anträgt und die Verticale derſelben Bildebene in S^8 ſchneidet. Die 2. Bildebene, in welche der entſprechende Strahlen-Verſchwindungspunkt fällt, ausgenommen, liegen für alle übrigen Bildebenen die zugehörigen Sonnenpunkte ſeitlich außerhalb ihrer Grenzen. So fällt z. B. der Sonnenpunkt für die 7. Bildebene in die 8. Bildebene. Um

ihn feſtzuſtellen, wird an die Verticale der 7. Bildebene in O^7 der Abweichungswinkel der Sonne von 30° rechts angetragen, der Horizont in F^7 geſchnitten, durch F^7 die lothrechte Lichtachſe gezogen, es wird das Maß $F^7 O^7$ um F^7 in den Horizont in $F^7 \omega$ übertragen, an den Horizont in ω der Höhenwinkel der Sonne von 45° angetragen und die Lichtachſe in S^7 geſchnitten, wonach dies der geſuchte Sonnenpunkt, F^7 aber der Sonnen-Fußpunkt dazu iſt u. ſ. w. — In entſprechender Weiſe ſind die durch den Buchſtaben N bezeichneten Strahlen-Verſchwindungspunkte für die 4., 12., 3., 1. und 2. Bildebene conſtruirt. — In der Figur bezeichnen die den Punkten P, O, S, F und N beigefügten Ziffern je die Ziffer der Bildebene, welcher jene Punkte zugehören.

Den runden Thurm ausgenommen, ſind die im Schatten befindlichen Flächen der gegebenen Objecte bei einem Vergleiche ihrer Richtung mit der der Strahlen ohne Schwierigkeit ſogleich zu erkennen. Um ihre Schlagſchatten zu conſtruiren, wird auf jeder einzelnen Bildebene mit den ihr entſprechenden Theilen der Objecte ſo verfahren, wie dies in Kap. 19 gezeigt iſt. Um z. B. die Schlagſchatten-Perſpective $c^\circ c^1$ der auf die 3. Bildebene fallenden Perſpective $c^\circ c$ der lothrechten Kante C des Stadttheiles II zu conſtruiren, wird von c° eine Linie nach dem Sonnen-Fußpunkte F^3 gezogen und dieſelbe durch einen Strahl, von c nach dem Strahlen-Verſchwindungspunkte N^3 gezogen, in c^1 geſchnitten, u. ſ. w.

Um an dem runden Thurme III, deſſen Perſpective größtentheils die 7. Bildebene enthält, den Object- und danach ſeinen Schlagſchatten zu conſtruiren, wird aus dem Sonnen-Fußpunkte F^7 eine Tangente an die Grundfläche des Thurmes gezogen, und iſt dann die durch den Berührungspunkt a° gehende Cylinderſeite $a^\circ a$ die Objectſchattengrenze. Die in einer gebrochenen Linie über die benachbarten Bildebenen fallende Schlagſchattengrenze findet man ſtückweiſe, wenn man die eben gezogene Tangente bis a^4 in der Grenze der 6. Bildebene verlängert; dann, da hier der Schlagſchatten in die 6. Bildebene tritt, jene Linie über dieſe fortſetzt, indem man vom Sonnen-Fußpunkte F^6 durch a^4 bis a^3 in der Grenze der 5. Bildebene zieht; hierauf, da die 5. Bildebene den Sonnenſtrahlen parallel iſt, $a^3 a^2$ horizontal, d. h. nach dem in unendlicher Entfernung liegenden Sonnen-Fußpunkte F^5 gerichtet zieht, und endlich von a^2, wo der Schatten in die 4. Bildebene tritt, nach ihrem Sonnen-Fußpunkte F^4 zieht. Um die Länge dieſer gebrochenen Schlagſchattenlinie, d. h. in ihr den Schlagſchatten a^1 des Punktes a zu beſtimmen, wird dem Vorigen entſprechend vom Sonnenpunkte S^7 der 7. Bildebene ein Strahl durch a bis a^7 gezogen, derſelbe über die 6. Bildebene fortgeſetzt, indem man

vom Sonnenpunkte S^6 dieſer Bildebene durch a^7 bis a^6 zieht; darauf wird über die 5. Bildebene, deren Sonnenpunkt F^5 in unendlicher Entfernung 45° über dem Horizonte liegt, ein durch a^6 gehender, vom Horizonte um 45° abweichender Strahl $a^6 a^5$ gezogen und dieſer von a^5 aus nach dem Strahlen-Verſchwindungspunkte N^4 der 4. Bildebene über dieſe fortgeſetzt, bis er die vorher conſtruirte gebrochene Schlagſchattenlinie, und zwar in a^1 ſchneidet. — Ebenſo wird an dem Theile der Thurmperſpective, welcher auf der 6. Bildebene liegt, an die dem Beſchauer abgewandte Hälfte der unteren Grundfläche eine Tangente aus dem Sonnen-Fußpunkte F^6 gezogen und dadurch die Cylinderſeite $b^\circ b$ beſtimmt, in welcher die Objectſchattengrenze liegt. Die entſprechende Schlagſchattengrenze wird gefunden, wenn man wieder die Tangente bis b^4 verlängert, wo der Schlagſchatten die lothrechte Vorderfläche des Stadttheiles II trifft, an dieſer $b^4 b^3$ lothrecht empor-, und dann abermals von F^6 durch b^3 bis b^2 zieht. $b^2 b^1$ auf der horizontalen Dachfläche iſt dann wieder horizontal gerichtet. b^1, der Schlagſchatten von b, wird wieder beſtimmt, wie vorher a^1, indem man von S^6 einen Strahl durch b bis b^5, und ſeine Fortſetzung $b^5 b^1$ um 45° vom Horizonte abweichend zieht. — Hiernach ſind a^1 und b^1 Schlagſchatten der Punkte a und b der oberen Grundfläche des Thurmes. Die Schlagſchatten anderer Punkte derſelben, wie z. B. e^1, werden wie a^1 und b^1 ermittelt.

§. 499. Das hier angewandte Verfahren — welches entweder nur geradlinig begrenzte Schlagſchatten ergiebt, während dieſe hier doch von Curven begrenzt ſein ſollen, welche, wie auch die Strahlen ſelbſt, der Sinuslinie ähnlich ſind, oder aber die Zerlegung des Panoramacylinders in eine ſehr große Anzahl ebener Bildflächen erfordern würde — kann zum Theil vereinfacht werden, wenn man, wie dies in der Figur bei den Stadttheilen IV und V vorgeführt iſt, im Grundriſſe zuvor die geometriſchen Projectionen der Schlagſchatten darſtellt und dann die Perſpectiven q, m, t, l, k, v, h, i, u u. ſ. w. von günſtig gelegenen Punkten Q, M, T u. ſ. w. der Grenzen derſelben nach der Grundriß-Methode conſtruirt, wodurch man die Krümmung jener Curven zugleich ſicherer feſtſtellt.

Vierundzwanzigſtes Kapitel.

Hülfsconſtructionen.

§. 500. Die Anwendung von Hülfsconſtructionen in den Fällen, wo der Sonnenpunkt und ſein Fußpunkt außerhalb des Conſtructionsraumes

liegen, ist so umständlich, daß es fast immer vorzuziehen ist, die ganze Construction zuvor in kleinerem Maßstabe auszuführen und hernach in die erforderte Größe zu übertragen. Wo dies aber durchaus umgangen werden soll, finden sowohl hinsichtlich der nach dem Sonnenpunkte gerichteten Strahlen, als der nach dem Sonnen-Fußpunkte gerichteten Hülfslinien und Schlagschattengrenzen die in dem Abschnitte C des Kapitels 5 gezeigten Hülfsconstructionen Anwendung. Für anderweitige Hülfsconstructionen können die folgenden Paragraphen bei der großen Zahl der Möglichkeiten nur einige Fingerzeige bieten.

§. 501. Ist CE in Fig. 142 (Taf. 21) ein lothrechter Stab, dessen Schlagschatten C e auf der Grundebene gesucht werden soll unter der Annahme, daß die Sonne 46° rechts der Verticalebene und 30° über dem Horizonte hinter der Bildebene stehe, daß aber der Sonnenpunkt S und sein Fußpunkt F auf der Grundebene außerhalb des Constructionsraumes liege, so kann man in Ermangelung des Fußpunktes F die perspectivische Richtung des Schlagschattens dadurch feststellen, daß man, da derselbe dem Stande der Sonne nach um 46° von der Verticale, d. i. um 44° von der Bildebene abweichen muß, an eine durch C gelegte, der Grundlinie parallele Linie C ε den Winkel von 44° trägt, die zur Bildebene normale Tangente h g desselben in h i (h γ geometrisch gleich h g gemacht) perspectivisch darstellt und eine Linie von C durch i zieht. Da man nun die perspectivische Länge dieses Schlagschattens hier nicht durch einen Strahl abschneiden kann, so stellt man sie zuvor dadurch in C ε geometrisch fest, daß man den Complementwinkel von 60° zu dem gegebenen Höhenwinkel der Sonne an C E in E anträgt und dadurch C ε in ε schneidet, und überträgt sie dann, da hier ω, der herabgeschlagene Gesichtspunkt zu der Grenzlinie (Lichtachse) S F, zugleich der Theilpunkt zu den in F verschwindenden Linien ist, durch eine von ω durch ε gezogene Linie perspectivisch in C e.

§. 502. Will man aber dem Verfahren treu bleiben, welches in Kap. 19 bei der Construction der dem Sonnenlichte entsprechenden Schatten gezeigt worden, so kann man den außerhalb des Constructionsraumes fallenden Sonnenpunkt und seinen Fußpunkt für je eine Schatten

werfende Linie durch näherliegende Punkte erſetzen, wenn man dabei Folgerungen aus dem Inhalte des §. 120 benutzt.

Iſt z. B. A B in derſelben Fig. 142 ein lothrechter Stab, deſſen über die Grundebene fallender Schlagſchatten A b bei demſelben Sonnenſtande, wie vorher, conſtruirt werden ſoll, ſo zieht man B P und A P, theilt auf einer von ihnen, etwa auf B P, einen beliebigen Bruchtheil ihrer Länge, etwa ein Drittel, in B β geometriſch ab und zieht durch β eine der Verticale parallele Linie α β, und durch α und β dem Horizonte parallele Linien o φ und α f. Trägt man darauf auf der verlängerten β α in β O_3 gleichfalls ein Drittel der gegebenen Diſtanz (P O) auf, trägt man ferner an β O_3 in O_3 den 46° großen Abweichungswinkel der Sonne von der Verticalebene an und ſchneidet dadurch o φ in φ, macht man darauf φ o geometriſch gleich φ O_3, legt an erſtere in o den 30° großen Höhenwinkel der Sonne und ſchneidet dadurch eine durch φ gezogene Lothrechte in s, ſo iſt dies ein den Sonnenpunkt S erſetzender Punkt, um den Strahl B b ziehen zu können. Der Schnittpunkt f aber von s φ und α f iſt der den Fußpunkt F erſetzende Punkt, um die Richtung A b des Schlagſchattens beſtimmen zu können.

Entſprechend der vorweg als ein Drittel von B P bezeichneten Länge B β ſind hier die erzielten Hülfspunkte s, φ und f aus einer Conſtruction hervorgegangen, in welcher bei der ſtets eingehaltenen Aehnlichkeit der Figuren alle Stücke ein Drittel der Größe und Länge haben, welche die gleichnamigen Stücke in der durch den Raum nicht beſchränkten Conſtruction haben.

§. 503. Im Anſchluſſe an dieſes Verfahren ſind denn auch die Schlagſchatten ſchiefer Linien zu ermitteln.

Soll z. B. in Fig. 143 (Taf. 23) bei dem Stande der Sonne hinter der Bildebene, 48° links der Verticalebene und 39° über dem Horizonte, zunächſt der Schlagſchatten des lothrechten Stabes A B auf der Grundebene conſtruirt werden, ſo iſt, wenn man wegen zu großer Entfernung der Punkte S und F das eben gezeigte Verfahren anwendet und dabei B β gleich der Hälfte von B P macht, der näher liegende Punkt s, um den Strahl B b ziehen zu können, und der Punkt f als ſein Fußpunkt für den Schatten des Stabes A B zu

benutzen. Handelt es ſich nun darum, den Schlagſchatten N b des ſchiefen, der Bildebene parallelen Stabes N B zu conſtruiren, ſo ergiebt — wie in der unbeſchränkten Conſtruction eine durch den Sonnenpunkt mit N B parallel gezogene Lichtachſe S F^1 im Punkte F^1 — in der beſchränkten Conſtruction eine durch s mit N B parallel gezogene Linie s f^1 in ihrem Schnittpunkte f^1 mit der Grundebene, d. i. mit der verlängerten α f, einen Punkt, welcher als Sonnen-Fußpunkt zu N B benutzt werden kann.

Soll in derſelben Figur der Schlagſchatten M b des doppelt- §. 504.
ſchiefen Stabes M B conſtruirt werden, der in M die Grundebene trifft und, einer lothrechten Ebene angehörend, deren Grenzlinie X H iſt, im Punkte X der letztern verſchwindet, ſo würde in der unbeſchränkten Conſtruction S X die Lichtachſe, und deren Schnittpunkt F^2 mit dem Horizonte der Sonnen-Fußpunkt ſein; es iſt demnach in der eingeſchränkten Conſtruction der Punkt x in der Lothrechten x h als Verſchwindungspunkt zu behandeln, und ergiebt eine von s durch x bis zum Punkte f^2 gezogene Linie in letzterem einen den Fußpunkt F^2 vertretenden Punkt, durch welchen von M aus M b gleichfalls gezogen werden kann.

Bei der Conſtruction der Schlagſchatten ſchief ſtehender Objecte §. 505.
auf engbegrenzter Conſtructionsfläche iſt es im Allgemeinen leichter, die Schatten einzelner Punkte derſelben vermittelſt lothrechter, bis an die Schatten fangende Ebene gezogener Linien zu ermitteln, ſo, wie in Fig. 124, Taf. 20 (§§. 440 und 441), die Conſtruction der Schattenpunkte b und b° vermittelſt der lothrechten Linien B β und B β° geſchehen iſt.

Sechster Abschnitt.

Construction der Perspectiven der Spiegelbilder.

Fünfundzwanzigstes Kapitel.

A. Ebene Spiegel.

§. 506. Die in §. 17 der Optik hervorgehobenen, den scheinbaren Ort der Spiegelbilder betreffenden Regeln:

1) die Rückwärtsverlängerung des reflectirten Strahles (Ausfallstrahles) bis zum Spiegelbilde ist gleich der Länge des einfallenden Strahles und bildet mit der Spiegelfläche denselben Winkel, welchen der einfallende Strahl mit ihr bildet,

2) das Spiegelbild liegt im Schnittpunkte des verlängerten Hauptstrahles mit der Rückwärtsverlängerung des reflectirten Strahles (Ausfallstrahles),

3) das Spiegelbild liegt in dem verlängerten Hauptstrahle so weit hinter der Spiegelfläche, wie der gespiegelte Punkt davor liegt,

geben ausreichenden Anhalt für das Verfahren bei der Construction der Perspectiven der Spiegelbilder.

§. 507. In den meisten Fällen, besonders bei ebenen Spiegeln, kann von dem bei der Spiegelung auf der Spiegelfläche selbst stattfindenden

Vorgange und von dem Operiren auf der Perſpective der Spiegelfläche abgeſehen, vielmehr die Perſpective des Spiegelbildes unter Berückſichtigung des Abſtandes des Objectes vom Spiegel ſo conſtruirt werden, als wäre ſie die Perſpective eines zweiten, gleichen, nur verkehrten Objectes hinter der Spiegelfläche.

Sind nun in Fig. 144 (Taf. 24) die Flächen B C E F und §. 508.
A B F G ſpiegelnde Wände, von denen die erſtere mit der Bildebene zuſammenfällt, während die zweite zu dieſer normal ſteht, wie in Fig. 145 (Taf. 24) der geometriſche Grundriß (A B normal zu B C) zeigt, und iſt ferner die Fläche A B C H ein ſpiegelnder Fußboden, und es ſollen die Perſpectiven der Spiegelbilder einer normal auf dem Fußboden ſtehenden dreieckigen Fläche J K L conſtruirt werden, ſo wird

1) das Spiegelbild auf dem Fußboden folgendermaßen ermittelt: Die Bilder der Punkte J und K, die ſelbſt in der Fußbodenebene liegen, fallen mit dieſen Punkten ſelbſt zuſammen. Um aber das Bild l^1 des Punktes L zu finden, verlängert man nach der in §. 506 unter 3) gegebenen Regel den Hauptſtrahl L K über K hinaus und macht die Verlängerung K l^1 gleich K L. Es liegen alsdann in der Linie K l^1 die Spiegelbilder aller zwiſchen K und L gelegenen Punkte, d. h. K l^1 iſt das Spiegelbild der Dreiecksſeite K L. Danach muß denn auch die Verbindungslinie zwiſchen J und l^1 das Spiegelbild der Seite J L, und das Dreieck J K l^1 das des Dreiecks J K L ſein.

2) Das Bild in dem mit der Bildebene zuſammen- §. 509.
fallenden Spiegel B C E F wird gefunden, wenn man zunächſt von dem Punkte K gegen den Spiegel den Hauptſtrahl, d. i. eine perſpectiviſch normale, in P verſchwindende Linie K m zieht und ihre Verlängerung m k^2 über m hinaus vermittelſt des Diſtanzpunktes perſpectiviſch gleich m K, nämlich dem aus Fig. 145 geometriſch entnehmbaren Abſtande des Punktes K von M, macht. Macht man alsdann noch auf gleiche Art k^2 i^2 perſpectiviſch gleich K J, ſo iſt k^2 i^2 das Spiegelbild von K J. Und errichtet man in k^2 eine Lothrechte, ſchneidet ſie durch eine von L nach P gezogene Linie in l^2 und verbindet l^2 mit i^2 durch eine Linie, ſo iſt das

Dreieck $i^2 k^2 l^2$ das Spiegelbild des gegebenen Dreiecks J K L auf der Wand B C E F.

§. 510. Conſtruirt man in Fig. 145 geometriſch das Spiegelbild $i^2 k^2$ von J K und zieht nach ihm die Geſichtslinien $O i^2$ und $O k^2$, ſo ſchneiden dieſe die Spiegelfläche in den Punkten v und u, welche auf letzterer die Projectionen der reflectirenden Punkte ſind. Der Abſtand dieſer Punkte von der Verticalebene iſt gleich dem normalen Abſtande der Punkte i^2 und k^2 von der Verticale in Fig. 144, weshalb man dieſe Punkte hier auch dadurch ermitteln kann, daß man die Maße P v und P u aus Fig. 145 in p v und p u der Fig. 144 überträgt und die verlängerte J K durch Linien ſchneidet, die lothrecht durch v und u gezogen werden.

§. 511. 3) Das Spiegelbild in der Wand A B F G (Fig. 144) wird dem Vorhergehenden entſprechend gefunden, wenn man gegen ſie perſpectiviſche Normalen, d. h. der Grundlinie parallele Linien J ι, K ϰ u. ſ. w. von den Punkten J, K und L aus zieht und deren Verlängerungen ι i, ϰ k u. ſ. w. hinter der Wand gleich den Abſtänden jener Punkte ſelbſt von der Wand macht.

§. 512. Das, der in §. 506 gegebenen erſten Regel entſprechende Verfahren, welches bei dieſem Beiſpiele umſtändlicher, jedoch bei weiter unten folgenden Conſtructionen, beſonders der Bilder im cylindriſchen Spiegel vortheilhaft iſt, wäre folgendes:

Nachdem man in dem geometriſchen Grundriſſe, Fig. 145, z. B. für K die Projection R des reflectirenden Punktes auf dem Spiegel A B feſtgeſtellt und in Fig. 144 in der Grundlinie A B deſſelben Spiegels die Perſpective r dieſes Punktes conſtruirt hat, iſt hier K r ein horizontaler Einfallſtrahl, deſſen Verſchwindungspunkt Z iſt. Trägt man nun den Winkel P O Z, um welchen dieſer Strahl von dem Spiegel A B F G, oder, was daſſelbe iſt, von der Verticalebene nach rechts abweicht, links an die Verticale und ſchneidet den Horizont in W, ſo iſt dies der Verſchwindungspunkt für den entſprechenden horizontalen, natürlich nicht in das Auge gehenden Ausfallſtrahl r s und ſeine Rückwärtsverlängerung r W. Mißt man darauf vermittelſt des Theilpunktes t: die Länge des Einfallſtrahles, ſo iſt er gleich r q, und überträgt man

r q nach links r q' und ſchneidet die Rückwärtsverlängerung r W durch eine nach dem Theilpunkte tw gezogene Linie q' tw in k, ſo iſt r k perſpectiviſch gleich K r gemacht und das Spiegelbild k von K vermittelſt des horizontalen Einfallſtrahles K r conſtruirt.

Die Perſpective des in das Auge reflectirten Einfallſtrahles, der an ſich eine ſchiefe Linie iſt, iſt K k; die Perſpective des wirklich in das Auge gelangenden Ausfallſtrahles nebſt ſeiner Rückwärtsverlängerung iſt der eine Punkt k; denn dieſer Ausfallſtrahl iſt, weil er nach dem Auge gerichtet iſt, eine ſchiefe Linie der in §. 43 erwähnten Art.

In gleicher Weiſe, durch die horizontalen Einfallſtrahlen J y und L λ und durch die der Verticale geometriſch parallelen Rückwärtsverlängerungen y i und λ l der entſprechenden Ausfallſtrahlen, ſind auch die Bilder i und l der Punkte J und L zu conſtruiren. Das entſprechende Verfahren bei der Conſtruction der Spiegelbilder in der Wand B C E F iſt ſchon in §. 510 angedeutet worden.

§. 513. Das in §. 512 vorgeführte Verfahren kürzt ſich bedeutend ab, wenn man, um die Meſſung des Einfallſtrahles K r und der Rückwärtsverlängerung r k zu umgehen, der in §. 506 gegebenen zweiten Regel folgt und r W ſofort durch die Verlängerung des Hauptſtrahles K x in k ſchneidet.

§. 514. Je nach der Auffaſſung kommen der Linie r W verſchiedene Geltungen zu:

1) kann man ſie als eine lothrechte Linie der Spiegelebene A B F G anſehen, und hat ſie dann, da in ihr die Reflexionspunkte der horizontalen Einfallſtrahlen K r und L λ und auch der in das Auge reflectirten Einfallſtrahlen K k und L l liegen, in Beziehung zu der Linie K L die Bedeutung der reflectirenden Linie des Spiegels;

2) kann man ſie als die Perſpective einer unendlich langen horizontalen Linie anſehen, nämlich als das Spiegelbild der unendlich langen horizontalen Linie r Z. Ihr Verſchwindungspunkt W iſt bei dieſer Auffaſſung das Spiegelbild des Verſchwindungspunktes Z;

3) kann man ſie als Spiegelbild der Grenzlinie (ſ. die folgende Nr. 4) Z e auffaſſen;

4) kann ſie als Grenzlinie der lothrechten Ebene angeſehen werden, die durch die Geſammtheit der nach dem Auge und der Standlinie hin reflectirten Ausfallſtrahlen und deren Rückwärtsverlängerungen gebildet wird, ſo wie andererſeits Z e als die Grenzlinie der lothrechten Ebene aufzufaſſen iſt, die durch die Geſammtheit der entſprechenden Einfallſtrahlen gebildet wird.

§. 515. Auf noch eine andere Art ſind die Spiegelbilder der Eckpunkte des Dreiecks J K L, z. B. das Bild k des Punktes K dadurch zu finden, daß man, nachdem vermittelſt einer beſondern geometriſchen Hülfsconſtruction, wie ſie in Fig. 146 (Taf. 24) vorliegt, zuvor ermittelt worden, um welchen Winkel das Bild k des Punktes K, der gegebenen Höhe des Auges wegen, gehoben erſcheinen müſſe, die Perſpective k nach der ihr zukommenden perſpectiviſchen Höhe in der Linie r W conſtruirt. In Fig. 146 iſt in der Lothrechten r W die lothrechte Linie des Spiegels dargeſtellt, in welche der Fig. 145 nach das Bild des Punktes K und der ganzen Dreiecksſeite K L fällt, alſo die reflectirende Linie des Spiegels; r K iſt gleich der Länge R K in Fig. 145; die Lage des Auges O zur reflectirenden Linie iſt dadurch beſtimmt, daß r o° gleich R O in Fig. 145, und die Höhe o° O gleich p P in Fig. 144 gemacht iſt. Nachdem man nun in Fig. 146 r $\varkappa$ gleich r K gemacht und $\varkappa$ O gezogen, ergiebt ſich, daß k 1) um 19° unter dem Horizonte O W, oder 2) um $9\frac{1}{2}$° gehoben über eine von O nach r gezogene Linie, oder 3) um 19° über der Grundebene liegt, was hier daſſelbe wie 1) beſagt, da die Winkel α, β und γ augenſcheinlich einander gleich ſein müſſen.

Iſt nun, was die Auffaſſung 1) betrifft, r W in Fig. 144 die reflectirende Linie, und man ſieht ſie als Grenzlinie (W Hauptpunkt, tw herabgeſchlagener Geſichtspunkt) an und trägt an W tw in tw unterhalb den Winkel von 19° an, ſo ſchneidet man r W im Bildpunkte k. Sieht man aber die durch Z Lothrechte als Grenzlinie (Z Hauptpunkt, tz herabgeſchlagener Geſichtspunkt) der durch r K gehenden lothrechten Einfallſtrahlen-Ebene (§. 514, Nr. 4) an, trägt

an Z t_z in t_z unterhalb den Winkel von 19° an, ſchneidet dadurch die Grenzlinie in e und zieht von e durch K, ſo ſchneidet man r W ebenfalls in k.

Legt man, was die Auffaſſung 2) betrifft, an eine von t_w nach r gezogene Linie in t_w oberhalb den Winkel von 9½° an, ſo ſchneidet man r W ebenfalls in k.

Trägt man aber, der Auffaſſung 3) entſprechend, an die in der Grundebene liegende Horizontale r q (oder an r q^1), deren Länge als die geometriſche Länge von r K ermittelt war, oberhalb in q (oder in q^1) den Winkel von 19° an, ſo ſchneidet man r W gleichfalls in k, u. ſ. w. —

Aus dieſen verſchiedenen, an ſich unbedeutend ſcheinenden Auffaſſungen deſſelben Zieles ergiebt ſich für weiter unten folgende Conſtructionen der Bilder in cylindriſchen Spiegeln der nöthige Anhalt.

§. 516. Da es hier nur darauf ankam, das bei der Conſtruction einzuſchlagende Verfahren zu zeigen, ſo ſind in der Figur im Ganzen nur drei Spiegelbilder vorgeführt. Bei der gegebenen Stellung des Objectes und des Auges zu den Spiegeln würden in Wirklichkeit ſieben Bilder ſichtbar und hier demnach eigentlich zu conſtruiren ſein.

§. 517. Wie das Spiegelbild auf dem Fußboden in Fig. 144 werden die Spiegelbilder auf Waſſerflächen conſtruirt. Man hat ſich hierbei, wie im Allgemeinen, vor dem häufig vorkommenden Irrthume zu hüten, daß Spiegelbilder wie nur umgekehrte Wiederholungen der Perſpectiven der Objecte ſelbſt, oder daß ſie wohl gar auf ſolchen ſpiegelnden Flächen dargeſtellt werden, auf welche ſie nicht fallen können.

§. 518. Um in Fig. 147 (Taf. 22) die Perſpectiven des Spiegelbildes des Hauſes und des hinter dieſem befindlichen Thurmes zu conſtruiren, muß man zuvor die Umfaſſungsmauern der Gebäude nach unten bis an die verlängert gedachte Waſſerfläche verlängern und von dem Schnitte beider aus die Längen der Höhenkanten in das Spiegelbild übertragen. Dabei würde dann z. B. die Kante H A in dem Punkte α ihrer Verlängerung von der Waſſerfläche geſchnitten werden, und würde demnach h a ihr Spiegelbild ſein. So würde

auch, um das Bild des Thurmes zu construiren, zuvor wenigstens der Punkt β zu ermitteln sein, in welchem die Verlängerung der einen seiner Höhenkanten die verlängerte Wasserfläche schneidet. Die Bilder aller lothrechten Kanten fallen mit diesen je in eine Linie, die Bilder der horizontalen Kanten sind mit diesen selbst perspectivisch parallel; es verschwinden demnach die Bilder in P verschwindender Kanten gleichfalls in P.

Wegen der weiteren Entfernung des Thurmes wird sein Bild von dem Bilde des an der Façade des Hauses angebrachten, an sich niedrigeren Flaggenstockes überragt. Die Bäume, nach unten verlängert, würden die verlängerte Wasserfläche etwa in den Punkten φ und γ schneiden, weshalb ihre Höhen φF und γC von diesen Punkten aus nach unten zu übertragen sind. Um das Spiegelbild des rechts in das Wasser ragenden Hügels darzustellen, muß zuvor zu einem Punkte desselben, wie etwa E, die Projection ε auf der Wasserfläche festgestellt und danach die Höhe εE in εe übertragen werden u. s. w.

§. 519. Nähme man links im Vordergrunde ein Stück einer polirten Tischplatte an, so wäre es fehlerhaft, darauf die Spiegelbilder irgend welcher Theile der vorliegenden Objecte, wie etwa das Bild f des Baumgipfels F zu construiren, da eine Verlängerung der Tischfläche bis in jene Bäume sofort ergeben würde, daß der Schnitt beider so hoch liegt, daß die Bilder weit außerhalb der gegebenen Grenzen der Tischfläche fallen müßten. —

Beispiel 53.

§. 520. **Aufgabe.** Es ist in Fig. 148 (Taf. 24) die Perspective einer **Pyramide** gegeben, deren Basis BCER auf der Grundebene steht; außerdem in dem Viereck HJKL die perspectivisch rechteckige Begrenzung eines **einfach-schiefen Spiegels**, dessen Ebene die durch V lothrechte Linie zur Grenzlinie (V Hauptpunkt, X Verschwindungspunkt für normale Linien; $\frac{1}{n}x$ Theilpunkt für die in X verschwindenden Linien) hat — es soll darauf die Perspective des Spiegelbildes der Pyramide construirt werden.

Ausführung. Der in §. 506 gegebenen 3. Regel nach ſind die Bilder der Eckpunkte der Baſis dadurch zu finden, daß man von ihnen gegen die Spiegelfläche normale, d. h. nach X gerichtete Linien (Hauptſtrahlen) zieht und deren Verlängerungen hinter dem Spiegel unter Benutzung des Theilpunktes t_x ihnen gleich, alſo z. B. ϱr perſpectiviſch gleich ϱR macht. Zieht man darauf in dem ſo conſtruirten Spiegelbilde b c e r der Baſis die Diagonalen, und durch deren Schnittpunkt a eine Lothrechte, ſo iſt dieſe das Spiegelbild der Achſe und der darin durch eine von F nach X gezogene Linie beſtimmte Punkt f das der Spitze F, wonach die Verbindungslinien zwiſchen dieſer und den Punkten b, r und e die Bilder der anſteigenden Pyramidenkanten ergeben. §. 521.

Die Richtigkeit der Conſtruction kann man noch dadurch ſicherſtellen, daß man, wie für die Seiten der Baſis des Objectes ſelbſt, die Verſchwindungspunkte ihrer Spiegelbilder benutzt. Wie nämlich die beiden in Z verſchwindenden Seiten R E und B C der Baſis von der in V verſchwindenden Schnittlinie H J des Spiegels mit der Grundebene um den Winkel von 16° nach rechts abweichen, ſo müſſen die Spiegelbilder dieſer Seiten von der Schnittlinie H J um denſelben Winkel nach links abweichen. Trägt man demnach an den Parallelſtrahl O V in O links den Winkel von 16° und beſtimmt dadurch im Horizonte den Punkt z, ſo iſt dieſer der Verſchwindungspunkt für die Seiten r e und b c des Spiegelbildes, und ſo das Spiegelbild des Verſchwindungspunktes Z. §. 522.

In gleicher Weiſe iſt der Verſchwindungspunkt y (das Spiegelbild des Verſchwindungspunktes Y) für die Spiegelbilder r b und e c der Seiten B R und E C der Baſis zu ermitteln.

Als ein Ergebniß dieſes Conſtructionsverfahrens iſt hier die weiter unten öfter zu verwerthende Regel hervorzuheben, daß das Spiegelbild einer Linie mit der Spiegelebene denſelben Winkel bildet, welchen die Linie ſelbſt mit dieſer bildet. §. 523.

Verlängert man die Spiegelbilder der Seiten der Baſis bis zur Schnittlinie H J, ſo ſchneiden ſie dieſe in denſelben Punkten, in welchen die Verlängerungen der Seiten ſelbſt die H J ſchneiden. Z. B. e r ſowohl, wie E R ſchneiden mit ihren Verlängerungen die H J im Punkte τ. Aber auch die Verlängerungen der Diagonalen der Baſis ſelbſt, z. B. C R, und die ihrer Spiegelbilder, z. B. c r, ſchneiden die Schnittlinie H J in denſelben Punkten, hier z. B. δ. Jene Verlängerungen $e\tau$ und $E\tau$ ſind nämlich als die gleichen Seiten des, der Conſtruction gemäß, gleichſchenkligen Drei- §. 524.

ecks $\tau E e$ anzuſehen. In einem ſolchen Dreiecke aber ſchneiden ſich die gleichen Seiten ſtets in der in dem Halbirungspunkte (ε) der Grundlinie ($E e$) auf dieſer errichteten Normalen ($\varepsilon \tau$), d. i. HJ.

Hiernach kann man alſo auch, nachdem man nur zwei Punkte, etwa a und r, des Spiegelbildes nach der erſtgezeigten Ausführung (§. 521) conſtruirt hat, die Bilder der anderen Eckpunkte und der Seiten der Baſis einfacher durch Verlängerung der Seiten und der Diagonalen derſelben bis zur Schnittlinie HJ finden.

Was hiermit für die Bilder horizontaler Linien geſagt iſt, trifft auch für die Bilder ſchiefer Linien zu. Denn denkt man ſich durch die ſchiefe Pyramidenkante FR eine zur Spiegelfläche normale Ebene, ſo iſt deren Schnittlinie mit der Spiegelfläche eine durch φ und ϱ gehende Linie, von deren Punkte λ aus man das Spiegelbild rf ziehen kann, nachdem man FR bis zum Schnitte mit ihr verlängert hat.

Es kann hiernach als Regel feſtgeſtellt werden, daß eine gerade Linie und ihr Spiegelbild ſich, beiderſeits verlängert, in einem und demſelben Punkte der Spiegelebene ſchneiden.

Beiſpiel 54.

§. 525. **Aufgabe.** Es iſt in Fig. 149 (Taf. 26) die Perſpective (P Hauptpunkt, PO Diſtanz) eines mit ſeiner Grundfläche KGR auf der Grundebene ſtehenden **Prismas** gegeben; außerdem in dem Viereck $LMNQ$ die perſpectiviſch rechteckige Begrenzung eines mit ſeiner der Bildebene parallelen Grundlinie LM ebenfalls auf der Grundebene ſtehenden **einfach-ſchiefen Spiegels**, welcher, wie die Winkel bei M veranſchaulichen, $21\frac{1}{2}°$ hinter die Bildebene, d. i. $68\frac{1}{2}°$ über die Grundebene geneigt iſt. Die Grenzlinie der Spiegelebene iſt demnach eine oberhalb der Figur die Verticale im Punkte H rechtwinklig durchſchneidende Linie, H^1 iſt der Verſchwindungspunkt für Linien, welche normal zu der Spiegelebene ſind, Δ^1 iſt ein Theilpunkt für dieſe Linien — es ſoll die Perſpective des Spiegelbildes des Prismas conſtruirt werden.

§. 526. **Ausführung.** Nach dem im vorhergehenden Beiſpiele zuerſt gezeigten Verfahren hat man von den Eckpunkten des Prismas normale, d. h. nach H^1 gerichtete Linien (Hauptſtrahlen) gegen die Spiegelebene zu ziehen und deren Verlängerungen hinter dem Spiegel den Hauptſtrahlen ſelbſt

perſpectiviſch gleich lang zu machen. So conſtruirt iſt in der Figur das Bild r des Punktes R. Der Punkt ϱ, in welchem der Hauptſtrahl R ϱ die nach unten verlängert gedachte Spiegelebene trifft, iſt dort dadurch beſtimmt, daß zunächſt die Grundlinie L M des Spiegels durch eine von R nach P gezogene Linie in λ geſchnitten, darauf R H¹ gezogen, und dieſe durch eine andere von H durch λ gezogene Linie in ϱ geſchnitten wurde. Die Länge ϱ r iſt ſchließlich vermittelſt des Diſtanzpunktes Δ^1 der Länge ϱ R perſpectiviſch gleich gemacht worden. Hat man auf dieſelbe Art die Bilder der anderen Eckpunkte conſtruirt, ſo ſind jene nur noch durch gerade Linien entſprechend zu verbinden, um in r e b g k das ſchiefe Spiegelbild des Prismas zu vollenden.

Der gegebenen Stellung des Spiegels wegen fällt ein Theil des Bildes außerhalb der Grenzen des Spiegels, nämlich unterhalb ſeiner Grundlinie L M, und iſt deshalb ſo weit eigentlich nicht ſichtbar.

Um die Conſtruction fernerhin nicht durch die an ſich willkürliche Spiegelbegrenzung zu beengen, wird in den folgenden Beiſpielen von dieſer ganz abgeſehen und nur die Lage der Spiegelebene, und zwar vornehmlich durch Angabe ihrer Grenzlinie bezeichnet werden.

§. 527. Nachdem man die Spiegelbilder der Eckpunkte der unteren Grundfläche conſtruirt, konnte man kürzer ſogleich die der Höhenkanten nach der in §. 523 hervorgehobenen Regel conſtruiren und darin durch Hauptſtrahlen, von den Eckpunkten der oberen Grundfläche aus nach H¹ gezogen, die Bildpunkte e, b und a abſchneiden. Da nämlich die Höhenkanten des Prismas lothrecht ſind und deshalb von der ſchiefen Spiegelebene um $21\frac{1}{2}°$ abweichen, ſo müſſen ihre Bilder von dieſer ebenfalls um $21\frac{1}{2}°$, von der lothrechten Bildebene alſo, oder von den lothrechten Kanten ſelbſt um 43° abweichen und darum nach dem oberhalb der Figur in der Verticale gelegenen Verſchwindungspunkte H² — welcher darin durch den um $21\frac{1}{2}°$ von D H und um 43° von D X abweichenden Parallelſtrahl D H² abgeſchnitten wird — gerichtet ſein.

Die ſo eingehaltene Winkelabweichung der Bilder der lothrechten Kanten von dieſen ſelbſt um 43° entſpricht dem Spiegelungsgeſetze, „daß die Winkelgeſchwindigkeit der Spiegelbilder doppelt ſo groß iſt, wie die des Spiegels", mit anderen Worten: daß der Abweichungswinkel der Spiegelbilder von den entſprechenden Objecten doppelt ſo groß iſt, wie der des Spiegels von dieſen.

§. 528. Der am Schluſſe des §. 524 gegebenen Regel folgend kann man die Conſtruction ferner dadurch abkürzen, daß man zunächſt die Bilder, z. B. e und b einzelner Punkte E und B conſtruirt, dann die Seiten A E und A B der oberen Grundfläche ſelbſt bis zu ihren in der Linie F S liegenden Schnittpunkten ε und β mit der Spiegelebene verlängert, und nun durch e und b die Bilder e a und b a von ε und β aus zieht, wobei ſich dann Punkt a von ſelbſt ergiebt. So hat auch g k in der Figur vom Punkte γ aus durch g gezogen werden können, da die verlängerte K G die Spiegelebene im Punkte γ ſchneidet. Die Linie F S, in welcher die Schnittpunkte ε und β der Kanten A E und A B mit dem Spiegel liegen, iſt dadurch leicht zu finden, daß man die ſchon vorhandene Linie H λ durch eine von E nach P, alſo horizontal, wie die obere Grundfläche iſt, gezogene Linie in l ſchneidet und durch dieſen Punkt F S parallel der Grundlinie L M des Spiegels zieht.

§. 529. **Wie die Bilder von Linien um denſelben Winkel, wie die Linien ſelbſt, von der Spiegelebene abweichen (§. 523), ſo weichen auch die Bilder von ebenen Flächen um denſelben Winkel, wie dieſe ſelbſt, von der Spiegelebene ab.**

Wie nämlich in der Figur die Grundflächen des Prismas von der Spiegelebene um den Winkel von $90° + 21\frac{1}{2}°$, d. i. $111\frac{1}{2}°$ abweichen, ſo gehören auch ihre Bilder Ebenen an, die ſich zur Spiegelebene um $111\frac{1}{2}°$ neigen. Denn legt man an D H in D den Winkel H D H^3 von $111\frac{1}{2}°$ an und ſchneidet die Verticale in H^3, ſo iſt die durch dieſen Punkt parallel dem Horizonte gehende Linie die Grenzlinie (H^3 Hauptpunkt, Δ^3 Diſtanzpunkt, O^3 herabgeſchlagener Geſichtspunkt) dieſer Ebenen. In ihr liegen die Verſchwindungspunkte für die geſpiegelten Seiten der Grundflächen, und zwar wie Spiegelbilder der Verſchwindungspunkte der entſprechenden Seiten ſelbſt. Wie z. B. der Verſchwindungspunkt Y der horizontalen Prismakante K R von der Verticale nach links um den Winkel P O Y abweicht, ſo weicht ſein Spiegelbild, der Verſchwindungspunkt y (rechts außerhalb der Figur gelegen) für r k, von der Verticale nach rechts um den gleichen Winkel $H^3 O^3 y$ ab. Oder aber, wie Spiegelbilder immer in dem vom Objecte normal zum Spiegel gezogenen und dahinter verlängerten Hauptſtrahle liegen, ſo iſt auch hier y der Schnittpunkt des von Y durch H^1, den Verſchwindungspunkt für alle zum Spiegel normalen Linien, gezogenen Hauptſtrahles mit der Grenzlinie $\Delta^3 H^3$. Da hiernach die Punkte dieſer Grenzlinie als Spiegelbilder entſprechender Punkte des Horizontes angeſehen werden können, ſo iſt die Grenzlinie ſelbſt als Spiegelbild des Horizontes anzuſehen.

Will man zur Conſtruction des Spiegelbildes des Prismas die Grenz- §. 530.
linie $\measuredangle^3 H^3$ benutzen, und es fallen dabei Verſchwindungspunkte, wie hier etwa der von r g, zu weit außerhalb des Conſtructionsraumes, ſo kann man z. B. die Spiegelbilder g und r der Punkte G und R auch dadurch finden, daß man von G und R aus bis zur Schnittlinie L M der erweitert gedachten Grundfläche K G R mit der Spiegelebene in P verſchwindende Linien G i und R λ, darauf i H^3 und λ H^3 zieht, und in letzteren vermittelſt des Diſtanzpunktes $\measuredangle^3$ die Stücke i g und λ r perſpectiviſch gleich G i und R λ macht. Doch gelangt man kürzer zu den Punkten g und r, wenn man i H^3 und λ H^3 ſogleich durch von G und R nach H^1 gezogene Linien in g und r ſchneidet, da doch die Spiegelbilder g und r in von G und R normal zum Spiegel gezogenen Linien liegen müſſen. So ſind auch die Spiegelbilder e und b der Punkte E und B dadurch zu finden, daß man die Schnittlinie F S der obern erweitert gedachten Grundfläche mit dem Spiegel durch Linien, von E und B nach P gezogen, in l und v ſchneidet, und dann Linien, von dieſen Punkten nach H^3 gezogen, durch andere Linien, von E und B nach H^1 gezogen, in e und b ſchneidet.

Da die Punkte λ und i in der Spiegelebene ſelbſt liegen, die Punkte §. 531.
r und g aber die Spiegelbilder von G und R ſind, ſo ſind die Linien λ r und i g als Spiegelbilder der Linien R λ und G i anzuſehen. Daraus folgt, daß die durch beide Linien λ r und i g denkbare unbegrenzte Ebene das Spiegelbild der durch R λ und G i gehenden horizontalen Grundebene iſt — wie denn auch ſchon in §. 529 die Grenzlinie $\measuredangle^3 H^3$ als das Spiegelbild des Horizontes bezeichnet iſt. Es beſtätigt ſich hierdurch zunächſt die in §. 527 hervorgehobene Regel, da hier, nach der Lage des Punktes H^3 zu der des Punktes P zu urtheilen, die Ebene λ i H^3 von der horizontalen Grundebene ſelbſt — dieſe als Object gedacht — um den doppelten Neigungswinkel des Spiegels abweicht.

Ferner darf, da die beiden Ebenen λ i H^3 und R λ i G ſich der Conſtruction gemäß in der durch λ und i gehenden Linie des Spiegels ſchneiden, die in §. 524 gegebene Regel dahin erweitert werden, daß eine Ebene und ihr Spiegelbild ſich in einer und derſelben Linie der Spiegelebene ſchneiden.

Beiſpiel 55.

Aufgabe. In Fig. 150 (Taf. 26) iſt gegeben die Perſpective §. 532.
(P Hauptpunkt, P O Diſtanz) eines auf ſeiner horizontalen

Grundfläche CBA ſtehenden **Prismenſtumpfes**, an welchem die Kanten BG und AF lothrecht ſind und an deſſen doppeltſchiefe andere Grundfläche CGF ein anderes **dreiſeitiges Prisma** angefügt iſt, deſſen Kanten CL, GK und FE zu den Grundflächen CGF und LKE normal, und zwar perſpectiviſch nach dem unten außerhalb der Conſtruction liegenden Punkte H^1 gerichtet ſind. Seine Grundflächen haben die Linie $(\lambda)\varepsilon$ zur Grenzlinie (H Hauptpunkt, H^1 Verſchwindungspunkt für normale Linien). Es iſt ferner gegeben die Grenzlinie St (P Hauptpunkt) eines unbegrenzten, die Grundebene in der Linie JP ſchneidenden **einfach-ſchiefen Spiegels**, deſſen Ebene, dieſer Angabe nach normal zur Bildebene, um 13° über die Verticalebene vornüber neigt — es ſoll die Perſpective des Spiegelbildes der beiden Prismen conſtruirt werden.

§. 533. **Ausführung.** Der Aufgabe nach weicht die Verticale PV von der Grenzlinie PS des Spiegels um 13° nach rechts ab; es müſſen deshalb die Bilder der der Verticale parallelen, alſo lothrechten Linien, wie z. B. die Bilder von BG und AF, um 13° nach links von der Grenzlinie des Spiegels abweichen und wie Pv gerichtet ſein. Und da der Horizont, z. B. das Stück QP, mit der Grenzlinie PS den Winkel von 77° bildet, ſo muß ſein Spiegelbild, insbeſondere Pq, um einen ebenſo großen Winkel von der Grenzlinie abweichen und müſſen die Bilder aller dem Horizonte parallelen Linien parallel Pq ſein. Das Spiegelbild q aber eines im Horizonte gegebenen Punktes Q iſt, wie bisher immer, dadurch zu conſtruiren, daß man von Q den Hauptſtrahl Qu gegen den Spiegel, hier deſſen Grenzlinie, zieht und ſeine Verlängerung uq hinter demſelben geometriſch gleich uQ, oder daß man kürzer das Stück Pq des Spiegelbildes des Horizontes gleich PQ des wirklichen Horizontes macht. So iſt auch das für die Conſtruction gebrauchte, vor den Spiegel fallende Bild α° des hinter dem Spiegel liegenden Verſchwindungspunktes α zu beſtimmen. Wie ferner die Linie $(\lambda)\varepsilon$, welche von der Grenzlinie PS des Spiegels um den Winkel $Ss\varepsilon$ abweicht, Grenzlinie (H Hauptpunkt, H^1 Verſchwindungspunkt für normale Linien) für die ſchiefen Grundflächen des oberen Prismas iſt und die Verſchwindungspunkte für deren Seiten, z. B. ε für KE und GF u. ſ. w., enthält, ſo iſt die durch s gehende, von PS um den gleichen Winkel $Ss\varepsilon^\circ$ abweichende Linie ε° (λ°) das Spiegelbild der Grenzlinie $(\lambda)\varepsilon$, und ſelbſt Grenzlinie (h Hauptpunkt, h^1 Verſchwindungspunkt für normale Linien) für die Spiegelbilder jener Grundflächen. Auch enthält

ſie die Verſchwindungspunkte für die Seiten der letzteren, z. B. ε° für k e und g f u. ſ. w. Wie endlich der unten außerhalb der Figur liegende Punkt H^1 der Verſchwindungspunkt für die Kanten G K, F E und C L iſt, ſo iſt ſein Spiegelbild, der ebenfalls unten außerhalb der Figur liegende Punkt h^1, der Verſchwindungspunkt für die Spiegelbilder g k u. ſ. w. jener Kanten. Er iſt dadurch zu conſtruiren, daß man die Verlängerung des von H^1 normal gegen die Grenzlinie S t des Spiegels gezogenen Hauptſtrahles dieſem gleich macht. Dabei muß h^1 zugleich in das Spiegelbild h P der ſchiefen Verticale H P fallen.

Zur Conſtruction ſelbſt übergehend findet man zunächſt das Spiegelbild b des Punktes B, wenn man B π geometriſch parallel P Q, π b parallel P q zieht und π b durch eine durch B geometriſch parallel Q q gezogene Linie, den Hauptſtrahl, ſchneidet. $\pi\tau$, parallel der Grenzlinie des Spiegels gezogen, weiſet zum Ueberfluſſe nach, daß die Verlängerung τ b hiernach in der That gleich dem Hauptſtrahle τ B iſt. Wie b ſind auch die Bilder a und c leicht zu finden. — Verlängert man hierauf C B bis β, und B A bis δ in der Schnittlinie J P des Spiegels mit der Grundebene, ſo ergeben von β und δ durch b gezogene Linien die Richtungen der Spiegelbilder b c und b a der Linien B C und B A. Zieht man danach durch b und a Linien, welche geometriſch parallel P v ſind, und ſchneidet dieſe und auch b c durch andere Linien, welche geometriſch parallel Q q durch G, F und C gezogen werden, in g, f und c, ſo iſt das Dreieck g f c das Spiegelbild der Grundfläche G F C. Um das Spiegelbild des oberen Prismas zu vollenden, hat man nur noch von dem oben erwähnten Punkte h^1 aus Linien durch g, f und c zu ziehen und dieſelben abermals durch Hauptſtrahlen, parallel Q q durch K, E und L gezogen, in den Punkten k, e und l zu ſchneiden. Eine kurze Unterſuchung ergiebt ſchließlich, daß, wie B A, K E und K L in den Punkten α, ε und λ, ſo b a, k e und k l in deren Spiegelbildern α°, ε° und λ° verſchwinden.

Auf eine andere Art kann man die Spiegelbilder k, l und e, und §. 534.
dadurch ohne Benutzung des Punktes h^1 die Richtungen der Kanten g k, c l und f e finden, wie dies in der Figur mit Punkt k gezeigt iſt; nämlich vermittelſt der perſpectiviſchen Grundrißprojectionen jener Punkte. Nimmt man, um z. B. die Projection K° des Punktes K zu beſtimmen, durch die gebrochene Linie B G K eine lothrechte Ebene an, ſo iſt, weil B G lothrecht iſt und G K in H^1 verſchwindet, eine durch H^1 gezogene lothrechte Linie die Grenzlinie dieſer Ebene. Für die Schnittlinie derſelben Ebene mit der Grundebene, d. i. die Grundrißprojection der Linie B G K auf letzterer, iſt aber nach §. 309 der Punkt m (rechts außerhalb der Figur), in welchem

jene Grenzlinie den Horizont ſchneidet, der Verſchwindungspunkt, ſo daß von dieſem aus durch B die Projection B K° gezogen und darin durch eine durch K gezogene Lothrechte die Projection K° des Punktes K abgeſchnitten werden kann. Hiernach iſt nur K° $\varkappa$ parallel Q P bis $\varkappa$ in der Linie J P, darauf $\varkappa$ k° parallel P q zu ziehen und $\varkappa$ K° geometriſch gleich zu machen, und eine durch k° parallel P v gezogene Linie durch eine andere, durch K parallel Q q gezogene im Punkte k zu ſchneiden, um in letzterem das Bild von K zu erhalten.

§. 535. Die am Schluſſe des §. 531 hervorgehobene Regel beſtätigt ſich auch hier, da ſowohl die Prismafläche G K E F, als ihr Spiegelbild g k e f — wie die Verlängerungen der Seiten K E und k e, G F und g f, K G und k g ergeben — ſich in der durch die Punkte η, φ und γ gehenden Linie ſchneiden. Daß dieſe aber die Schnittlinie der genannten Prismafläche mit dem Spiegel iſt, erweiſet ſich daraus, daß ſie einerſeits durch den (oben außerhalb der Figur liegenden) Punkt r, in welchem ſich die Grenzlinie $H^1 \varepsilon$ der Prismafläche und die der Spiegelebene ſchneiden, und andererſeits durch den Schnittpunkt n der Linie J P des Spiegels mit der Linie i w geht, in welcher letztern die verlängerte Prismafläche die Grundebene ſchneiden würde.

So auch ſchneiden ſich die Prismafläche B G F A und ihr Spiegelbild b g f a in der Linie $\varphi \delta$ der Spiegelebene, und zwar iſt $\varphi \delta$ die Schnittlinie letzterer mit jener Prismafläche; denn ſie geht einerſeits durch den (unten außerhalb der Figur liegenden) Punkt t, welcher der Schnittpunkt der Grenzlinie der Spiegelebene mit der Grenzlinie $\varepsilon \alpha$ der Prismafläche iſt, andererſeits durch den Punkt φ, welcher ein Punkt der als der Spiegelebene angehörig bekannten Linie (r) n iſt, u. ſ. w.

Beiſpiel 56.

§. 536. **Aufgabe.** Es iſt in Fig. 151 (Taf. 25) die Perſpective (P Hauptpunkt, P O Diſtanz) einer Gruppe geometriſcher Körper gegeben, beſtehend aus einem auf der Grundebene liegenden **Prisma**, deſſen horizontale Kanten in den Diſtanzpunkten D und D^1 verſchwinden, aus einem auf dem Prisma ſtehenden **Kegel**, deſſen Achſe A S, und deſſen Grundfläche kreisförmig iſt, und einem gegen den Kegel geſtützten **Cylinder**, deſſen Achſe M N iſt. Die einander parallelen kreisförmigen Grundflächen des Cylinders ſind um 25° unter die Grundebene und um 45° zur Verticalebene geneigt, wonach

D^1T ihre Grenzlinie (H^2 Hauptpunkt; O^2 nach unten herabgeſchlagener Geſichtspunkt; H^3, oben außerhalb der Figur gelegen, Verſchwindungspunkt für normale Linien, wie die Cylinderachſe und die Cylinderſeiten ſind) iſt. Es iſt außerdem die um $29\frac{1}{2}°$ von der Verticalebene nach links abweichende Schnittlinie WX der Grundebene mit einem **doppelt-ſchiefen**, unbegrenzten **Spiegel** gegeben, welcher, hintenüber geneigt, ſich um $72\frac{1}{2}°$ über die Grundebene erhebt — es ſoll die Perſpective des Spiegelbildes der Körpergruppe conſtruirt werden.

Ausführung. Der letzten Angabe zufolge iſt zunächſt die Grenzlinie des Spiegels dadurch zu conſtruiren, daß man im Horizonte den zu X correſpondirenden Verſchwindungspunkt Y (rechts außerhalb der Figur) beſtimmt, YO um Y in den Horizont in $Y\omega$ überträgt, an den Horizont in ω den Neigungswinkel der Spiegelebene von $72\frac{1}{2}°$ anträgt und dadurch eine durch Y gezogene Lothrechte in J (rechts oben außerhalb der Figur) ſchneidet, wonach eine von J durch X gezogene Linie die Grenzlinie (H Hauptpunkt; H^1, rechts außerhalb der Figur gelegen, Verſchwindungspunkt für normale Linien, d. h. Hauptſtrahlen) des Spiegels iſt. §. 537.

Um nun, hieran anknüpfend, wegen des Spiegelbildes des Prismas ſogleich das Spiegelbild des Horizontes feſtzuſtellen, trägt man in ω an ω (J), von welcher der Horizont links um $107\frac{1}{2}°$ abweicht, denſelben Winkel rechts an und ſchneidet dadurch die durch Y Lothrechte im Punkte i, wonach eine von i durch X gezogene Linie (i) p das Spiegelbild des Horizontes (H^4 Hauptpunkt; O^4 nach unten herabgeſchlagener Geſichtspunkt; H^5, oben außerhalb der Figur gelegen, Verſchwindungspunkt für normale Linien, wie die Spiegelbilder der lotbrechten Kanten des Prismas und der Cylinderachſe ſind) ergiebt.

Geht man bei der Conſtruction des Spiegelbildes ſelbſt von dem Punkte B aus, ſo iſt deſſen Bild b dadurch zu finden, daß man $B\pi$ parallel der horizontalen Grundlinie gegen WX zieht und darauf das Spiegelbild $b\pi$ davon und zwar folgendermaßen ſucht: Da $B\pi$ von WX, wie bei O die Parallelſtrahlen beider, O (V) und OX, zeigen, $60\frac{1}{2}°$ nach links abweicht, trägt man an den aus O^4 nach X gerichteten Parallelſtrahl in O^4 denſelben Winkel rechts an und ſchneidet dadurch das Spiegelbild (i) p des Horizontes in v, dem Verſchwindungspunkte für die Spiegelbilder aller der horizontalen Grundlinie parallelen Linien. Zieht man hierauf π v und ſchneidet ſie durch einen von B nach H^1 gezogenen Hauptſtrahl in b, ſo iſt $b\pi$ das Bild von $B\pi$ und b damit gefunden.

In gleicher Weiſe ſind auch die Spiegelbilder f, z u. ſ. w. der Punkte F und Z u. ſ. w. der unteren Prismafläche zu conſtruiren. Linien, von f, b und z u. ſ. w. nach dem Verſchwindungspunkte H^5 gezogen und durch Hauptſtrahlen, von E, C u. ſ. w. nach H^1 gezogen, in den Punkten e, c u. ſ. w. abgeſchnitten, ergeben in dieſen die Eckpunkte des Spiegelbildes der obern Grundfläche. Nachdem man jedoch den Punkt b ermittelt, kann man f und z auch dadurch finden, daß man, der in §. 524 enthaltenen Regel gemäß, F B und Z B bis β und W in der Schnittlinie W X verlängert, von β und W Linien durch b zieht und dieſelben durch Hauptſtrahlen, aus den Punkten F und Z gezogen, in f und z abſchneidet.

§. 538. Wären außer den Kanten b f und b z noch viele ihnen parallele andere Linien zu conſtruiren, ſo daß die Anwendung ihrer Verſchwindungspunkte δ und δ^1 wünſchenswerth wäre, ſo erzielt man die letzteren folgendermaßen: Der Parallelſtrahl O D der Kante B Z weicht von dem Parallelſtrahle O X der Spiegel-Grundlinie um $15\frac{1}{2}°$ nach links ab; trägt man nun an den Parallelſtrahl O^4 X denſelben Winkel X $O^4 \delta$ rechts an und ſchneidet das Spiegelbild des Horizontes im Punkte δ, ſo iſt dieſer der Verſchwindungspunkt für b z und die mit ihr parallelen Linien; und trägt man, gleichwie der Verſchwindungspunkt D^1 der Kante F B von D um einen rechten Winkel abweicht, an den Parallelſtrahl $O^4 \delta$ den rechten Winkel an und ſchneidet dadurch das Spiegelbild des Horizontes in dem rechts unten außerhalb der Figur liegenden Punkte δ^1, ſo iſt dieſer der Verſchwindungspunkt für b f und die hiermit parallelen Linien.

Schneller aber erzielt man dieſe Verſchwindungspunkte δ und δ^1 nach dem am Schluſſe des §. 529 vorgeführten Verfahren, nämlich dadurch, daß man, von den Punkten D und D^1 des Horizontes Hauptſtrahlen nach H^1 ziehend, das Spiegelbild des Horizontes in δ und δ^1 ſchneidet. Wie δ und δ^1, ſo liegen auch alle anderen, theils ſchon genannten, auf das Spiegelbild des Horizontes bezüglichen Hülfspunkte in Hauptſtrahlen. Nicht allein p, das Spiegelbild des Hauptpunktes P, liegt in einer von H^1 durch P gezogenen Linie, und dabei, wie die Parallelſtrahlen $O^4 \delta$ und O^4 p zeigen, um 45° von δ nach links abweichend, ſondern auch O^4 liegt wie ein Spiegelbild des herabgeſchlagenen Geſichtspunktes O in einem von H^1 durch O gehenden Hauptſtrahle; ja, der Verſchwindungspunkt H^5 für die Kanten f e, b c u. ſ. w. liegt in einem durch H^1 gehenden, nach dem in unendlicher Entfernung liegenden Verſchwindungspunkte der lothrechten Kanten F E, B C u. ſ. w. gerichteten, nämlich lothrechten Hauptſtrahle, ſo wie andererſeits v, der Verſchwindungspunkt für die Spiegelbilder der mit der horizontalen Grundlinie parallelen Linien, wie π b, in einem durch H^1 gehenden,

nach dem in unendlicher Entfernung liegenden Verſchwindungspunkte von Linien, wie πB, gerichteten, nämlich horizontalen Hauptſtrahle.

Bei der Conſtruction des Spiegelbildes der Grundfläche des Kegels §. 539. bietet nur die Ermittelung der perſpectiviſchen Länge des Radius für den perſpectiviſchen Ort des Achspunktes a Aufenthalt. Man findet dieſe Länge dadurch, daß man das Spiegelbild r der Projection R der Kegelachſe auf der Grundebene beſtimmt, dann $R\varrho$ parallel der horizontalen Grundlinie, und $\varrho\tau$ parallel der Grenzlinie $(H^1)p$ zieht, und, nachdem man vermittelſt der Linie δr in $\varrho\tau$ den Punkt α abgeſchnitten, in $\alpha\gamma$ die aus der Perſpective des Kegels ſelbſt entnehmbare Länge des Radius der Baſis auf- und von hier zunächſt auf die parallel $(H^1)p$ gezogene ru in ru perſpectiviſch überträgt. Durch r und u nach H^5 gezogene Linien ſchneiden dann auf der parallel $(H^1)p$ durch a gezogenen Linie den hier zur Conſtruction der Kreisperſpective verwendbaren, der Bildebene parallelen Radius ab. Die Kreisperſpective iſt nun vermittelſt desjenigen der ſie einſchließenden Quadrate (Diſtanzpunkt Δ^4) zu conſtruiren, deſſen eines Seitenpaar in H^4 verſchwindet, während das andere der Grenzlinie $(H^1)p$, d. h. der Bildebene parallel iſt.

Kürzer noch wäre der Radius für den Ort a zu finden geweſen, wenn man den Radius für A auf einer durch A gehenden, der Grenzlinie p(i) parallelen Linie geometriſch auf- und von hier vermittelſt nach H^1 gerichteter Linien auf die durch a gehende, derſelben Grenzlinie parallele Linie übertragen hätte.

Der Spitzpunkt s liegt im Schnittpunkte der nach H^5 gerichteten Achſe mit dem von S nach H^1 gezogenen Hauptſtrahle. Tangenten, aus s an die zuletzt conſtruirte Kreisperſpective gezogen, vollenden das Spiegelbild des Kegels. Doch ſind ſie nicht die Spiegelbilder der in der gegebenen Kegelperſpective als Umriſſe vorliegenden Seiten. Will man in dieſer Beziehung Ermittelungen anſtellen, ſo muß dies ſtets durch nach H^1 gerichtete Hauptſtrahlen geſchehen.

Die Conſtruction des Spiegelbildes des ſchief ſtehenden Cylinders §. 540. beginnt am zweckmäßigſten mit der Conſtruction des Spiegelbildes $(\Delta^6)(\delta^1)$ der Grenzlinie TD^1 der Grundflächen des Cylinders ſelbſt. Wie TD^1 durch den Punkt D^1 des Horizontes geht und ſich 25° unter dieſen neigt, indem ſie die Spiegel-Grenzlinie in U ſchneidet, ſo muß auch $(\Delta^6)(\delta^1)$ einerſeits durch den Punkt δ^1 des Spiegelbildes p(i) des Horizontes, andererſeits durch den Punkt U und durch den 25° unter p(i) liegenden Punkt t gehen, welcher in einer durch δ gehenden, zu p(i) normalen Linie $H^5\delta$ (H^5 darin Hauptpunkt; O^5 herabgeſchlagener Geſichtspunkt;

$O^8 t$ um 25° von dem Parallelſtrahle $O^8 \delta$ abweichend) liegt, wie T in einer durch D gehenden, zum Horizonte normalen Linie. Da aber t offenbar das Spiegelbild von T ſein und demnach in einem von T nach H^1 gezogenen Hauptſtrahle liegen muß, erzielt man die Grenzlinie $(\Delta^6)(\delta^1)$ einfacher, wenn man die durch δ zu ziehende Linie $H^6 \delta$ ſogleich durch den Hauptſtrahl $T H^1$ in t ſchneidet und dann t U nach beiden Seiten verlängert zieht. Der Hauptpunkt dieſer Grenzlinie iſt H^6; O^6 der herabgeſchlagene Geſichtspunkt; H^7, oben außerhalb der Figur gelegen, der Verſchwindungspunkt für normale Linien, wie etwa die Spiegelbilder der Cylinder-Achſe und -Seiten ſind. O^6 und H^7 liegen wie Spiegelbilder von O^2 und H^3 in Hauptſtrahlen, welche von H^1 durch dieſe Punkte gehen.

Nachdem man hiernach das Spiegelbild s g der Kegelſeite S G conſtruirt und durch den von L nach H^1 gezogenen Hauptſtrahl in l geſchnitten, ferner l k nach t gerichtet gezogen, wie L K nach T gerichtet iſt — g k verſchwindet in δ, wie G K in D — und in l k den Punkt m durch den Hauptſtrahl $M H^1$ abgeſchnitten, iſt hierdurch das Spiegelbild des Mittelpunktes M der untern Cylinder-Grundfläche feſtgeſtellt, und ergiebt ſich nun das Spiegelbild n im Schnittpunkte des von N nach H^1 gezogenen Hauptſtrahles mit der von m nach H^7 zu ziehenden Cylinderachſe. — Den der Bildebene, d. h. der Grenzlinie $(\Delta^6)(\delta^1)$ parallelen Radius m q der um m zu conſtruirenden Kreisperſpective findet man, wenn man wieder den der Grenzlinie $T D^1$ geometriſch parallelen Radius $M Q^\circ$, vermittelſt deſſen die Kreisperſpective um M ſelbſt conſtruirt worden, auf der der m q geometriſch parallelen Linie M Q zuvörderſt geometriſch auf-, und dann von hier durch die Hauptſtrahlen $M H^1$ und $Q H^1$ perſpectiviſch in m q überträgt. Die nunmehr vermittelſt des einſchließenden Quadrates, deſſen eines Seitenpaar in H^6 verſchwindet, zu conſtruirende Kreisperſpective muß ſchließlich durch die Spiegelbilder l und k der Punkte L und K gehen, in welchen der Cylinder den Kegel einer- und das Prisma andererſeits berührt. Die perſpectiviſche Länge des m q entſprechenden Radius der oberen Grundfläche um n wird von m q aus durch nach H^7 gerichtete Linien beſtimmt.

---

§. 541. Aus der Menge der hier vorgeführten Conſtructionsmittel laſſen ſich leicht diejenigen herausfinden, welche es ermöglichen, ein Spiegelbild darzuſtellen, wozu nicht die Perſpective des Objectes, ſondern nur deſſen Maße und außerdem die Lage des Spiegels gegeben ſind — ein Fall, der dann vorliegt, wenn die Perſpective des Objectes ſelbſt außerhalb der Bildgrenzen fällt. Man hat dann die

Perſpective des Spiegelbildes an dem ſelbſtverſtändlich zuvor feſtzuſtellenden perſpectiviſchen Orte hinter dem Spiegel wie die Perſpective eines körperlichen Objectes, nur durch die Lage des Spiegels modificirt, zu behandeln.

Sechsundzwanzigſtes Kapitel.

Conſtruction der Spiegelbilder der Schatten.

§. 542. Auch das hierbei einzuſchlagende Verfahren folgert ſich aus dem Vorhergehenden von ſelbſt. Man wird zum Theil die Spiegelbilder einzelner Punkte der Schattengrenzen ſo, wie die der Objecte ſelbſt, conſtruiren können, anderentheils wird es vortheilhaft ſein, für das Spiegelbild des Objectes zuvor das Spiegelbild des leuchtenden Punktes und das ſeines Fußpunktes feſtzuſtellen und hiernach, ohne Rückſicht auf das Object ſelbſt, die Schattengrenzen zu beſtimmen.

Wäre in Fig. 151 (Taf. 26) z. B. T die Perſpective des Punktes der Sonne, wenn dieſe als vor der Bildebene ſtehend angenommen wird, und wäre D dazu der Fußpunkt für die Conſtruction der auf horizontale Flächen fallenden Schlagſchatten lothrechter Kanten, wie F E und B C, ſo würden für das Spiegelbild: t als Sonnenpunkt und δ als der entſprechende Fußpunkt für die Schatten der Kanten f e und b c zu verwenden ſein.

Siebenundzwanzigſtes Kapitel.

B. Gekrümmte Spiegel.

§. 543. Wenn man an einem Körper, welcher von krummen polirten Flächen begrenzt und der deshalb ein gekrümmter Spiegel zu nennen iſt, den Ort des höchſten Lichtes, wie dies ein gleicher Körper

mit matter Oberfläche zeigen würde, und den des Objectschattens ſucht, ſo wird deren Wahrnehmung ſowohl, wie die der Oberfläche überhaupt, durch den Glanz, d. i. das Auftreten der mehr oder minder vollkommenen Spiegelbilder der leuchtenden Objecte gehindert, welche den Körper umgeben. Die einzelnen hellen Spiegelbilder, deren Ort ſelbſtverſtändlich ſtets von dem Orte des demſelben leuchtenden Objecte entſprechenden ſogenannten höchſten Lichtes verſchieden iſt, nennt man Glanzlichter.

Da das Auge, je vollkommener polirt die Oberfläche des ſpiegelnden Körpers iſt, deſto weniger dieſe ſelbſt wahrzunehmen vermag, ſo iſt es zum großen Theil darauf angewieſen, aus der Figur, Anordnung, Größe und Vollkommenheit der Glanzlichter auf die Geſtalt und Wölbung des ſpiegelnden Körpers zu ſchließen. Um die Perſpective eines ſolchen vollendet darzuſtellen, iſt es deshalb nothwendig, die Conſtruction der Perſpectiven ſolcher Glanzlichter, d. h. überhaupt der Spiegelbilder in gekrümmten Spiegeln, zu kennen. Für den vorliegenden Zweck wird es ausreichen, wenn hier als geſpiegeltes Object ſtets nur ein leuchtender Punkt, oder eine leuchtende gerade Linie angenommen wird. —

§. 544. Da die Reflexion eines einzelnen Lichtſtrahles doch immer nur auf je einem einzelnen Punkte einer Spiegelfläche ſtattfindet, ſo gelten die in §. 11 der Optik für ebene Spiegel angeführten Reflexionsgeſetze auch für gekrümmte Spiegel. Weil auf letzteren aber die Einfallslothe nicht, wie auf ebenen Spiegeln, mit den Hauptſtrahlen parallel ſind, und außerdem die Richtung der einzelnen Strahlen eines Lichtbüſchels nach der Reflexion ſtärker divergirend, oder parallel, oder convergirend, je nach der Wölbung des Spiegels, iſt, ſo ſind die in §. 17 der Optik hinſichtlich des ſcheinbaren Ortes der Spiegelbilder angeführten Geſetze bei der perſpectiviſchen Conſtruction der Bilder in krummen Spiegeln nur unter entſprechenden Modificationen verwendbar.

§. 545. Die gekrümmten Spiegel ſind zu unterſcheiden in convexe und concave Spiegel. In Bezug auf beide iſt zunächſt das etwas umſtändliche Verfahren zu zeigen, durch welches auf ihnen — vorausgeſetzt, daß ſie die Krümmung der Kugel haben — der

reflectirende Punkt zu ermitteln ist, wenn man diesen nicht, wie es beim praktischen Construiren oft ausreichend erscheint, durch Probiren zu finden suchen will.

Ist nämlich in Fig. 152 (Taf. 28) der kleinere Kreis um C die §. 546.
Projection eines gekrümmten Kugelspiegels, dessen innere Fläche sowohl als seine äußere als spiegelnd angenommen werden, ist ferner L ein leuchtender Punkt, O das Auge, und sind alle drei Stücke als in Einer Ebene, der Reflexionsebene, liegend gegeben, so sind die reflectirenden Punkte des Spiegels in seinen Schnittpunkten (R auf der convexen, und R° auf der concaven Fläche) mit einer Curve zu finden, welche man folgendermaßen construirt:

Man beschreibt mit dem Radius CL einen Kreis um C, und einen zweiten Kreis durch die Punkte C und L, deren Abstand von einander als Durchmesser angenommen. In letzterem Kreise nimmt man einen Punkt a beliebig an, zieht La bis b in der Peripherie des größten Kreises verlängert, und schneidet darauf eine von C durch a gezogene Linie durch eine andere, von b durch O gezogen, in r. Wiederholt man dieses Verfahren mit möglichst vielen, in dem Kreise CL beliebig angenommenen Punkten a^1, a^2, a^3 u. s. w., so erzielt man in r^3, r^2, r^1, r ... x u. s. w. Punkte, durch welche die gedachte, in jedem Falle auch durch die Punkte L, C und O gehende Curve zu zeichnen ist. In ihr liegen, bei Festhaltung des leuchtenden Punktes in L und des Auges in O, die reflectirenden Punkte aller um C möglichen, kreisförmig gekrümmten, convexen und concaven Spiegel, deren Radius sei Cr, CR oder Cρ. Da hier also die Curve den gegebenen Spiegel in den Punkten R und R° schneidet, sind diese die reflectirenden, und hätte es zu ihrer Ermittelung nur des Stückes rρ der Curve bedurft. Die anderen beiden Schnittpunkte Y und Z haben eine den Punkten R und R° ähnliche, jedoch nur theoretische Bedeutung.

Die Richtigkeit dieser Lösung der unter dem Namen des Alhazenischen Problems bekannten Aufgabe, auf Kugelspiegeln die reflectirenden Punkte zu finden, ist folgendermaßen zu beweisen:

Da jeder Peripheriewinkel über dem Durchmesser ein rechter ist, so ist Winkel CaL ein rechter und Ca deshalb normal zu aL.

Da ferner der zu einer Sehne normale Radius dieſelbe ſtets halbirt, Radius C d aber normal zu der Sehne L b iſt, ſo ſind deren Stücke L a und a b einander gleich. Faßt man hiernach in C a den Punkt r ins Auge und zieht r L und r b, ſo müſſen die beiden Dreiecke r L a und r b a wegen Gleichheit je zweier Seiten (r a gleich r a, L a gleich b a) und des von dieſen (beiderſeits bei a) eingeſchloſſenen Winkels congruent ſein und darum beiderſeits bei r gleiche Winkel a r L und a r b haben. Da nun r a als Verlängerung des Radius C r normal zu der Peripherie des durch r um C zu beſchreibenden Kreiſes iſt, ſo ſind für den Punkt r die Eigenſchaften eines reflectirenden Punktes nachgewieſen, wenn man r a dazu als Einfallsloth, die Dreiecksſeite L r als den einfallenden Strahl, und die durch das Auge O gehende Dreiecksſeite r b als den reflectirten Strahl anſieht. Und was für den Punkt r nachgewieſen, gilt vermöge ihrer Conſtruction für alle Punkte, alſo auch für die Punkte R und R° der conſtruirten Curve.

§. 547. Die Ermittelung der reflectirenden Punkte auf anders als kreisförmig, z. B. elliptiſch gekrümmten Spiegeln greift in das Gebiet der höheren Mathematik und iſt ſo umſtändlich, daß die dabei aufgewandte Mühe zu dem Reſultat für das praktiſche Conſtruiren in keinem Verhältniſſe ſteht, weshalb hierbei der Weg des Probirens anzurathen iſt. Um aber hieraus entſpringenden Irrthümern möglichſt auszuweichen, wird im Folgenden überall nur der kreisförmig gekrümmte, convexe und concave Spiegel, als Kugel-, Cylinder- und Kegelſpiegel, in Betracht genommen werden.

Achtundzwanzigſtes Kapitel.

a) Convexe Spiegel.

§. 548. Ueber den ſcheinbaren Ort der Bilder in dieſen Spiegeln iſt Folgendes anzuführen:

Iſt in Fig. 153 (Taf. 24) der Kreisbogen um C die Projection eines convexen Kugelſpiegels, L ein Punkt einer Lichtflamme, ſo werden von den von L ausgehenden Strahlen L f, L r, L r^1, L r^2, L r^3 und L r^4 der erſtere, als der zum Spiegel normale, nach dem Mittelpunkte C gerichtete Hauptſtrahl, in ſich ſelbſt, die anderen aber in die Richtungen r O, r^1 O^1, r^2 O^2, r^3 O^3 und r^4 O^4 reflectirt, ſo daß ein Auge an den verſchiedenen Orten O, O^1, O^2, O^3, O^4 ein Spiegelbild von L ſtets in der Richtung des reflectirten Strahles O r, O^1 r^1 u. ſ. w. und zwar — dem zweiten der in §. 506 hervorgehobenen Geſetze gemäß — ſtets in den Schnittpunkten l, l^2, l^3 und l^4 der rückwärts verlängerten, reflectirten Strahlen mit dem verlängerten Hauptſtrahle L C ſieht. Hiernach fällt das Spiegelbild l für ein dem Hauptſtrahle möglichſt nahe befindliches Auge O ſehr nahe dem Halbirungspunkte F des mit dem Hauptſtrahle zuſammenfallenden Radius C f des Spiegels, während für ein ſeitab vom Hauptſtrahle befindliches Auge O^4 das Bild ſogar außerhalb des Spiegels, in l^4 fiele. Kein Bild aber fällt zwiſchen den Mittelpunkt C und den Halbirungspunkt F. — Der letztere wird, ohne hier die ſeinem Namen entſprechende Bedeutung zu haben, der Brennpunkt genannt.

Vergegenwärtigt man ſich nun, daß zur Bildung eines richtigen Urtheils über den Ort des Geſehenen jedesmal die Thätigkeit beider Augen erforderlich iſt, und man betrachtet in Fig. 154 (Taf. 24), wo a und c die in der Nähe des Hauptſtrahles L f befindlichen beiden Augen eines Beobachters B, und h und e die beiden ſeitab vom Hauptſtrahle befindlichen Augen eines andern Beobachters B^1 bedeuten, die Sehrichtungen der beiden Augenpaare und die Orte ihrer Schnittpunkte, ſo findet man, daß dort die mäßig convergirenden Sehrichtungen a γ und c δ ſich und den Hauptſtrahl beinahe in Einem Punkte l in der Nähe des Brennpunktes ſchneiden, wonach der Beobachter B bei l ein ziemlich vollſtändiges, nur verkleinertes Spiegelbild der Lichtflamme ſehen muß. Die ſehr ſtark convergirenden Sehrichtungen e π und h ϱ des andern Beobachters B^1 jedoch ſchneiden ſich ſchon in der Nähe des Punktes π; den Hauptſtrahl aber in zwei von einander entfernten Punkten l^1 und l^2.

Es wird der Beobachter B^1 daher ſowohl wegen der ſtarken Convergenz der Augenachſen überhaupt, als auch deswegen nur ein ſehr unvollkommenes Bild von L ſehen, weil von weitab vom Hauptſtrahle einfallenden Lichtbüſcheln deren Elemente nach der Reflexion zu weit zerſtreut werden. Während nämlich von den beiden gleich-breiten Lichtbüſcheln $\gamma L \delta$ und $\pi L \varrho$ das erſtere nach der Reflexion nur innerhalb der Grenzen γa und δc zerſtreut wird, wird das letztere innerhalb der ſtark divergirenden Grenzen πe und ϱh zerſtreut, derart, daß in das Sehloch je eines Auges des Beobachters B^1 ſtets nur ein kleiner Theil ſtark zerſtreuter Partikeln des von L kommenden Lichtes gelangen kann. Es kann daher der Beobachter B^1, auch wenn er nur mit einem Auge ſähe, ſtatt eines Spiegelbildes nur eine unbeſtimmt begrenzte glänzende Stelle in der Nähe des Punktes π wahrnehmen.

§. 549. Um ein einigermaßen vollkommenes Spiegelbild zu ſehen, müſſen demnach die beiden Augen ſo ſituirt ſein, daß der Schnittpunkt der Rückwärtsverlängerungen der reflectirten Strahlen in der Verlängerung des Hauptſtrahles liegt, und wird hierbei das Bild um ſo vollkommener ſein, je näher dieſer Schnittpunkt dem Brennpunkte fällt, d. h. je mehr die Augen des Beobachters ſich dem Hauptſtrahle nahe befinden.

§. 550. Die immerhin ſtarke Divergenz der von einem convexen Spiegel reflectirten Strahlen macht es auch erklärlich, daß das von einem ſolchen Spiegel hervorgebrachte Schirmbild einer Lichtflamme wegen Zerſtreuung ſeiner Theile kaum wahrnehmbar iſt.

§. 551. Hinſichtlich der ſcheinbaren Größe der Spiegelbilder iſt zu bemerken, daß, weil die Hauptſtrahlen zu convexen Spiegeln nicht, wie die zu ebenen Spiegeln, unter ſich parallel, ſondern nach dem Spiegel-Mittelpunkte gerichtet ſind, die in ihren Verlängerungen liegenden Bilder von Punkten gedrängter liegen müſſen, als dieſe an den Objecten ſelbſt, und daß daher die Bilder in ſolchen Spiegeln kleiner als die Objecte erſcheinen müſſen.

§. 552. Iſt nun der Kreisbogen um C in Fig. 155 (Taf. 24) die geometriſche Projection eines convexen Kugelſpiegels, P F die Projection eines Objectes, etwa eines Pfeiles, O die des Auges, und

Alles in Einer Ebene, der Reflexionsebene, gedacht, ſo ſind dem Vorhergehenden nach, wenn π und φ die reflectirenden Punkte für das Auge O ſind, p und f, als Schnittpunkte der rückwärts verlängerten reflectirten (Ausfall-) Strahlen mit den entſprechenden Hauptſtrahlen, die Bilder von P und F, und fallen die Bilder der zwiſchen dieſen gelegenen Punkte in eine ſchwache Curve zwiſchen p und f.

§. 553. Daß die Bilder in convexen Spiegeln, wie in ebenen Spiegeln, eine Verwechſelung des Rechts und Links zeigen, bedarf keiner beſondern Erklärung; weshalb aber und unter welchen Umſtänden die Bilder gerader Linien ſich als Curven darſtellen müſſen, werden die unten folgenden Beiſpiele verſtändlicher begründen.

§. 554. Faßt man die Beſchaffenheit von *cylindriſchen* und *koniſchen* Spiegeln ins Auge, ſo begreift man leicht, daß die Bilder in dieſen nicht wie in dem durchaus gleichartig gekrümmten *Kugelſpiegel* conſtruirt werden können, daß vielmehr die Bilder im *cylindriſchen Spiegel* der Länge deſſelben nach, wegen der Parallelität ſeiner Seiten, wie im *ebenen* Spiegel, und nur ſeiner Querausdehnung nach wie im *gekrümmten* Spiegel zu behandeln ſind; daß endlich vom *koniſchen Spiegel*, wegen ſeiner Verjüngung nach der Spitze, *nur bedingt* daſſelbe gilt, und hier außerdem die Bilder in der Nähe der Spitze verhältnißmäßig gedrängter und an ſich ſchmäler, als in der Nähe der Baſis auftreten müſſen.

§. 555. Für das Verfahren bei der perſpectiviſchen Conſtruction iſt ſchließlich noch zu bemerken, daß man mancher unten deutlicher werdenden Schwierigkeiten wegen genöthigt iſt, das Spiegelbild bald als hinter der Spiegelfläche, bald als auf ihr gelegen zu behandeln, was, da das an letzterem Orte aufgefaßte Bild mit dem am erſten Orte aufgefaßten perſpectiviſch zuſammenfällt, doch immer daſſelbe Reſultat ergeben muß. Auch erfordert die meiſt nothwendige Feſtſtellung der reflectirenden Punkte, oder der reflectirenden Linien, die Anwendung von geometriſchen Hülfsconſtructionen, wie denn hier überhaupt die Grundrißmethode in vielen Fällen die näher liegenden Conſtructionsmittel darbietet.

Beiſpiel 57.

§. 556. **Aufgabe.** Es iſt in Fig. 156 (Taf. 25) gegeben die Perſpective (P Hauptpunkt, PO Diſtanz, ap Grundlinie) einer im Punkte a auf der Grundebene ruhenden **ſpiegelnden Kugel** mit dem Mittelpunkte c; ferner die Perſpective FL einer in F auf der Grundebene ſtehenden **lothrechten Linie**, und außerdem der Strahlen-Verſchwindungspunkt N der als vor der Bildebene, 30° links der Verticalebene, und 35° über dem Horizonte ſtehend angenommenen **Sonne** — in Fig. 157 liegt die Grundrißprojection der gegebenen Stücke in halbem Maßſtabe geometriſch vor — es ſollen die Perſpectiven der Spiegelbilder der Linie FL und der Sonne conſtruirt werden.

§. 557. **Ausführung.** Nachdem man der Einfachheit wegen von allen Punkten der Linie FL zur Conſtruction ihres Spiegelbildes nur etwa drei charakteriſtiſch gelegene, nämlich ihre beiden Endpunkte F und L und den Punkt M, in gleicher Höhe mit dem Kugel-Mittelpunkte, auserſehen und von dieſen Punkten die Hauptſtrahlen nach c gezogen, erſcheint es, da die Spiegelbilder offenbar in dieſen Hauptſtrahlen liegen müſſen, am einfachſten, durch eine beſondere Hülfsconſtruction zuvor die Abſtände der Bilder vom Kugel-Mittelpunkte geometriſch feſtzuſtellen, und darauf die Perſpectiven dieſer Abſtände zu conſtruiren.

Um die geometriſchen Orte der Bilder und dadurch ihre geometriſchen Abſtände von C kennen zu lernen, bedarf es der Ermittelung der den Punkten F, M und L entſprechenden reflectirenden Punkte, und hierzu der Kenntniß der geometriſchen Lage der drei Stücke: „Object, Kugel-Mittelpunkt und Auge" zu einander innerhalb ihrer Reflexionsebenen.

In Fig. 158 (Taf. 25) liegen in FC, MC und LC die geometriſchen Abſtände der drei Punkte F, M und L vom Kugel-Mittelpunkte vor, nachdem hierher aus der in halbem Maßſtabe gegebenen Fig. 157 der Abſtand CF der Linie FL von der Kugel verdoppelt in αF übertragen, und FL gleich der aus Fig. 156 entnehmbaren geometriſchen Länge ab der Linie FL gemacht worden. Zugleich ergeben OF, OM und OL die geometriſchen Abſtände der drei Punkte F, M und L vom Auge, wenn ωF gleich zweimal OF (Fig. 157), und ωO gleich der Höhe pP (Fig. 156) des Auges gemacht worden.

In Fig. 159 (Taf. 25) ſind dieſe Ermittelungen zur Feſtſtellung der geometriſchen Orte der Bilder verwendet. Nachdem hier zunächſt der geometriſche Abſtand CO des Auges vom Kugel-Mittelpunkte dadurch feſt-

geſtellt worden, daß $\alpha\,\omega$ gleich zweimal C O (Fig. 157), und ω O, normal zu $\alpha\,\omega$, gleich der Höhe p P des Auges gemacht wurde, ſind ſowohl C F, C M und C L, als O F, O M und O L den gleichnamigen Stücken in Fig. 158 gleich gemacht worden, ſo daß hiernach die Eckpunkte der Dreiecke F C O, M C O und L C O als die Projectionen der je in ihren Reflexionsebenen geometriſch vorliegenden Stücke „Object, Spiegel-Mittelpunkt und Auge" zu behandeln ſind. Demnach ſind denn hier als reflectirende Punkte r und r^1 ermittelt, wovon der erſtere zufällig der reflectirende Punkt zugleich für L und M iſt; es ſind die Hauptſtrahlen F C, M C und L C durch die Rückwärtsverlängerungen der reflectirten Strahlen r^1 O und r O in φ, μ und λ, den geometriſchen Orten der Bilder von F, M und L, geſchnitten worden, ſo daß nunmehr in C φ, C μ und C λ die Abſtände der Bilder vom Kugel-Mittelpunkte geometriſch vorliegen.

Denkt man ſich nun, um dieſe Abſtände in Fig. 156 perſpectiviſch darzuſtellen, hier durch die drei Hauptſtrahlen eine lothrechte Ebene, ſo weicht dieſelbe, der Grundriß-Fig. 157 nach, von der Verticalebene um 27° nach rechts ab, und iſt demnach die durch Punkt Z lothrechte Linie ihre Grenzlinie (Z Hauptpunkt, tz herabgeſchlagener Geſichtspunkt und zugleich Theilpunkt für in Z verſchwindende, alſo horizontale Linien). V, Z und W darin ſind die Verſchwindungspunkte der drei Hauptſtrahlen, tv, tz und tw dazu die Theilpunkte, ſo daß, wenn man von den vorher ermittelten Abſtänden zwei, nämlich c φ und c λ, von c aus auf die lothrechte Kugelachſe, und den dritten, c μ, auf die horizontale Kugelachſe geometriſch auf- und vermittelſt der Theilpunkte auf die entſprechenden Hauptſtrahlen perſpectiviſch in c f, c m und c l überträgt, die Punkte f, m und l die Spiegelbilder der Punkte F, M und L, und eine durch ſie gezeichnete Curve das Spiegelbild der Linie F L ergeben.

Die Figur weiſet hiernach ſelbſt darauf hin, daß, um die Längen der §. 558.
Hauptſtrahlen F c, M c und L c geometriſch kennen zu lernen, es nicht der Fig. 158 bedurft hätte, da ſie ſich in der Conſtruction ſelbſt durch die nach den entſprechenden Theilpunkten zu ziehenden Hülfslinien F tv, M tz und L tw in den Längen c h, c k und c g nebenher ergeben. Inwiefern man für Fig. 159 auch den geometriſchen Abſtand O C des Auges vom Kugel-Mittelpunkte auf andere Weiſe, als vorher geſchehen, ermitteln konnte, iſt aus dem Folgenden zu entnehmen.

Nach der in Fig. 159 geſchehenen Feſtſtellung der geometriſchen Abſtände der Spiegelbilder φ, μ und λ von C ließen ſich in Fig. 156 die perſpectiviſchen Orte f, m und l derſelben einzeln auch ſo beſtimmen, wie dies beiſpielsweiſe nur mit Punkt m gezeigt iſt. Für die durch Punkt M,

durch den Kugel-Mittelpunkt und das Auge anzunehmende, natürlich ſchiefe Reflexionsebene iſt offenbar die von M durch c gehende Linie M Z die Grenzlinie (H^1 Hauptpunkt, O^1 herabgeſchlagener Geſichtspunkt), und das Stück e i davon die Perſpective des an ſich einen größten Kugelkreis bildenden Schnittes der Kugel mit dieſer Reflexionsebene. Vergleicht man nun die perſpectiviſche Lage der drei Stücke, auf welche es in der Reflexionsebene ankommt, das Auge, den Objectpunkt M und den durch C gehenden größten Kugelſchnitt, zu einander in Fig. 156 mit der geometriſchen Lage derſelben Stücke zu einander in Fig. 159, ſo ergiebt ſich, daß hier die Länge C O und die Winkel C O M, e O i und C O μ einzeln geometriſch gleich ſind den entſprechenden Stücken in Fig. 156, nämlich der Länge c O^1 und den Winkeln c O^1 M, e O^1 i und c O^1 m, und daß man hier alſo den Punkt m auch dadurch conſtruiren konnte, daß man an c O^1 in O^1 den aus Fig. 159 zu entnehmenden Winkel C O μ geometriſch antrug und dadurch die Grenzlinie M Z in m ſchnitt. — Auf gleiche Art ſind die Bildpunkte f und l zu conſtruiren. Es müſſen dabei die den Grenzlinien F V und L W entſprechenden herabgeſchlagenen Geſichtspunkte ſelbſtverſtändlich immer einen c O^1 gleichen Abſtand von c haben.

§. 559. Das Spiegelbild s der Sonne wird dem Vorhergehenden entſprechend conſtruirt. Wie die Grundriß-Fig. 157 zeigt, weicht die Richtung S N der Sonnenſtrahlen von der der Geſichtslinie O C um $52\frac{1}{2}°$ ab. Trägt man nun in Fig. 159 dieſen Winkel an O C in C an und zieht C S, ſo iſt dies die Projection des Hauptſtrahles der Sonne, und kommt es, da die Strahlen der letztern als parallel gelten, darauf an, denjenigen derſelben zu ermitteln, welcher unter zum Einfallslothe gleichen Einfalls- und Reflexionswinkeln nach O reflectirt wird. Als dieſer ergiebt ſich der im reflectirenden Punkte r^2 einfallende Strahl S r^2. Schneidet man hiernach den Hauptſtrahl S C durch die Rückwärtsverlängerung des reflectirten Strahles r^2 O in σ, ſo iſt C σ der geometriſche Abſtand des geſuchten Spiegelbildes von C, und kann deſſen Perſpective nunmehr in Fig. 156 innerhalb des Hauptſtrahles N c, wozu t*n* in der Grenzlinie N x der Theilpunkt iſt, conſtruirt werden. Es geſchieht dies dadurch, daß man hier c σ geometriſch gleich jenem Abſtande C σ (Fig. 159) macht und den über c verlängerten Hauptſtrahl N c durch eine von t*n* durch σ gezogene Linie in s, dem Spiegelbilde der Sonne, ſchneidet.

Beiſpiel 58.

§. 560. **Aufgabe.** Es ſind in Fig. 160 (Taf. 23) gegeben die Perſpective (P Hauptpunkt, PO Diſtanz, a p Grundlinie) eines

auf der Grundebene lothrecht ſtehenden ſpiegelnden Cylinders, deſſen Achſe durch Punkt a geht, und die Perſpective einer im Punkte R auf der Grundebene ſtehenden lothrechten Linie RL; ferner die Perſpective N des Strahlen-Verſchwindungspunktes der Sonne, unter der Annahme, daß dieſe vor der Bildebene 47° links der Verticalebene und 30° über dem Horizonte ſtehe; und endlich die Perſpective S der Sonne, unter der Annahme, daß dieſe hinter der Bildebene 47° links der Verticalebene und 30° über dem Horizonte ſtehe — in Fig. 161 liegt die Grundrißprojection der gegebenen Stücke in halbem Maßſtabe geometriſch vor — es ſollen die Perſpectiven der Spiegelbilder der Linie RL und der in zwei verſchiedenen Ständen gegebenen Sonne conſtruirt werden.

Ausführung. Wie ſchon in §. 554 hervorgehoben worden, ſind die Bilder in einem cylindriſchen Spiegel, der Längenausdehnung deſſelben nach, wie im ebenen Spiegel, und nur ſeiner Querausdehnung nach wie im gekrümmten Spiegel zu behandeln. Da nun hier das erſtgegebene Object vollends eine lothrechte, den Seiten des Cylinders parallele Linie iſt, ſo muß ihr Bild offenbar auch eine gerade, lothrechte Linie ſein und zwar hinter der Cylinderſeite zu liegen, oder vielmehr mit der Cylinderſeite zuſammenzufallen ſcheinen, welche ſich als die reflectirende Linie des Cylinders ergiebt. Dieſe Seite am Cylinder wird am einfachſten ermittelt, wenn man von allen durch das Auge, den Cylinder und durch Punkte der Linie RL denkbaren, mit dem Cylinder elliptiſche Schnitte bildenden Reflexionsebenen die eine in Betracht nimmt, welche, die Linie RL im Punkte K und den Cylinder in einem Kreiſe ſchneidend, mit der Horizontebene zuſammenfällt, und in welcher deshalb die genannten drei Stücke wie in der gegebenen Grundriß-Fig. 161 liegen. Stellt man dann hier den reflectirenden Punkt k feſt und überträgt den Winkel POk in die Conſtruction und beſtimmt dadurch hier den Punkt $\varkappa$ im Horizonte, oder, was daſſelbe ergiebt, überträgt man den Abſtand P$\varkappa$ aus Fig. 161 verdoppelt in P$\varkappa$ der Conſtruction — ſo muß eine hier durch $\varkappa$ gezogene Lothrechte $\varrho\,\delta$ die reflectirende, d. h. das Spiegelbild enthaltende Cylinderſeite ſein. §. 561.

Wie in §. 514 die Linie rW, ſo kann nun hier $\varrho\,\delta$ als Perſpective und Grenzlinie ($\varkappa$ Hauptpunkt, t$\varkappa$ herabgeſchlagener Geſichtspunkt) der Ebene angeſehen werden, in welcher alle reflectirten Strahlen (Ausfallſtrahlen) und deren Rückwärtsverlängerungen liegen, $\varkappa$ ſelbſt als Verſchwindungspunkt der reflectirten horizontalen Strahlen und ihrer Rückwärtsverlängerungen. Dem entſprechend iſt auch eine durch $\varrho\,\delta$ und die §. 562.

Linie R L anzunehmende lothrechte Ebene als diejenige aufzufaſſen, in welcher alle Einfallſtrahlen liegen, und iſt die durch M lothrechte N X die Grenzlinie (M Hauptpunkt und Verſchwindungspunkt der horizontal einfallenden Strahlen, t*m* herabgeſchlagener Geſichtspunkt) dazu. Die Spiegelbilder aller in dieſer Ebene anzunehmenden Punkte und Linien fallen in die Schnittlinie ϱ δ dieſer Ebene mit dem Cylinder, demnach auch das Bild einer Linie wie ϱ R. Faßt man endlich in Fig. 161 die Richtung des Einfallslothes a k und den Schnittpunkt Y ſeines Parallelſtrahles O Y mit der Bildebene ins Auge und beſtimmt hiernach Punkt Y im Horizonte der Conſtruction, ſo muß dieſer der Verſchwindungspunkt für alle Einfallslothe ſein.

§. 563. In der reflectirenden Cylinderſeite ϱ δ ſind nun die Bilder r und l der Punkte R und L auf verſchiedene Arten perſpectiviſch feſtzuſtellen:

1) Man kann, um etwa das Bild r zu finden, R als einen Punkt des horizontal einfallenden Strahles R ϱ behandeln. Da Inhalts des vorhergehenden Paragraphen das Bild der Linie R ϱ in die Linie ϱ δ fällt, ſo muß, wenn R ϱ über R unendlich verlängert wird, ϱ x das Bild dieſer unendlich langen horizontalen Linie ſein und ſelbſt als eine horizontale, in x verſchwindende Linie aufgefaßt werden. Macht man nun in ϱ x, wie dies ähnlich in §. 512, in der reflectirenden Linie r W des ebenen lothrechten Spiegels geſchah, ϱ r perſpectiviſch gleich ϱ R, ſo iſt in r das Bild von R gefunden. Es geſchieht dies, wenn man zuvor vermittelſt des Theilpunktes t*m* die perſpectiviſche Länge ϱ R mißt, dieſelbe in ϱ q geometriſch darſtellt, in ϱ q^1 überträgt und von hier vermittelſt des der Linie ϱ x entſprechenden Theilpunktes tx in ϱ r perſpectiviſch überträgt. — Das Bild l des Punktes L iſt ſelbſtverſtändlich ebenſo, unter Verwendung des horizontal einfallenden Strahles L λ zu finden.

§. 564. 2) Man kann aber auch, dem in §. 515 beim ebenen Spiegel angewandten Verfahren entſprechend, die Bilder r und l vermittelſt ihrer Höhenwinkel in der ſpiegelnden Cylinderſeite conſtruiren, nachdem man die Größe dieſer Winkel in einer Hülfsconſtruction, wie ſie in Fig. 162 (Taf. 23) vorliegt, ermittelt hat. Es iſt hier in ϱ δ die ſpiegelnde Cylinderſeite, in R L die gegebene Linie, in O das Auge, die beiden letzteren in ihren aus dem Grundriſſe (Fig. 161) entnehmbaren Abſtänden vom Punkte k — Alles in Eine Ebene, die Zeichnungsebene verſetzt — geometriſch dargeſtellt, und ſind dann r und l als reflectirende Punkte ermittelt. Von dieſen liegt, je nachdem man ſie als Punkte der Einfallſtrahlen R r und L l, oder als Punkte der Ausfallſtrahlen r O und l O auffaßt,

a) der Punkt r um 17° über den horizontalen Einfallſtrahl R ϱ

gehoben, der Punkt l um $12^1/_2{}^\circ$ unter den horizontalen Einfallſtrahl L λ geſenkt, oder

b) der Punkt r iſt um 17° unter die Horizontebene O $\varkappa$ geſenkt, und der Punkt l um $12^1/_2{}^\circ$ über dieſe gehoben.

Um nun in Fig. 160 der Auffaſſung a) gemäß zu verfahren, hat man in der Grenzlinie X N der Einfallſtrahlen-Ebene — indem man an M tm in tm oben den Winkel von 17°, unten den von $12^1/_2{}^\circ$ anträgt — in X den Verſchwindungspunkt für um 17° gehobene, in V den Verſchwindungspunkt für um $12^1/_2{}^\circ$ geſenkte Linien feſtzuſtellen und die beiden unendlich langen Perſpectiven R X und L V der Einfallſtrahlen zu ziehen, um damit in der Cylinderſeite $\varrho\,\delta$ die Punkte r und l abzuſchneiden.

Der Auffaſſung b) gemäß hingegen ſchneidet man in der $\varrho\,\delta$, da dieſe nach §. 562 (ſ. daſelbſt) ſelbſt die Grenzlinie der Ausfallſtrahlen-Ebene iſt, die Punkte r und l dadurch ab, daß man an $\varkappa$ $t\varkappa$ in $t\varkappa$ unterhalb den Winkel von 17°, oberhalb den Winkel von $12^1/_2{}^\circ$ anträgt.

3) Schneller noch findet man die Bildpunkte r und l, wenn man vorweg die den Punkten R und L entſprechenden Reflexionsebenen in Betracht nimmt. Da nämlich in dieſen offenbar auch die den Punkten r und l entſprechenden, an ſich horizontalen und dem §. 562 nach in Y verſchwindenden Einfallslothe liegen, ſo muß Y ein dieſen Ebenen gemeinſchaftlicher Punkt, und müſſen von R und L durch Y gezogene Linien die Perſpectiven und zugleich die Grenzlinien dieſer Ebenen ſein. Wenn nun aber die Bildpunkte r und l ſowohl in dieſen Ebenen, als in der ſpiegelnden Linie $\varrho\,\delta$ liegen ſollen, ſo müſſen ſie ſich in den Schnittpunkten der letztern mit R Y und L Y ergeben. — §. 565.

Faßt man hiernach das Viereck R e i L als die Perſpective einer lothrechten rechteckigen Fläche auf, welche verlängert durch die Cylinderachſe gehen würde, ſo muß, da die Bilder der in der Cylinderfläche liegenden Punkte e und i mit dieſen ſelbſt zuſammenfallen, die auf zwei Seiten von Curven begrenzte Figur r e i l das Spiegelbild der gedachten Fläche ſein. Zur Zeichnung der Curven e r und i l, welche die Bilder von e R und i L ſind, würden ſich die nöthigen mehreren Punkte dadurch ergeben, daß man zwiſchen e und R, und zwiſchen i und L beliebige Punkte annimmt, und deren Bilder wie vorher r und l conſtruirt. e r ϱ und i l λ ſind die Bilder der Dreiecke e R ϱ und i L λ. §. 566.

Die Linie ϱ r ferner iſt offenbar das Bild des ganzen Dreiecks ϱ R r; insbeſondere iſt ſie als das Bild des horizontalen Einfallſtrahles R ϱ, außerdem als die Perſpective der Rückwärtsverlängerung des R ϱ entſprechenden Ausfallſtrahles $\varrho\,\varrho^1$ aufzufaſſen ($\varphi\,\varrho$ iſt die Perſpective des

dem Strahle R ρ entſprechenden Einfallslothes). Der eine Punkt r iſt das Bild des Punktes R und des ganzen nach der Reflexion in das Auge gelangenden Einfallſtrahles R r, und zugleich die Perſpective des in das Auge gelangenden Ausfallſtrahles nebſt ſeiner Rückwärtsverlängerung (in Fig. 162: r O und r r°). Die Perſpective des R r entſprechenden Einfallslothes fällt mit R r zuſammen. —

Man ſieht ſchließlich, daß, wenn man nach Ermittelung der reflectirenden Linie von der cylindriſchen Wölbung des Spiegels abſieht und die drei weſentlichſten Stücke bei der Spiegelung, das Auge, die reflectirende Linie und die gegebene Linie als Object in Eine Ebene verſetzt, wie ſie hier in Fig. 162 innerhalb der Zeichnungsebene projicirt vorliegen, die für die Conſtruction der Bilder in ebenen Spiegeln geltenden Geſetze ausreichenden Anhalt auch für die Conſtruction der Bilder im cylindriſchen Spiegel geben.

§. 567. Den vorhergehenden Ausführungen entſprechend werden die Spiegelbilder n und s der Sonne in den gegebenen beiden Ständen conſtruirt.

In Fig. 161 ergiebt ſich zufällig der Punkt k zugleich als derjenige, welcher von allen parallel dem Hauptſtrahle (S) A einfallenden Sonnenſtrahlen einen, Z k nämlich, in das Auge O reflectirt; es muß deshalb auch in Fig. 160 das Sonnenbild n in der durch κ gehenden lothrechten reflectirenden Linie ρ δ liegen und, wie Fig. 162 erläutert, ſich darin um 30° über den Horizont erheben. Trägt man demnach an den Horizont in tκ oberhalb den Winkel von 30° an, ſo ſchneidet man dadurch die ρ δ in dem geſuchten Punkte n. Nach der oben in §. 565 gezeigten dritten Conſtructionsart jedoch kann man, da bei dem gegebenen Sonnenſtande Y auch hier der Verſchwindungspunkt des Einfallslothes u k iſt, den Punkt n in der Linie ρ δ einfacher durch eine von N durch Y gezogene Linie (die Grenzlinie und Perſpective der entſprechenden Reflexionsebene) abſchneiden.

§. 568. Zu der hinter der Bildebene gegebenen Sonne S iſt nach Fig. 161 der Punkt b der reflectirende, und liegt demnach das Sonnenbild s in Fig. 160 in der durch β Lothrechten und zwar, der Aufgabe gemäß, darin 30° über dem Horizonte. Man hat deshalb an β tβ in tβ oberhalb den Winkel von 30° anzutragen und dadurch jene Lothrechte in s zu ſchneiden. Nach der obigen dritten Conſtructionsart kann man jedoch auch vermittelſt des mit dem Einfallslothe b A parallelen Parallelſtrahles O W in Fig. 161 den Verſchwindungspunkt W der Einfallslothe ermitteln, denſelben nach Fig. 160 übertragen, und hier, von W nach S ziehend, jene durch β Lothrechte im Punkte s ſchneiden.

Beiſpiel 59.

Aufgabe. Es ſind in Fig. 163 (Taf. 27) die Perſpectiven (P Hauptpunkt, PO Diſtanz, Grundlinie durch Punkt A gehend) eines auf der Grundebene ſtehenden ſpiegelnden normalen **Kegels**, deſſen Achſe rA iſt, und einer im Punkte K auf der Grundebene ſtehenden lothrechten Linie KL gegeben — in Fig. 164 liegt die Grundrißprojection der gegebenen Stücke geometriſch vor — es ſoll die Perſpective des Spiegelbildes der geraden Linie in dem Kegel conſtruirt werden. §. 569.

Ausführung. Obgleich der Kegel gerade Seiten wie der Cylinder hat, ſo bilden dennoch die Spiegelbilder weder lothrechter, noch mit einer Kegelſeite paralleler Linien gerade Linien, da wegen der Krümmungsverſchiedenheit der Kegelfläche die den Punkten jener Linien entſprechenden reflectirenden Punkte in verſchiedene Kegelſeiten fallen. Nur die Bilder ſolcher geraden Linien, welche durch die Spitze des Kegels gehen und ſolcher, welche mit dem Auge und der Achſe des Kegels in Einer Ebene liegen, fallen ihrer ganzen Ausdehnung nach in je Eine Kegelſeite und bilden deshalb gerade Linien. §. 570.

Da hiernach das Bild der gegebenen Linie KL eine Curve bilden muß und man, um in dieſer die Bilder gewiſſer Punkte, wie k und l, feſtſtellen zu können, genöthigt iſt, die Curve als mehrfach gebrochene gerade Linie zu behandeln, ſo iſt die Aufgabe nur mit annähernder Richtigkeit zu löſen, und hierbei etwa folgendes, der Conſtruction der Spiegelbilder im Cylinder zu entlehnende Verfahren einzuſchlagen. §. 571.

Um wie am Cylinder zunächſt die reflectirende, wie geſagt, hier krumme Linie zu conſtruiren, in welche das Spiegelbild fällt und in welcher deshalb ſchließlich nur noch die perſpectiviſchen Orte der Bilder k und l der Endpunkte K und L der gegebenen Linie beſtimmt werden müſſen, erſcheint es am zweckmäßigſten, einzelne ihrer Punkte dadurch feſtzuſtellen, daß man durch beliebige Punkte der gegebenen Linie, etwa durch ihre Endpunkte und allenfalls auch durch einen Punkt R ihrer Verlängerung, ſolche Ebenen annimmt, welche rechtwinklig die der Linie KL nächſte Kegelſeite rv durchſchneiden und zugleich durch das Auge gehen, daß man dann in einer Hülfsconſtruction die elliptiſchen Schnitte dieſer Ebenen mit dem Kegel geometriſch darſtellt, auf ihnen die reflectirenden Punkte ermittelt, deren Perſpectiven auf dem Kegelmantel conſtruirt, und durch dieſe die reflectirende Linie zeichnet:

Da ſich die Kegelſeiten um 57° über die Grundebene erheben, ſo müſſen die gedachten Ebenen ſich um 33° unter die Grundebene neigen. Verlängert man deshalb in der Conſtruction den Radius v A bis α im Horizonte, macht hier α tα gleich α O, trägt an den Horizont in tα unterhalb den Winkel von 33° an und ſchneidet dadurch eine durch α Lothrechte in x, ſo ſind von K, L und R durch x gezogene Linien die Grenzlinien jener Ebenen. Die Stücke dieſer Grenzlinien, ſo weit dieſe innerhalb der Perſpective des Kegels und ſeiner Verlängerung nach unten liegen, ſind zugleich die Perſpectiven der vorerwähnten elliptiſchen Schnitte der Ebenen mit dem Kegel, und zwar iſt, wenn man vorläufig nur die Grenzlinie L x (H¹ Hauptpunkt, O¹ herabgeſchlagener Geſichtspunkt) in Betracht nimmt, a der Punkt, in welchem die durch L angenommene Ebene die Kegelachſe ſchneidet. Das Stück c f zeigt die größte perſpectiviſche Ausdehnung ihres Schnittes mit dem Kegel, während ſie in der That in dem Punkte e der Seite r v in den Kegel, und in dem in der Seite r y liegenden Punkte i aus dem Kegel tritt. — Die durch K angenommene Ebene tritt in e² in den Kegel und ſchneidet deſſen Achſe in a²; ihre Grenzlinie iſt K x (H² Hauptpunkt, O² herabgeſchlagener Geſichtspunkt). Die Grenzlinie der Ebene durch R kommt nicht zur Anwendung.

Um nun die elliptiſchen Schnitte der gedachten Ebenen mit dem Kegel geometriſch darzuſtellen, zunächſt etwa den der durch L angenommenen Ebene, wie er in Fig. 166 (Taf. 27) vorliegt, bedarf es einer beſondern, hier in Fig. 165 (Taf. 27) gegebenen Hülfsconſtruction. In dieſer iſt r m s der geometriſche Aufriß des Kegels, und ſind der Punkt L ſowohl, als das Auge O in ihren aus den Figuren 163 und 164 entnehmbaren Höhen und Abſtänden je von der Kegelachſe r A geometriſch dargeſtellt. Von einer hier von dem Punkte L aus rechtwinklig zu der ihm nächſten Kegelſeite r m, alſo 33° unter K s geneigten, durch den Kegel gezogenen Linie L i muß das Stück e i die Länge einer Sehne des elliptiſchen Schnittes ſein, um welchen es ſich handelt, und iſt a der Punkt, in welchem ſie die Kegelachſe ſchneidet. Die Länge einer zweiten Sehne derſelben Ellipſe findet ſich in dem Stück o o¹ einer vom Auge O durch den Punkt a gezogenen Linie O o¹. Noch andere Sehnen ergeben ſich in geraden Linien, welche von beliebigen Punkten einer durch das Auge und den Punkt L gedachten geraden Linie durch den Punkt a des Kegels gehen. Die Projection der gedachten Linie ſelbſt wäre hier nicht anwendbar; wohl aber einzelne in ihr anzunehmende Punkte, welche man geometriſch darſtellen kann, wenn man in [O] die Höhe und den Abſtand des Auges vom Punkte L feſtſtellt — wobei K [ω] gleich K O der Fig. 164 ſein muß —

Digitized by Google

und dann zunächſt [O] L zieht. Nimmt man hierauf in Fig. 164 in der Linie O K beliebig den Punkt B als einen Punkt jener Linie an, überträgt den Abſtand K B nach Fig. 165 in K [β] und ſchneidet hier die Linie [O] L durch eine durch [β] gezogene Lothrechte in [B]; ſo ergiebt dieſer Punkt die geometriſche Höhe des angenommenen Punktes; und überträgt man ferner aus Fig. 164 den Abſtand A B des Punktes B von der Kegelachſe geometriſch nach Fig. 165 in A β und macht hier eine durch β gezogene Lothrechte β B gleich [β] [B], ſo iſt in B die geometriſche Lage des angenommenen Punktes zum Kegel beſtimmt, und eine von B aus durch den Punkt a der Kegelachſe gezogene Linie B b¹ ergiebt in dem Stücke b b¹ die Länge einer dritten Sehne der geſuchten Ellipſe. Um die Länge einer vierten Sehne zu haben, nimmt man in Fig. 164 in der verlängerten Linie O K einen zweiten beliebigen Punkt T an, überträgt die Abſtände K T und A T nach Fig. 165 in K [τ] und A τ, ſchneidet hier ferner die verlängerte [O] L durch die Lothrechte [τ] [T] in [T], und macht dann die Lothrechte τ T gleich [τ] [T], wonach T die geometriſche Lage des zweiten beliebig angenommenen Punktes iſt und eine von T durch Punkt a der Kegelachſe gezogene Linie in dem Stücke d d¹ die Länge einer vierten Sehne zu dem elliptiſchen Schnitte ergiebt u. ſ. w. Dieſer ſelbſt iſt nunmehr in Fig. 166 durch Auftragung der Längen der vier durch den Punkt a gehenden Sehnen folgendermaßen geometriſch darzuſtellen:

Man zieht hier eine beliebige gerade Linie L i und trägt in ihr von L aus die aus Fig. 165 entnehmbaren Längen L e, L a und L i geometriſch auf, wonach e und i zwei Punkte der Ellipſe ſind. Man nimmt ferner aus Fig. 165 die Länge L [O] und a O als Radien in den Zirkel und ſchlägt mit ihnen in Fig. 166 um die Punkte L und a Kreisbogen, welche ſich im Punkte O¹ ſchneiden und hierin die in der Ebene des elliptiſchen Schnittes liegende Projection des Auges ergeben. Zieht man aus dieſem Punkte eine Linie durch a und überträgt auf dieſe von O¹ aus die aus Fig. 165 entnehmbaren Längen O o und O o¹, ſo erzielt man in o und o¹ zwei andere Punkte der Ellipſe. Man zieht hierauf von O¹ durch L eine gerade Linie und bezeichnet in ihr die vorher angenommenen Punkte B und T dadurch, daß man ſie von dem Punkte a aus durch Kreisbogen ſchneidet, deren Radien die Längen a B und a T der Fig. 165 ſind. Zieht man endlich von B und T aus Linien durch a und macht in ihnen B b und B b¹, und T d und T d¹ gleich den gleichnamigen Längen in der Fig. 165, ſo liegen in b, b¹, d und d¹ noch vier andere Punkte des geſuchten Kegelſchnittes vor und kann deſſen Umfang durch die erzielten acht Punkte nunmehr aus freier Hand gezeichnet werden. —

Nachdem hiernach auf dem Umfange der reflectirende Punkt 1° geometriſch feſtgeſtellt worden, muß dieſer nach Fig. 163 perſpectiviſch übertragen werden und findet ſich hierzu das einfachſte Mittel bei dem Vergleiche des eben in Fig. 166 Conſtruirten mit dem in Fig. 163 ſchon Vorhandenen. Zieht man nämlich in erſterer Figur aus dem Auge O^1 tangirende Geſichtslinien $O^1 f$ und $O^1 c$ an die Ellipſe, außerdem Geſichtslinien ſowohl nach den Punkten e und i, als nach den Punkten 9 und 10, in welchen Tangenten aus L die Ellipſe berühren und dadurch Punkte der Objectſchattengrenze am Kegel bezeichnen, ſo findet man, daß ſowohl der Abſtand $a O^1$, als die Winkel $a O^1 L$, $e O^1 i$ und $c O^1 f$ den gleichnamigen Stücken in Fig. 163 geometriſch gleich ſind, und daß man folgerecht in dieſer auch die Perſpective des reflectirenden Punktes 1° dadurch beſtimmen kann, daß man hier den Winkel $a O^1 1°$ dem gleichnamigen Winkel der Fig. 166 geometriſch gleich macht und dabei die Grenzlinie L x in 1°, dem erſten Punkte zu der geſuchten reflectirenden Linie, ſchneidet.

In gleicher Weiſe kann man beiläufig auch die aus Fig. 166 entnehmbaren Winkel $a O^1 9$ und $a O^1 10$ in Fig. 163 an $a O^1$ in O^1 geometriſch antragen, dadurch die Grenzlinie L x in 9 und 10 (Punkt 10 fällt auf den abgewandten Theil des Kegels) ſchneiden und hierdurch Punkte auf dem Kegelmantel beſtimmen, welche diejenigen Kegelſeiten bezeichnen, mit denen die Perſpectiven der Objectſchattengrenzen des Kegels zuſammenfallen, wenn L allein als ein leuchtender Punkt angeſehen wird. Bei dieſer Annahme wäre auch die durch e gehende Kegelſeite die am hellſten erleuchtete und der Punkt e darin der Ort des höchſten Lichtes.

Verfährt man nun analog dem Vorhergehenden bei der geometriſchen Darſtellung des elliptiſchen Schnittes, welchen die durch K angenommene Ebene mit dem Kegel bildet und wovon, ebenfalls durch die Hülfsconſtruction Fig. 165 ermittelt, in Fig. 167 (Taf. 27) ein ausreichendes Stück mit ähnlicher Benennung der entſprechenden Theile vorliegt, überträgt dann den hier feſtgeſtellten reflectirenden Punkt k° ſo, wie 1° übertragen wurde, perſpectiviſch nach Fig. 163, ſo hat man hier in k° einen zweiten Punkt der reflectirenden Linie beſtimmt.

Ein dritter Punkt dazu muß die Kegelſpitze r ſelbſt ſein, durch welche die durch Punkt R rechtwinklig zur Kegelſeite r v gedachte Ebene geht; denn da der Schnitt dieſer Ebene mit dem Kegel den kleinſten Kegelſchnitt, nämlich einen Punkt bildet, ſo fällt der reflectirende Punkt ſelbſtverſtändlich mit dieſem zuſammen.

Ein vierter Punkt endlich muß der in der nach unten verlängerten Kegelſeite r v liegende Berührungspunkt W der gegebenen, nach unten verlängert gedachten Linie K L mit dem verlängerten Kegel ſein.

Eine hiernach durch die vier reflectirenden Punkte W, k°, l° und r gezeichnete Curve iſt die reflectirende Linie, das Spiegelbild der Linie W R. Es fällt darin das Bild des Punktes W mit dieſem ſelbſt zuſammen. Die Bilder anderer Punkte der Linie W R ſind in der reflectirenden Curve nur annähernd richtig und zwar dadurch zu conſtruiren, daß man die letztere als in geradlinige, ebenen Spiegeln angehörige Stücke gebrochen auffaßt, von einem Punkte wie L, deſſen Bild l man ſucht, eine zu ihr rechtwinklige Linie L h zieht und deren Bild innerhalb des Stückes h r wie im ebenen Spiegel — wie dies im vorhergehenden Beiſpiele, im cylindriſchen Spiegel, mit dem Bilde ϱ r der Linie r R geſchah — ſucht. Es muß das Bild h l hierbei zwar in das Stück h r der reflectirenden Linie fallen, jedoch wie in der zu r h rechtwinkligen Ebene des über h verlängerten Einfallſtrahles L h liegend behandelt werden.

Um zunächſt den Punkt h ſelbſt und dadurch die perſpectiviſche Länge von L h, und dann die ihres Bildes h l zu beſtimmen, bedarf es der Conſtruction der in der Grenzlinie u z der letztgedachten Ebene liegenden Verſchwindungspunkte u für L h, und p für h l. Um aber die Grenzlinie u z zu finden, iſt — indem man das Stück l° r der reflectirenden Curve als gerade und der Kegelſeite r 5 angehörig annimmt — zuvor die durch dieſe Kegelſeite und den Punkt L denkbare, zu jener vorerwähnten Ebene normale Ebene ins Auge zu faſſen und deren Grenzlinie (n) g zu conſtruiren. Dieſe geht einerſeits durch den Verſchwindungspunkt n der Kegelſeite r 5, d. i. der Schnittpunkt der über r verlängerten r 5 mit der durch λ Lothrechten, andererſeits durch den Verſchwindungspunkt g des Einfallſtrahles L l°, welcher Punkt in der Linie L x dadurch abzuſchneiden iſt, daß man, nachdem in Fig. 166 zu L l° der Parallelſtrahl O^1 (g) gezogen worden, den Winkel a O^1 (g) von hier nach Fig. 163 über- und zwar an a O^1 in O^1 anträgt. Nachdem man durch n und g die Grenzlinie n g (H^3 Hauptpunkt, O^3 herabgeſchlagener Geſichtspunkt, O^3 n Parallelſtrahl zu der Kegelſeite r 5, z Verſchwindungspunkt für normale Linien) gezogen, ſchneidet man ſie in u durch Antragung des rechten Winkels an O^3 n in O^3, und kann nun jenen zu der Kegelſeite r 5 rechtwinkligen, ſie in h ſchneidenden Einfallſtrahl L u ziehen. Wenn aber z der Verſchwindungspunkt für die zu der Ebene der Kegelſeite normalen Linien iſt, ſo muß u z die Grenzlinie (H^4 Hauptpunkt, O^4 herabgeſchlagener Geſichtspunkt, t_u Theilpunkt für in u verſchwindende, t_p Theilpunkt für

in p verſchwindende Linien) der erſtgedachten, durch L und zugleich rechtwinklig durch die Kegelſeite r 5 gehenden Ebene ſein, und ihr Schnittpunkt p mit h r kann nunmehr als der Verſchwindungspunkt für das als mit L h in derſelben Ebene liegend aufzufaſſende Bild h l angeſehen und demnach verwandt werden.

Hiernach iſt nur noch h l perſpectiviſch gleich h L zu machen, und ſtellt man zu dem Zwecke vermittelſt des Theilpunktes tu die Länge von h L in h j erſt geometriſch dar und überträgt dieſelbe darauf vermittelſt des Theilpunktes tp perſpectiviſch in h l, wonach in l die Perſpective des Spiegelbildes des Punktes L vorliegt. —

Nach demſelben Verfahren iſt in der reflectirenden Linie auch das Bild k des Punktes K zu finden. Einen kürzeren Weg jedoch, ebenfalls annähernd richtig die vom normalen Einfallſtrahl abweichende Lage des Bildpunktes zu beſtimmen, wenn erſt die reflectirende Linie vorhanden iſt, zeigt die Hülfsconſtruction, Fig. 168 (Taf. 27), wo, um den Ort etwa des Spiegelbildes k zu finden, in r 6 die als gerade Kegelſeite aufgefaßte reflectirende Linie dargeſtellt und der Punkt k° darin dadurch feſtgeſtellt iſt, daß in Fig. 163 durch eine von k° nach x im Horizonte gezogene perſpectiviſch horizontale Linie die Kegelachſe im Punkte 4 geſchnitten, der Abſtand r 4 dieſes Punktes von der Spitze nach Fig. 168 übertragen und darauf hier die Kegelſeite r 6 durch eine durch Punkt 4 gezogene Horizontale in k° geſchnitten wurde. Nimmt man hiernach aus Fig. 167 die Längen k° K und k° O^2 als Radien in den Zirkel und ſchlägt damit in Fig. 168 Kreisbogen um k° als Mittelpunkt, und ſchneidet dieſe durch andere Kreisbogen, wozu die Spitze r der Mittelpunkt und die Längen r K und r O in Fig. 165 die Radien ſind, in den Punkten (K) und O^5, ſo bezeichnen dieſe geometriſch die Höhe und den normalen Abſtand des Punktes K der gegebenen Linie K L und des Auges von der reflectirenden Kegelſeite — in der Anordnung, welche dieſe drei Stücke, in Eine Ebene, die Zeichnungsebene verſetzt, zu einander haben würden — und es kann nun auf der Kegelſeite der für das Auge O^5 mit dem ſcheinbaren Bildpunkte 8 zuſammenfallende, wirklich reflectirende Punkt k conſtruirt werden, wie wenn r 6 einem ebenen Spiegel angehörte. Hiernach iſt die Kegelachſe durch eine durch k zu ziehende Horizontale im Punkte 3 zu ſchneiden, das Maß r 3 nach Fig. 163 in die Kegelachſe in r 3 geometriſch zu übertragen und hier wieder die verlängerte Kegelſeite r 6 durch eine von x im Horizonte durch Punkt 3 der Achſe gezogene perſpectiviſch horizontale Linie im Punkte (k) zu ſchneiden, wonach in dieſem die Perſpective des Bildes von K vorliegt.

In Fig. 168 ist auf dieselbe Art, nur daß dabei die Linie r 6 als Kegelseite r 5 behandelt ist, auch der Ort des Bildpunktes von L geometrisch festgestellt und die der Fig. 163 analoge Lage der Punkte 1°, h und l vorgeführt. Das Stück h (l) der hier als verlängerter Hauptstrahl auftretenden Linie (L) (l) ist hier dasjenige, als dessen Perspective in Fig. 163 h l behandelt worden ist. —

Die Uebertragung der in Fig. 163 construirten Punkte l und (k) von den geraden Kegelseiten r 5 und r 6 auf die krumme reflectirende Linie W k° l° r muß schließlich nach Gutdünken geschehen. Der Punkt l kann dabei wohl ohne erheblichen Verstoß gegen die Richtigkeit in seiner Lage belassen werden, wogegen der Punkt k in der Curve um ein Geringes der Kegelspitze näher liegen muß, als der Punkt (k).

Neunundzwanzigstes Kapitel.

b) Concave Spiegel.

§. 572. Der scheinbare Ort des subjectiven Spiegelbildes eines leuchtenden Punktes liegt im concaven wie im convexen Kugelspiegel im Schnittpunkte des Hauptstrahles mit dem reflectirten Strahle. Ist L in Fig. 169 (Taf. 24) ein leuchtender Punkt, O das Auge, ist der Kreisbogen V X um C die Projection eines convexen, der Kreisbogen A N um C die Projection eines concaven Kugelspiegels, Alles in Einer Ebene, der Reflexionsebene, liegend, so ist L C zu beiden Spiegeln der Hauptstrahl, r und r^1 sind die reflectirenden Punkte, und fällt das dem concaven Spiegel entsprechende Bild von L in den Schnittpunkt l^1 des Hauptstrahles mit dem reflectirten Strahle r^1 O, in diesem Falle vor den Spiegel, während das dem convexen Spiegel entsprechende Bild von L hinter den Spiegel, in den Punkt l fällt.

§. 573. Der scheinbare Ort des Bildes im concaven Spiegel kann ein sehr verschiedener sein; er kann wie in Fig. 169 vor dem Spiegel, ja in unendlicher Entfernung vor demselben, jedoch auch, wie die nachfolgend angeführten Fälle zeigen werden, hinter dem Spiegel

liegen, und es kann je nach der Entfernung des Objectes vom Spiegel das Bild deſſelben umgekehrt, vergrößert oder verkleinert erſcheinen:

§. 574. 1) Iſt in Fig. 170 (Taf. 24) der Kreisbogen 9 h 4 um C die Projection eines concaven Kugelſpiegels und iſt als Object ein leuchtender Punkt in unendlicher Entfernung, z. B. der Mittelpunkt der Sonne S gegeben, deren Strahlen S h, (S^1) 1, (S^2) 2 u. ſ. w. als parallel anzuſehen ſind, ſo mag ſich das Auge in C, in O^1, O^2, O^3, O^4 oder in O^5 befinden, es fallen die Schnittpunkte der bei h, 1, 2, 3, 4 u. ſ. w. reflectirten einzelnen Strahlen mit dem durch C gehenden Hauptſtrahle ſämmtlich vor den Spiegel, in die Nähe eines gewiſſen Punktes F, welcher der Halbirungspunkt der Strecke des Hauptſtrahles zwiſchen der Fläche des Spiegels und deſſen Krümmungs-Mittelpunkte C iſt.

Wie vor dem convexen Spiegel zeigt ſich dem in der Nähe des Hauptſtrahles befindlichen Auge ein vollkommeneres ſubjectives Bild, als dem ſeitab vom Hauptſtrahle befindlichen, und iſt vollends bei dem Sehen mit beiden Augen — wenn hier z. B. O^1 und O^2 als die beiden Augen Eines Beobachters angeſehen werden — der Eindruck der beiden vereinigten Bilder ein um ſo vollkommenerer, je näher der Schnittpunkt der entſprechenden beiden reflectirten Strahlen mit einander und mit dem Hauptſtrahle dem Punkte F liegt. Betrachtet man im Gegenſatze hierzu O^3 und O^4 als die beiden Augen eines andern Beobachters, ſo fällt von den ihnen entſprechenden Bildern das eine nahe bei F, das andere in s^4, und muß dieſer Beobachter aus ähnlichen Gründen, wie ſie bei dem convexen Spiegel angeführt wurden, den Eindruck eines unvollkommenen Bildes empfangen, zumal der Schnittpunkt der beiden Sehrichtungen ſelbſt weit außerhalb des Hauptſtrahles, im Punkte 8, liegt.

§. 575. Wie Fig. 170 veranſchaulicht, findet die Kreuzung der mehrſten reflectirten Strahlen, zumal derjenigen, welche unter ſehr ſpitzen Winkeln in der Nähe des Punktes h reflectirt werden, dicht bei dem Punkte F ſtatt, und es tritt hier deshalb außer einer bedeutenden Wärmehäufung, derenwegen der Punkt F der Brennpunkt des Spiegels genannt wird, eine beſonders ſtarke Lichtconcentrirung

ein. Dieſe Lichterſcheinung, welche übrigens, jedoch mit geringerer Intenſität, den Raum zwiſchen dem Brennpunkte und der Spiegelfläche einnimmt, iſt, wenn in der Figur die Punkte 9 und 4 die Grenzen des Spiegels bezeichnen, beiderſeits durch eine Curve, die ſogenannte katakauſtiſche oder Brennlinie begrenzt, wie ſie in der Figur einerſeits zwiſchen den Punkten 9 und F gezeichnet, andererſeits durch die, aus der Kreuzung der bei 4, 3, 2, 1 u. ſ. w. reflectirten Strahlen entſtehende, gebrochene Linie 4. 8. 7. F erklärt vorliegt.

Wenn ſchon jedes ſpiegelnde cylindriſche Gefäß auf ſeinem Boden dieſe Lichterſcheinung zu zeigen vermag, ſo iſt dieſelbe noch vollkommener zu beobachten, wenn man die von einem wirklichen Hohlkugel-Spiegel reflectirten Strahlen der Sonne in Dampf oder Rauch auffängt. Es bildet hierin alsdann die Geſammtheit jener Strahlen eine ſehr helle, einem Kegel mit eingewölbten Seiten ähnliche Figur, die an der Spitze, am Brennpunkte, beſonders lichtſtark iſt. Fängt man dieſe Lichterſcheinung aber, ſtatt in jenen Medien, auf einem Schirme auf, ſo tritt ſie auf dieſem, wenn die Verlängerung ſeiner Fläche gerade durch den Brennpunkt geht, als ein helles objectives Bild der Sonne auf. Wird der Schirm dem Spiegel genähert oder von dieſem entfernt, d. h. außer der Brennweite (h F) gerückt, ſo wird das objective Bild größer, weniger hell und zugleich unbeſtimmter begrenzt, und iſt alsdann nur in dem Falle noch ein objectives, wenn auch unvollkommenes Sonnenbild, wenn der Spiegel aus einer völligen Halbkugel beſteht. Iſt letzteres nicht der Fall, ſo bekommt das Bild eine der des Spiegels ſelbſt ähnliche Begrenzung.

Wegen der Fähigkeit, das Licht und die Wärme der Strahlen im Brennpunkte bis zu dem Grade zu concentriren, daß leicht brennbare Körper dadurch zu entzünden ſind, heißen Spiegel dieſer Gattung Brennſpiegel. Da aber, wie geſagt, hauptſächlich die ſpitzwinklig reflectirten Strahlen zu jener Licht- und Wärmehäufung beitragen, und die vom Rande des Spiegels unter großen Winkeln reflectirten Strahlen wirkungslos ſeitabgehen, pflegt man Brennſpiegel nicht allein nur in Bogen von wenigen Graden, ſondern

außerdem auch in einer ſolchen Krümmung herzuſtellen, bei welcher auch ſämmtliche Randſtrahlen nach dem Brennpunkte reflectirt werden, nämlich in der Krümmung der Parabel. —

§. 576. 2) Iſt umgekehrt als Object ein leuchtender Punkt gerade im Brennpunkte F des Spiegels gegeben, und man nimmt an Stelle des Hohlkugel-Spiegels ſogleich den vollkommeneren paraboliſchen Hohlſpiegel in Betracht, ſo müſſen, den vorhergehenden Paragraphen zufolge, die von F aus auf den Spiegel einfallenden Strahlen, z. B. F 1, F 2 u. ſ. w. in parallelen Richtungen, wie 1 (S^1), 2 (S^2) u. ſ. w., reflectirt werden und kann ein in dieſem Strahlencylinder befindliches Auge ein eigentliches ſubjectives Bild nicht wahrnehmen, weil wegen des Parallelismus der reflectirten Strahlen deren Schnittpunkt mit dem Hauptſtrahle h (S), d. i. das Bild, in unendliche Entfernung fällt.

Fängt man aber dieſen Cylinder reflectirter Strahlen auf einem Schirme auf, ſo zeigt ſich auf dieſem, gleichviel, ob er dem Spiegel nahe oder fern iſt, eine Lichterſcheinung von einer dem Spiegel gleichen Durchmeſſergröße und Begrenzung.

§. 577. 3) Iſt als Object ein leuchtender Punkt L in der Nähe des Hohlkugel-Spiegels, jedoch in größerer Entfernung davon, als deſſen Mittelpunkt C, gegeben, ſo fällt der ſcheinbare Ort des ſubjectiven Bildes l, wie Fig. 171 (Taf. 24) zeigt — das Auge mag ſich in O oder O^1 befinden — zwiſchen den Mittelpunkt C und den Brennpunkt F, und zwar deſto näher dem letzteren, je ferner L vom Mittelpunkte iſt, und deſto näher dem Mittelpunkte, je näher L ſelbſt dieſem iſt, ſo daß, wenn Punkt L im Mittelpunkte ſelbſt gegeben iſt, ſein Bild l mit ihm ſelbſt zuſammenfällt. Denn alsdann fallen der Hauptſtrahl, der einfallende und der reflectirte Strahl ſämmtlich in eine vom Auge durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie.

§. 578. Nimmt man hiernach ein körperliches Object, etwa einen Pfeil P L in Betracht, ſo fällt für einen, gleichviel, ob in O oder in O^1 befindlichen Beobachter das Bild von L in den Punkt l, das Bild des Punktes P in den Punkt p; ſo daß p l jedem Beobachterauge, in welches überhaupt reflectirte Strahlen gelangen

können, als das ſubjective, vor dem Spiegel liegende, verkleinerte und umgekehrte Bild von PL erſcheint. Und nimmt man an Stelle des Pfeiles ein ſtark leuchtendes Object, etwa eine Kerzenflamme in Betracht, ſo zeigt ſich, wenn man durch die Punkte l und p einen durchſcheinenden Schirm ſtellt, auf dieſem für jeden Beobachterort als objectives Bild eine verkleinerte und umgekehrte Kerzenflamme.

4) Iſt umgekehrt in Fig. 171 als Object ein leuchtender Punkt l zwiſchen dem Brennpunkte F und dem Mittelpunkte C gegeben, ſo iſt aus dem Vorhergehenden zu folgern, daß der ſcheinbare Ort des ſubjectiven Bildes jenſeits des Mittelpunktes liegen muß. Denn da die reflectirten Strahlen eines im Mittelpunkte C befindlichen leuchtenden Punktes nach C ſelbſt gerichtet ſind, die reflectirten Strahlen eines im Brennpunkte F befindlichen leuchtenden Punktes aber, wie oben in §. 576 geſagt iſt, parallel ausfallen, ſo muß der ſcheinbare Ort des Bildes eines zwiſchen C und F befindlichen leuchtenden Punktes zwiſchen dem Mittelpunkte C und dem unendlich entfernten Schnittpunkte der parallelen Strahlen liegen. Es muß deswegen aber auch ein Theil der die Bildung eines vollkommenen Spiegelbildes nicht zulaſſenden Umſtände, wie ſie in §. 576 erwähnt ſind, eintreten, und kann ein annähernd vollkommenes ſubjectives oder objectives, und zwar vergrößertes und umgekehrtes Bild nur dann wahrgenommen werden, wenn einerſeits der als Object dienende leuchtende Punkt dem Mittelpunkte C hinlänglich nahe gegeben iſt, und andererſeits das Auge oder der Schirm ſich innerhalb des dann auftretenden Kegels reflectirter Strahlen entſprechend nahe dem Mittelpunkte C befinden. §. 579.

5) Iſt endlich das Object innerhalb der Brennweite des Spiegels gegeben, ſo zeigt ſich, ſcheinbar hinter dem Spiegel gelegen, ein ſehr vollkommenes ſubjectives Spiegelbild, ähnlich dem im ebenen Spiegel, aufrecht, mit der Verwechſelung des Rechts und Links, jedoch gekrümmt und vergrößert. Iſt z. B. in Fig. 172 (Taf. 24) als Object ein Pfeil PL gegeben, ſo fallen die Bilder ſeiner Enden P und L, wie im ebenen Spie- §. 580.

gel, in die Schnittpunkte p und l der verlängerten Hauptstrahlen C h und C i mit den Rückwärtsverlängerungen der reflectirten Strahlen π O und λ O. Da die Hauptstrahlen divergirende Radien des Spiegels sind, so muß das Bild größer als das Object erscheinen und zwar um so größer, je näher sich dieses am Brennpunkte befindet. Rückte das Object in den Brennpunkt selbst, so wäre sein Bild unendlich groß und unendlich entfernt (siehe oben §. 576); befände es sich an der Spiegelfläche, so fiele sein Bild mit ihm zusammen.

Das auf einem vor dem Spiegel aufgestellten Schirme aufgefangene Bild einer innerhalb der Brennweite als Object gegebenen Flamme tritt auf, wie das vom ebenen Spiegel herrührende Schirmbild, als eine Lichterscheinung von einer der des Spiegels ähnlichen Begrenzung, und in einer von der Entfernung des Schirmes und der des Objectes vom Spiegel abhängigen Größe. Wegen der Divergenz der reflectirten Strahlen kann es von nur geringer Helligkeit sein.

§. 581. Bei der Beobachtung des vom Hohlspiegel hervorgerufenen subjectiven Spiegelbildes mit beiden Augen tritt, ausgenommen bei der im vorhergehenden Paragraphen angeführten Stellung des Objectes zum Spiegel, meist der Fall ein, daß die Netzhautbilder in den beiden Augen eine größere Verschiedenheit haben, als bei dem Sehen nach dem Objecte selbst. Da außerdem das jedem Auge entsprechende subjective Bild scheinbar an einem andern Orte im Raume auftritt, so vermögen die Augen erst nach einiger Anstrengung, und auch nicht immer, die Achsenrichtung und die Einrichtung zu finden, in welcher sich für den Beobachtenden die beiden Bilder zu der Wahrnehmung Eines, in seinen Theilen dann meist doch noch etwas verschobenen, subjectiven Bildes vereinigen. Ganz besonders gilt dies von dem, von einem zwischen dem Mittelpunkte und dem Brennpunkte gegebenen Objecte herrührenden subjectiven Bilde, da hier die den beiden Augen entsprechenden einzelnen Bilder, an sich schon unvollkommen und sehr verschieden von einander, räumlich besonders weit aus einander fallen.

Beiſpiel 60.

Aufgabe. Es iſt in Fig. 173 (Taf. 26) in der Ellipſe um C die Perſpective (P Hauptpunkt, P O Diſtanz, a p Grundlinie) der Begrenzung einer im Punkte a auf der Grundebene ruhenden **Halbkugel gegeben, deren innere Fläche ſpiegelt**; ferner die Perſpective K L einer im Punkte K auf der Grundebene ſtehenden **lothrechten geraden Linie** — in Fig. 174 liegt in halbem Maßſtabe die geometriſche Grundrißprojection der gegebenen Stücke vor — es ſoll die Perſpective des Spiegelbildes der geraden Linie conſtruirt werden. §. 582.

Ausführung. Es iſt am zweckmäßigſten, wie bei dem converen Kugelſpiegel, in der gegebenen geraden Linie außer ihren Endpunkten K und L noch einen dritten, und zwar den in gleicher Höhe mit dem Mittelpunkte C des Kugelſpiegels gelegenen Punkt M zur Conſtruction auszuerſehen, und darauf in einer, in Fig. 175 (Taf. 26) vorgeführten Hülfsconſtruction geometriſch feſtzuſtellen: 1) in C O den Abſtand des Auges vom Mittelpunkte des Spiegels, 2) in den Maßen L C, M C und K C die Abſtände der auserſehenen drei Punkte der gegebenen geraden Linie vom Punkte C, und 3) in den Maßen (O) L, (O) M und (O) K die Abſtände des Auges von denſelben drei Punkten — um dann ſchließlich in einer andern Hülfsconſtruction, wie ſie Fig. 176 zeigt, die **geometriſchen Abſtände der in den Hauptſtrahlen gelegenen Bilder** l, m und k vom Mittelpunkte C zu ermitteln. §. 583.

Iſt dieſes Alles nach Anleitung des §. 557 geſchehen, und man zieht, um wie in jenem Beiſpiel 57 die **geometriſchen Abſtände** der Bilder von C nunmehr **perſpectiviſch** darzuſtellen, in Fig. 173 von den Punkten L, M und K durch C hindurch die Hauptſtrahlen, ſo ergiebt ſich zunächſt für den horizontalen Hauptſtrahl M C der links im Horizonte liegende Punkt Z als Verſchwindungspunkt, und tz im Horizonte als der entſprechende Theilpunkt; die Verſchwindungspunkte W und V aber der anderen beiden Hauptſtrahlen nebſt den entſprechenden Theilpunkten tw und tv liegen ſämmtlich in einer durch Punkt Z lothrechten Grenzlinie. Demnach ſind denn in dieſen Hauptſtrahlen die aus Fig. 176 hervorgegangenen geometriſchen Abſtände C l, C m und C k der Bildpunkte vom Spiegel-Mittelpunkte C leicht perſpectiviſch darzuſtellen, und ergeben ſich dadurch die Punkte l, m und k als die Perſpectiven der Spiegelbilder der Punkte L, M und K, und eine durch jene Punkte gezeichnete Curve — deren Richtigkeit man alleufalls durch Conſtruction der Bilder noch mehrerer zwiſchen L

und K anzunehmenden Punkte ſichern kann — als das Spiegelbild der gegebenen geraden Linie.

Beiſpiel 61.

§. 584. **Aufgabe.** Es iſt in Fig. 177 (Taf. 26) die Perſpective JHG BAK (P Hauptpunkt, PO Diſtanz, pG Grundlinie) der untern Hälfte eines mit ſeiner Seite KG auf der Grundebene liegenden **Cylinders**, deſſen Achſe C^1C^2 mit der Bildebene zuſammenfällt und **deſſen innere Fläche ſpiegelt**, gegeben; ferner die Perſpective FL einer im Punkte F auf der Grundebene ſtehenden und den Cylinder im Punkte N berührenden **lothrechten geraden Linie** — in Fig. 178 liegt die Grundrißprojection der gegebenen Stücke in halbem Maßſtabe geometriſch vor — es ſoll die Perſpective des Spiegelbildes ſowohl des Stückes LN der gegebenen Linie, als der gegebenen **Begrenzung des Cylinders** ſelbſt, ſoweit davon überhaupt ein Spiegelbild ſichtbar werden kann, conſtruirt werden.

§. 585. **Ausführung.** Um, was als das Zweckmäßigſte erſcheint, zunächſt das Bild des Punktes L zu conſtruiren, muß zuvor vermittelſt einer geometriſchen Hülfsconſtruction, wie ſie in Fig. 179 (Taf. 26) vorliegt, diejenige Cylinderſeite (reflectirende Linie) feſtgeſtellt werden, in welche dieſes Bild fällt. Zu dem Zwecke wird in Fig. 179 zuvörderſt neben einem dem Querſchnitte des Cylinders entſprechenden Halbkreiſe um C, in dem aus Fig. 178 entnehmbaren Abſtande (2 mal PO) von CG, eine Lothrechte ωO errichtet und deren Länge gleich der aus Fig. 177 erſichtlichen Höhe pP des Auges gemacht; ferner wird eine den Halbkreis in N berührend zu ziehende Lothrechte FL gleich der geometriſchen Länge der in Fig. 177 perſpectiviſch gegebenen Linie FL gemacht. Ermittelt man hierauf in der Peripherie des Halbkreiſes, L als Object und O als Auge genommen, den reflectirenden Punkt l, ſo bezeichnet dieſer im Cylinder-Querſchnitt geometriſch den Ort derjenigen Cylinderſeite, in welcher das eigentliche Bild von L zu ſuchen iſt. Die Perſpective aber dieſer Cylinderſeite iſt in Fig. 177 dadurch zu conſtruiren, daß man hier die Perſpective 31 einer der Bildebene parallelen horizontalen Linie darſtellt, welche in der Grundebene perſpectiviſch ſo weit hinter der Cylinderſeite KG liegt, wie in Fig. 179 der Punkt 3 — in welchem die Rückwärtsverlängerung von 1O die Grundebene Fω ſchneidet — geometriſch weit links von G liegt; denn offenbar muß in der Conſtruction die geſuchte reflectirende Cylinderſeite mit dieſer Linie 31 perſpectiviſch zuſammenfallen.

Um hiernach den Ort des eigentlichen Bildpunktes l in der reflectirenden Cylinderſeite zu beſtimmen, kann man dieſe als reflectirende Linie eines ebenen Spiegels auffaſſen und damit in einer andern geometriſchen Hülfsconſtruction, Fig. 180, folgendermaßen verfahren: Nachdem man hier in $r r^1$ die reflectirende Linie, und zwar in der Länge des geometriſchen Abſtandes m p (Fig. 177) der gegebenen Linie F L von der Verticalebene dargeſtellt, darauf in $r O^1$, normal zu $r r^1$, die aus Fig. 179 entnehmbare Länge des reflectirten Strahles l O — alſo den normalen Abſtand des Auges von der reflectirenden Cylinderſeite — und endlich in $r^1 L$, normal zu $r r^1$, die ebenfalls aus Fig. 179 entnehmbare Länge des einfallenden Strahles L l — alſo den normalen Abſtand des Punktes L von der reflectirenden Cylinderſeite — aufgetragen, ergiebt ſich, wenn man $r r^1$ als Spiegel, O^1 als Auge und L als Object nimmt, l als der reflectirende Punkt, und zwar in dem Abſtande l r von der Verticalebene. Die Perſpective von l findet man aber in Fig. 177, wenn man jenen Abſtand r l hierher in die Cylinderachſe in $\varrho\,\lambda$ geometriſch überträgt, um λ die Perſpective eines zur Cylinderachſe normal ſtehenden Cylinderkreiſes conſtruirt und mit demſelben die reflectirende Cylinderſeite 3 1 in l, als dem geſuchten Spiegelbilde von L, ſchneidet. —

Wie das Spiegelbild l, ſind nun auch die Spiegelbilder a, b, e und g des Punktes N und der in der Peripherie der Cylinderbaſis beliebig zur Conſtruction auserſehenen Punkte B, E und G zu conſtruiren, und liegen die dabei nöthigen Hülfsconſtructionen in den Figuren 179 und 180 mit vor. Es ergeben ſich ſchließlich i b als Spiegelbild eines Stückes der Cylinderſeite A B, die Curve l a als Bild des Stückes L N der gegebenen geraden Linie F L, und die Curve b e g, zum Theil durch den Cylinder ſelbſt verdeckt, als Bild der Peripherie B E G H der Cylinderbaſis.

Beiſpiel 62.

Aufgabe. Es iſt in Fig. 181 (Taf. 27) die Perſpective (P Hauptpunkt, P O Diſtanz, p r Grundlinie) eines mit ſeiner Spitze auf der Grundebene im Punkte r ruhenden, hohlen und zum Theil ausgeſchnittenen **Kegels** von kreisförmiger Grundfläche, deſſen Achſe mit der Bildebene zuſammenfällt und deſſen Höhendurchſchnitt das Dreieck r m s in Fig. 183 iſt, gegeben; außerdem die Perſpective L eines **leuchtenden Punktes**, deſſen perſpectiviſche Horizontalprojection a u der Grundebene der Punkt K iſt — in Fig. 182 liegt die geometriſche Grundriß-Projection der gegebenen Stücke vor — es §. 586.

ſoll die Perſpective des Spiegelbildes des Punktes L auf der **inneren ſpiegelnden Kegelfläche** conſtruirt werden.

§. 587. Die **Ausführung** geſchieht nach Anleitung der im Beiſpiel 59 gezeigten Conſtruction des Spiegelbildes im converen Kegelſpiegel. Da man aber auch hier ſchließlich darauf angewieſen iſt, mit einer Curve, der reflectirenden Linie, wie mit einer geraden Linie zu verfahren, ſo kann auch in dieſer Aufgabe der perſpectiviſche Ort des Spiegelbildes nur annähernd richtig ermittelt werden.

Wie in dem angeführten Beiſpiele iſt auch hier zunächſt die reflectirende Linie, und in dieſer alsdann der Ort des Bildes, wie in der reflectirenden Linie eines ebenen Spiegels, zu ſuchen. Man nimmt zu erſterem Zwecke die durch das Auge, durch den gegebenen Punkt L und zugleich rechtwinklig zu der dem Punkte L fernſten Kegelſeite denkbare Ebene in Betracht, ſtellt ihren Schnitt mit dem Kegel geometriſch dar, beſtimmt darin den reflectirenden Punkt, conſtruirt deſſen Perſpective, und behandelt die durch dieſe Perſpective gehende Kegelſeite als reflectirende Linie.

Da die Kegelſeiten, der Fig. 183 nach, ſich um 57° aus der Grundebene erheben, muß die vorher gedachte Ebene ſich um 33° unter letztere neigen, und da die Ebene dieſes Neigungswinkels, wie aus der Lage des Punktes L zu der ihm fernſten Kegelſeite R U in Fig. 182 erſichtlich iſt, parallel der Verticalebene iſt, ſo wird in der Conſtruction in dem Diſtanzpunkte D an den Horizont unterhalb der Winkel von 33° angetragen und die Verticale dadurch im Punkte x geſchnitten, wonach eine durch x und L gezogene Linie die Grenzlinie (H^1 Hauptpunkt, O^1 herabgeſchlagener Geſichtspunkt) der gedachten Ebene ſein muß. Um den elliptiſchen Schnitt dieſer Ebene mit dem Kegel, wovon in Fig. 184 (Taf. 27) ein ausreichendes Stück vorliegt, vermittelſt durch den Punkt a der Kegelachſe gehender Sehnen geometriſch darſtellen zu können, dient wieder eine beſondere Hülfsconſtruction, Fig. 183, wie in dem Beiſpiele 59, und iſt auch hier, wie dort, wenigſtens eine durch einen angenommenen Hülfspunkt T gehende Ellipſenſehne mit verwendet worden. Nachdem darauf in Fig. 184 auf dem Umfange der Ellipſe in 1° der reflectirende Punkt ermittelt worden, wird deſſen Perſpective 1° in der Grenzlinie x L in Fig. 181 dadurch beſtimmt, daß man den Winkel $a O^1 1^\circ$ der Fig. 184 in jener Figur an $a O^1$ in O^1 anträgt und x L dadurch in 1° ſchneidet.

1° iſt nunmehr ein Punkt der reflectirenden Curve, in welcher die perſpectiviſche Höhe des eigentlichen Bildes von L zu ſuchen iſt. Da dieſe Curve jedoch nur wenig verſchieden von der geraden Linie iſt, ſo iſt der Fehler nicht bedeutend, wenn man ſie als mit der geraden Kegelſeite $r r^1$

zuſammenfallend auffaßt. Demgemäß iſt, wie in dem Beiſpiele 59, in einer beſondern Hülfsconſtruction, Fig. 185 (Taf. 27), $r r^1$ als reflectirende Seite des Kegels darzuſtellen; in derſelben iſt 1° vermittelſt des ihm gleich hoch in der Achſe gelegenen und aus Fig. 181 entnehmbaren Punktes 4 zu bezeichnen; der Lichtpunkt L und das Auge O ſind in der ihnen zukommenden Höhe und in ihrem normalen Abſtande von der Kegelſeite $r r^1$ wieder dadurch zu beſtimmen, daß man, 1° als Mittelpunkt genommen, zwei Kreisbögen mit den aus Fig. 184 entnehmbaren Radien $1^\circ L$ und $1^\circ O^1$ ſchlägt und dieſelben durch andere Kreisbögen, wozu die Kegelſpitze r der Mittelpunkt iſt und die aus Fig. 183 entnehmbaren Längen r L und r O die Radien ſind, in L und O ſchneidet. Behandelt man darauf L als Object, O als Auge, und $r r^1$ als einem ebenen Spiegel angehörig, ſo ergiebt ſich l als der mit dem ſcheinbaren Bilde (l) perſpectiviſch zuſammenfallende reflectirende Punkt. Schneidet man endlich die Kegelachſe vermittelſt einer Horizontalen 1 3 in 3, überträgt die Länge r 3 geometriſch nach Fig. 181 in r 3, und ſchneidet hier die Kegelſeite $r r^1$ durch die perſpectiviſch horizontale Linie 3λ im Punkte l, ſo iſt dieſer die Perſpective des Spiegelbildes von L. —

§. 588. Nachdem in den letzten Kapiteln auch die ſchwierigeren der bei der perſpectiviſchen Conſtruction vorkommenden Fälle Berückſichtigung gefunden, mahnen vollends die in dieſen Kapiteln enthaltenen Beiſpiele 59 und 62, in welchen, bei der Unausführbarkeit conſtructiver Manipulationen mit nicht je in einer Ebene liegenden krummen Linien, das Gutdünken zu Hülfe kommen mußte, und die große Umſtändlichkeit des Verfahrens dabei überhaupt daran, daß mit dieſen Beiſpielen die Grenze zwiſchen der bildlichen Conſtruction und der Berechnung erreicht und damit die dem Titel dieſer Blätter entſprechende Aufgabe wohl erſchöpft iſt. —

Zum Schluſſe folge eine insbeſondere wohl Jüngern der Malerei willkommene Erörterung.

Dreißigſtes Kapitel.

Anleitung zur Berichtigung der Perſpective in einer Skizze und zur Verwendung der letzteren bei der Conſtruction der Perſpective im ausgeführten Bilde ſelbſt.

§. 589. Die Vorarbeiten zu einer, menſchliche Figuren enthaltenden, bildlichen Darſtellung beſtehen gewöhnlich in einer Skizze und dem

Carton. Erstere pflegt das in der Vorstellung des Künstlers hinsichtlich der Handlung, der Gruppirung und der Farbe vollständig vorhandene Bild in kleinem Maßstabe wiederzugeben. Der Carton dient, als Uebergangsstufe zu dem ausgeführten Bilde selbst, zur Feststellung der Umrisse und der Beleuchtung und ist gewöhnlich in einem dem ausgeführten Bilde gleichen Maßstabe einfarbig ausgeführt.

Da das Gelingen eines Bildes zum großen Theile auf einer geschmackvollen Anordnung bei dem perspectivischen Projiciren der Haupt- und Nebenfiguren auf dunklen, hellen, intensiv-farbigen oder farblosen Hintergründen mitberuht, muß es dem Darsteller darauf ankommen, die in dieser Beziehung in der Skizze niedergelegte Idee auch in dem Bilde selbst durchzuführen und die Ergebnisse der linearperspectivischen Construction mit der Skizze möglichst in Einklang zu bringen.

Als Anhalt bei dieser Erörterung möge Fig. 186 (Taf. 28) dienen, welche ein von dem Verfasser früher ausgeführtes Gemälde zunächst in der Bedeutung als Skizze vorführt. Dasselbe stellt dar den großen Kurfürsten, Friedrich Wilhelm (W), zwei Tage vor seinem Tode Abschied nehmend von seinem Sohne (K), dem nachmaligen Könige Friedrich I., und von dem Geheimen Rathe, bestehend aus den sechs Personen: von Reetz (R), Marschall von Schomberg (M), von Grumbkow (G), von Fuchs (F), von Schwerin (S) und von Knyphausen (C). Bekannt sind die Porträts aller Personen; von dem Kurfürsten, dem Kurprinzen und dem Marschall von Schomberg auch die Körpergrößen. Für die anderen Personen müssen dieselben aus dem Eindrucke ihrer vorfindlichen Porträts gefolgert werden. Die Räumlichkeit, in welcher die Handlung verging, ist nicht mehr vorhanden und mußte componirt werden. Die Skizze bietet ein Bild von ihr, wie es der Darsteller sich dachte, indem er die einzelnen Stücke aus dem Inhalte des Berliner Schlosses entlehnte. Es schien denselben wünschenswerth, die Hauptfiguren, W und K, hell zu beleuchten, und zwar die Figur des Kurprinzen, welcher einen hellblauen Rock trägt, hell von einem dunklen, farblosen Hintergrunde, dem Getäfel der Wand, abzusetzen; hingegen die Figur

des Kurfürſten, welcher einen ſchwarzen Rock trägt, zumeiſt dunkel theils auf dem halbdunklen rothen Schirme, theils auf den weißen Betten im Stuhle zu projiciren. Die Figur C, in graugelbem Rocke, ſollte ſich ebenfalls hell von dem Schirme, die Figuren G, M und F ſollten ſich mit ihren beleuchteten Theilen hell von dem im Hintergrunde befindlichen trübfarbigen Fenſter, mit ihren Schattenſeiten dunkel davon abſetzen; die Figur R ſollte ſich halbdunkel auf der ziemlich farbloſen dunklen Fenſterwand projiciren. Es ſchien günſtig, daß von dem Kamine wenigſtens ſo viel, wie die Skizze zeigt, ſichtbar ſei, und daß die Figur K durchaus nicht die linke Höhenkante deſſelben verdecke. —

Will man nun derartige künſtleriſche Geſchmacksforderungen zur Geltung bringen, und man nimmt die eben angeführten für das vorliegende Beiſpiel als gegeben an, ſo iſt deren Vereinbarung mit der linearperſpectiviſchen Conſtruction zu ſichern, wenn man folgendermaßen verfährt:

Schon bei der Anfertigung der Skizze iſt darauf zu ſehen, daß die Fußpunkte der lothrecht ſtehenden Objecte, der Möbel, und die Standpunkte *) der menſchlichen Figuren je nach ihrer beabſichtigten größeren oder geringeren Entfernung vom Beſchauer, d. h. alſo in ihrer horizontalen Lage zu einander, mit vollem Bedacht angeordnet werden. Es erleichtert dies die unumgänglich nothwendige Anfertigung des geometriſchen Grundriſſes zu dem Bilde, in welchem vorzuſehen iſt, daß jede Figur auch wirklich den ihr zukommenden Raum habe; daß beſonders, wo wie hier die Figuren gedrängt ſtehen, nicht Theile der einen in die Körper der anderen oder in Möbel hineinragen; daß die menſchlichen Figuren nicht unmöglich große Schritte machen, und auch inwieweit dieſelben en profil oder en face zu ſehen ſind u. dergl. mehr.

Der Anfertigung des Grundriſſes geht die Feſtſtellung des Fußmaßſtabes und des Horizontes der Skizze voran. Den

*) Standlinie möge hier eine durch die Halsgrube der betreffenden menſchlichen Figur angenommene, von deren Scheitel bis zum Fußboden reichende lothrechte Linie, Standpunkt der Fußpunkt dieſer Linie auf dem Fußboden heißen.

erſteren findet man, wenn man die Standlinie einer ihrer Körpergröße nach bekannten menſchlichen Figur, hier etwa die der Figur K, welche mit Perrüke und Stiefelabſatz 66 Zoll hoch iſt, in 66 Theile theilt und deren je 3 ſeitlich neben der Skizze mehrfach auf die durch den Standpunkt K gezogene Horizontale aufträgt. Zieht man dann, wie es in figürlichen Darſtellungen üblich iſt, in der Höhe der Augen eines ſitzenden Menſchen, d. i. 49 Zoll über dem Fußboden, alſo hier über dem Standpunkte K, den Horizont, und zieht ferner von einem darin ſeitlich neben der Skizze beliebig angenommenen Punkte V Linien durch die Theilungspunkte der durch K horizontal gezogenen Linie, ſo ſchneiden dieſe auf der verlängerten Grundlinie der Skizze das ihr entſprechende 3 Zoll-Maß mehrmals ab. Der Raumerſparniß wegen iſt daſſelbe in dem in Fig. 187 (Taf. 28) vorliegenden Grundriſſe auf $^1/_3$ reducirt worden.

Nach dieſer Vorbereitung iſt der Grundriß in Angriff zu nehmen. Man ordnet darin zunächſt die wichtigeren Theile des Zimmers an, die Ecke deſſelben, den Kamin, den Stuhl der Figur W und deren Standpunkt W in der beabſichtigten Nähe zum Kamin, das Tiſchchen neben dem Stuhle, den Standpunkt der Figur K; danach das weniger wichtige Geräthe, wie etwa den Bücherſchrank im Hintergrunde u. ſ. w. Die Anordnung des als Hintergrund dienenden Fenſters und des Seſſionstiſches, auf welchen die Figur M die Hand ſtützt, ſo wie des Stuhles links im Vordergrunde iſt erſt nach Feſtſtellung der Standpunkte der übrigen Perſonen rathſam.

Dieſe werden nun unter möglichſt feſtem Anhalt an die Skizze, jedoch ſo angeordnet, daß man jeder Figur den ihr in ihrer beſondern Körperſtellung zukommenden Raum, allenfalls durch vorhergehende Meſſungen am lebenden Modelle ſichert. Es iſt dabei, vollends wenn die Figuren gedrängt ſtehen, ſehr zu empfehlen, den jeder einzelnen zukommenden Raum in dem Grundriſſe je durch ein Rechteck von mindeſtens $1^1/_2$ Fuß Länge (der Schulterbreite) und von mindeſtens $^3/_4$ Fuß Breite (der Bruſtkaſtentiefe eines Menſchen), wie ein ſolches um den Standpunkt K vorliegt, zu bezeichnen, da hierdurch außer dem jeder Figur zukommenden Raume zugleich am zuverläſſigſten feſtgeſtellt wird, in welcher Anſicht, ob ganz oder halb,

en profil oder en face die betreffende Figur im Bilde ſelbſt darzuſtellen iſt. Bei dieſer Art der Anordnung kann man auch durch Geſichtslinien, welche man durch den Grundriß nach der einſtweilen nach Gutdünken anzunehmenden Projection des Geſichtspunktes zieht, und nach deren Anleitung man die Orte der Perſonen und der Möbel durch Rücken und Probiren überhaupt abwägt, die Durchführung der in der Skizze hinſichtlich des Projicirens auf dem gewünſchten Hintergrunde niedergelegten Idee am beſten ſichern.

Vor welchen Fehlern unter anderen der Grundriß bewahren ſoll, deutet das den Grundriß des Stuhles links im Vordergrunde vorſtellende punktirte Quadrat an. Es läßt erkennen, daß hier der projectirte Stuhl, des Tiſchfußes wegen, nicht ſtehen kann, vielmehr ſo weit, wie das voll ausgezogene Quadrat angiebt, vorgerückt werden muß. In Fig. 188 iſt derſelbe Fehler perſpectiviſch vorgeführt.

Nach Anfertigung des Grundriſſes ſind für die perſpectiviſche Conſtruction die Diſtanz und der Ort des Geſichtspunktes dadurch feſtzuſtellen, daß man im Grundriſſe an der Fenſterwand und an der Kaminwand die Punkte b und c, bis zu welchen dieſe Wände, der Skizze nach, geſehen werden und welche demnach den ſeitlichen Grenzen der letzteren entſprechen, bezeichnet. Nimmt man alsdann, was für ein Intérieur, wie das vorliegende Bild iſt, ausreichend erſcheint, die Länge b c als Grundlage für die Diſtanzbeſtimmung, und macht demgemäß die im Halbirungspunkte d der b c errichtete Normale d e gleich 1½ mal b c, ſo iſt nach §. 25 jeder Punkt der Peripherie des durch die drei Punkte b, c und e, alſo um h als Mittelpunkt zu conſtruirenden Kreiſes ſo gelegen, daß Geſichtslinien, von ihm nach b und c gezogen, ſtets ein nur 37° großes Geſichtsfeld einſchließen, wie dies §. 23 für die Richtigkeit der Diſtanz bedingt.

Um nun den in der Skizze vorliegenden Dispoſitionen treu zu bleiben, zieht man, da dort die Standlinie der Perſon R dicht neben der linken lothrechten Kante des Fenſtergewändes liegt, im Grundriſſe durch Punkt R eine (Geſichts-) Linie, welche die Fenſterwand dicht neben der Projection jener Kante und demnach den

Kreisbogen andererseits in o^1 schneidet. Man zieht ferner, da der Skizze nach die Standlinie der Person G zwischen dem Fensterkreuze und der rechten Fensterecke liegen soll, im Grundrisse eine (Gesichts-) Linie, welche das Fenster zwischen dem Kreuze und der rechten Ecke und demnach andererseits den Kreisbogen in dem Punkte o^2 schneidet. Man zieht endlich, da nach der Skizze die Standlinie der Person K zwischen der rechten lothrechten Kante des Bücherschrankes und der linken lothrechten Kante des Kamines liegen soll, im Grundrisse eine (Gesichts-) Linie durch K, welche zwischen den Projectionen jener Kanten hindurchgeht und demnach andererseits den Kreisbogen in dem Punkte o^3 schneidet, u. s. f. Fielen nun die Schnittpunkte dieser Gesichtslinien mit einander und mit dem Kreisbogen zu weit auseinander, so müßte man entweder den mittleren ihrer Schnittpunkte mit dem Kreisbogen als Gesichtspunkt annehmen, oder sich für einen ihrer Schnittpunkte mit einander entscheiden und eine Abweichung von der Skizze hinnehmen. Im vorliegenden Beispiele aber schneiden sich, weil dasselbe sich auf ein ausgeführtes Bild stützt, die drei Gesichtslinien in Einem Punkte O, welcher dem Kreisbogen so nahe liegt, daß man ihn ohne erheblichen Fehler wohl als Gesichtspunkt annehmen darf.

Die in der Skizze vorher durch den Standpunkt K gezogene horizontale Linie geht dort dicht hinter dem Standpunkte R vorbei. Zieht man daher im Grundrisse durch K eine Linie, welche dicht hinter R vorbeigeht, so bezeichnet diese offenbar die Richtung der Bildebene. Ginge diese Linie zufällig noch durch einen Punkt, welcher die Projection einer zur Auftragung der Höhenmaße geeigneten lothrechten Linie oder Kante (Hauptkante, §. 170) wäre, so würde sie ohne Weiteres auch als Ort der Bildebene anzunehmen sein; da jedoch die dicht vor dem Stuhle links angenommene Grundlinie der Skizze verlängert die Kaminwand in nicht zu großer Entfernung treffen muß, und die Auftragung der Höhenmaße auf einer im Schnittpunkte U beider stehenden lothrechten Linie bequem ist, so empfiehlt es sich, die Grundlinie der Skizze beizubehalten, dieselbe im Grundrisse in einer Linie $T T^1$ darzustellen, welche dicht vor dem Stuhle links vorbeigeht und jener durch K gezogenen parallel ist, und

dieſe auch für die Conſtruction als Ort der Bildebene, und zwar als deren Grundlinie anzunehmen.

Eine von O auf dieſe Grundlinie T T¹ gefällte Normale trifft dieſelbe im Punkte P, der Projection des Hauptpunktes der Conſtruction. Mißt man nun die Diſtanz O P, ſo ergiebt ſich das Maß von 10½ Fuß, welches, da O nicht genau in der Peripherie des Kreisbogens angenommen wurde, zwar nur gleich 1/3 der Bildbreite A Q und nicht, wie es ſtreng genommen erforderlich wäre, 1½ mal A Q iſt, jedoch wenigſtens gleich iſt der Diagonale der in dreifachem Maßſtabe des Grundriſſes vorliegenden Skizze — eine für ein Intérieur keineswegs fehlerhafte Diſtanz.

Nachdem nun noch im Grundriſſe die von der Anordnung der Figuren abhängigen Objecte, beiſpielsweiſe der Schirm hinter der Figur W, unter Anwendung von Geſichtslinien wie oben bei Ermittelung des Geſichtspunktes ſo angeordnet worden, daß ſich die Figur W auf ihm projiciren muß; nachdem ferner das Muſter des aus verſchiedenen Hölzern zuſammengeſetzten Fußbodens ſo angeordnet worden, daß es die große Fläche deſſelben intereſſanter macht, ohne architektoniſch unwahrſcheinlich zu ſein, u. dgl. m., ſo kann zur perſpectiviſchen Conſtruction geſchritten werden. Einige im Grundriſſe gezogenen Linien O A und O (Z) bedeuten die Parallelſtrahlen für die Fenſter- und die Kaminwand (A iſt der Verſchwindungspunkt für die horizontalen Kanten des Kamins); O (Y) und O (X) bedeuten die Parallelſtrahlen für die horizontalen Kanten der Stühle u. ſ. w.

Es hängt nun von den für das ausgeführte Bild beabſichtigten Dimenſionen ab, ob die Conſtruction in dem Maßſtabe des Bildes ſelbſt oder in kleinerem Maßſtabe zu unternehmen iſt. Wegen der meiſt zu großen Entfernung einzelner Verſchwindungspunkte und der großen Umſtändlichkeit von Hülfsconſtructionen iſt es ſtets räthlich, daß die Conſtruction zunächſt in kleinerem Maßſtabe ausgeführt und danach auf eine angemeſſene Weiſe, allenfalls vermittelſt Quadrate, vergrößert auf die Bildfläche ſelbſt übertragen werde.

In Fig. 188 (Taf. 28) liegt die Conſtruction in dreifachem Maßſtabe des Grundriſſes, d. i. in dem der Skizze, vor. Statt der ganzen

Diſtanz iſt darin die aus dem Grundriſſe entnehmbare $^1/_3$-Diſtanz angewendet. Nach den Perſpectiven der wichtigeren Theile des Zimmers und des Ameublements ſind dem Grundriſſe gemäß die Standpunkte der Perſonen, und unter Anwendung des perſpectiviſchen Maßſtabes die perſpectiviſchen Höhen der Standlinien derſelben je nach deren bekannten oder angenommenen Körpergrößen conſtruirt worden. —

Hinſichtlich der Beleuchtung der Geräthe und der Perſonen bedarf es keiner beſonderen Anleitung, da dieſelbe theils nach den betreffenden Orts gegebenen Regeln zu conſtruiren, theils nach dem lebenden Modell darzuſtellen iſt. —

In Bezug auf die Arbeiten nach dem lebenden Modell iſt daran zu erinnern, daß der Darſteller das letztere ſtets der im Grundriſſe vorzuſehenden Lichtöffnung gemäß ſtellen, ſich alſo hüten muß, die einzelnen Modelle zu den verſchiedenen Perſonen in ſeinem Arbeitsraume ſtets an derſelben Stelle aufzuſtellen, da ſich doch im Bilde jedes Object zu der Lichtöffnung in einer anderen räumlichen Beziehung befindet. Auch muß der Darſteller dabei ſelbſt zu jedem Modelle den ſich aus dem Grundriſſe ergebenden Abſtand und die für das Bild überhaupt angenommene Höhe des Auges einhalten, damit die Perſpective in den figürlichen Theilen des Bildes nicht mit der Perſpective des Zimmergeräthes in Widerſpruch ſtehe.

In Bezug auf die Beleuchtung, namentlich der im Halbdunkel befindlichen Objecte, wird der Geſchmack des Künſtlers manches fordern, was auf den erſten Blick als eine Abweichung von der Strenge der Conſtruction erſcheinen könnte; es bedarf aber wohl keiner beſonderen Erörterung, daß optiſche Unmöglichkeiten unter keinen Umſtänden zuläſſig ſind und daß alle die techniſchen Momente, welche in einer bildlichen Darſtellung zu einer naturwahren Wirkung derſelben beitragen, dabei aber nicht ſelten für nothwendige Freizügigkeiten im Intereſſe der „Stimmung“ des Bildes gehalten werden, ſämmtlich auf der, häufig unbewußten, Befolgung der Geſetze der Luftperſpective, der Optik, beruhen.

Tabelle

der

Winkel-Tangenten.

Winkelgrade.	Tangente.	Winkelgrade.	Tangente.	Winkelgrade.	Tangente.
½	0,0087	15½	0,2773	30½	0,5890
1	0,01745	16	0,2867	31	0,6009
1½	0,0262	16½	0,2962	31½	0,6128
2	0,03492	17	0,3057	32	0,6249
2½	0,0437	17½	0,3153	32½	0,6371
3	0,0524	18	0,3249	33	0,6494
3½	0,0612	18½	0,3346	33½	0,6619
4	0,0699	19	0,3443	34	0,6745
4½	0,0787	19½	0,3541	34½	0,6873
5	0,0875	20	0,3640	35	0,7002
5½	0,0963	20½	0,3739	35½	0,7113
6	0,1051	21	0,3839	36	0,7265
6½	0,1139	21½	0,3939	36½	0,7400
7	0,1228	22	0,4040	37	0,7536
7½	0,1316	22½	0,4142	37½	0,7673
8	0,1405	23	0,4245	38	0,7813
8½	0,1495	23½	0,4348	38½	0,7954
9	0,1584	24	0,4452	39	0,8098
9½	0,1673	24½	0,4557	39½	0,8243
10	0,1763	25	0,4663	40	0,8391
10½	0,1853	25½	0,4770	40½	0,8541
11	0,1944	26	0,4877	41	0,8693
11½	0,2035	26½	0,4986	41½	0,8847
12	0,2126	27	0,5095	42	0,9004
12½	0,2217	27½	0,5206	42½	0,9163
13	0,2309	28	0,5317	43	0,9325
13½	0,2401	28½	0,5430	43½	0,9490
14	0,2493	29	0,5543	44	0,9657
14½	0,2586	29½	0,5658	44½	0,9827
15	0,2679	30	0,5774	45	1

Winkelgrade.	Tangente.	Winkelgrade.	Tangente.	Winkelgrade.	Tangente.
45½	1,0176	60½	1,7675	75½	3,8667
46	1,0355	61	1,8040	76	4,0108
46½	1,0538	61½	1,8418	76½	4,1653
47	1,0724	62	1,8807	77	4,3315
47½	1,0913	62½	1,9210	77½	4,5107
48	1,1106	63	1,9626	78	4,7046
48½	1,1303	63½	2,0057	78½	4,9152
49	1,1504	64	2,0503	79	5,1446
49½	1,1708	64½	2,0965	79½	5,3955
50	1,1918	65	2,1445	80	5,6713
50½	1,2131	65½	2,1943	80½	5,9757
51	1,2349	66	2,2460	81	6,3137
51½	1,2572	66½	2,2998	81½	6,6911
52	1,2799	67	2,3559	82	7,1154
52½	1,3032	67½	2,4142	82½	7,5958
53	1,3270	68	2,4750	83	8,1443
53½	1,3514	68½	2,5386	83½	8,7769
54	1,3764	69	2,6051	84	9,5144
54½	1,4019	69½	2,6746	84½	10,3854
55	1,4281	70	2,7474	85	11,4301
55½	1,4550	70½	2,8239	85½	12,7062
56	1,4825	71	2,9042	86	14,3007
56½	1,5108	71½	2,9887	86½	16,3499
57	1,5399	72	3,0776	87	19,0811
57½	1,5697	72½	3,1716	87½	22,9038
58	1,6003	73	3,2709	88	28,6367
58½	1,6319	73½	3,3759	88½	38,1884
59	1,6643	74	3,4874	89	57,2900
59½	1,6977	74½	3,6059	89½	114,5887.
60	1,7321	75	3,7321		

Register zur ersten Abtheilung.

Abendröthe §. 60.
Ablenkungswinkel §. 33.
Achromatische Linsen und Prismen §. 55.
Achse der Linse §. 38.
Aderhaut §. 87.
Aether §. 2.
Auge §. 86.
Augenachse §. 92.
Augenachsen-Winkel §. 125.
Ausfallstrahl §. 11.

Beugung des Lichtes §. 70.
Blendung §. 105.
Brechende Kante am Prisma §. 36.
Brechender Winkel am Prisma §. 36.
Brechung des Lichtes §. 32.
Brechungsexponent §. 34.
Brechungsvermögen §. 55.
Brechungswinkel §. 33.
Brennpunkt, Brennweite der Linse §. 40.
Brillen §. 95.

Camera lucida §. 45.
Camera obscura §. 81.
Complementäre Farben §. 52.

Dispersion §. 49.
Durchsichtige Körper §. 3.
Dunkle Körper §. 3.

Einfallsloth §. 11.
Einfallswinkel §. 11.
Einrichtungsvermögen §. 89.

Farbe §. 47.
Farbe der Luft §. 64.
Farben dünner Schichten §. 74.
Farbenkreisel §. 113.
Farbenzerstreuung §. 49.
Farbestoffe §. 64.
Farbige Nachbilder §. 108.
Farbige Ränder §. 54.
Farbige Schatten §. 109.
Fata Morgana §. 42.
Fernrohr §. 104.
Fraunhofer'sche Linien §. 56.
Fußpunkt des Lichtes §. 8.

Gesichtslinie §. 99.
Gesichtswinkel §. 99.
Glanz §. 24.
Glasfeuchtigkeit §. 87.
Glaskörper §. 87.
Glaslinsen §. 38.

Hauptfarben §. 50.
Hauptstrahl §. 8.
Höchstes Licht §. 9.
Hornhaut §. 87.

Inflexion §. 70.
Innere Reflexion §. 43.
Interferenz §. 69.
Iris §. 87.
Irradiation §. 107.

Kreuzungspunkt im Auge §. 98.
Krümmungs-Mittelpunkt der Linse §. 38.
Krystalllinse §. 87.

Licht §. 2.
Lichtäther §. 2.
Lichtstrahl §. 3. 47.
Luftspiegelung §. 42.
Lupe §. 97. 104.

Medium §. 32.
Mikroskop §. 104.
Mittel §. 32.
Morgenröthe §. 60.

Nachbilder §. 105. 108.
Netzhaut §. 87.
Netzhautbild §. 90.
Newton'sche Farbenringe §. 75.

Objectives Bild §. 39.
Optischer Mittelpunkt der Linse §. 38.

Physiologische Farben §. 108.
Physisches Bild §. 90.
Pigmente §. 64.
Polarisation §. 77.
Prismatische Farben §. 48.
Pupille §. 87.

Randstrahlen §. 39.
Reflectirender Punkt §. 11.
Reflectirter Strahl §. 11.
Reflexion §. 11.
Reflexion, innere oder totale §. 43.
» » regelmäßige §. 13.
» » unregelmäßige §. 26.
Refraction §. 32.
Regenbogen §. 57.
Regenbogenhaut §. 87.
Retina §. 87.

Sammellinsen §. 95.
Schatten §. 4.
Scheinbares Bild §. 90.
Schirmbild §. 18.
Schlagschatten §. 4.
Schwingungsgeschwindigkeit des Lichtes §. 49.
Sehloch §. 87.
Sehnerv §. 87.
Sehweite §. 96.
Selbstleuchtende Körper §. 3.
Spectrum §. 48.
Spiegel §. 13.
Stereoskop §. 119.
Strahlenkörper §. 87.
Streiflicht §. 8.
Subjective Farben §. 108.
Subjectives Spiegelbild §. 18.

Totale Reflexion §. 43.

Undurchsichtige Körper §. 3.

Wässerige Feuchtigkeit des Auges §. 87.
Wellenlängen des Lichtes §. 49.

Zerstreuungskreise §. 94.
Zerstreuungslinsen §. 95.
Zerstreuungsvermögen §. 55.

Register zur zweiten Abtheilung.

Abstand des Gesichtspunktes §. 18.
Alhazenisches Problem §. 546.

Berührungspunkte der Tangenten an Kegelschnitten §. 231. 476.
Bildebene §. 14.
Bildfläche §. 7 fg.
Brennlinie, -Spiegel, -Weite §. 575.
Brennpunkt §. 548. 575.

Correspondirende Verschwindungspunkte §. 57.
Cylinder-Perspective §. 232. 233. 268.
» » auf schiefen Ebenen §. 315 bis 318.
Cylinder-Schatten §. 422. 424. 429. 430. 448. 453. 463. 467. 476. 477.
Cylinder-Schnitte s. Schnitte.
» » -Spiegelbild §. 540.
Cylindrischer Spiegel §. 560 bis 568. 584. 585.

Diagonalpunkt §. 150.
Distanz §. 18.
Distanzpunkt §. 34.
Durchschnittsfiguren s. Schnitte.

Fußpunkt des Lichtes §. 402.
» » der Sonne §. 433.

Gedrehte Verticale §. 74.
Gehrungen §. 174. 176. 177. 258. 271.
Gehrungsebene, -Linie §. 174.
Gesichtsfeld §. 18.
Gesichtspunkt §. 2. 17. 34.
Gesims-Perspective §. 173 bis 177. 258.
» » -Schatten §. 474.
Gewölbe §. 260 bis 263.
» » -Schatten §. 429. 430.
Glanz, Glanzlichter §. 543.
Gratbogen §. 259 bis 263.
Grenzlinie §. 65.
Grundebene §. 33. 34.
Grundlinie §. 34. 64.
Grundpunkt §. 34.
Grundrißmethode §. 45.
Gurtbogen §. 259 bis 262.

Halbschatten §. 389.
Hauptgesichtslinie §. 24.
Hauptkante §. 170.
Hauptpunkt §. 34.
Herabgeschlagener Gesichtspunkt §. 34.
Höchstes Licht §. 389.
Höhe des Auges §. 17.
Höhenmaßstab, perspectivischer §. 158. 187. 193.
Horizont §. 34.
» » -Ebene §. 34.
Horizontale Grenzlinie §. 34.
Hülfs-Bildebene §. 14. 273.
» -Grundebene §. 168.
» -Grundriß, perspectivischer §. 168.

Kappen s. Gewölbe, Grat- und Gurtbogen.
Katakaustische Linie §. 575.
Kegel-Perspective §. 231. 321.
» -Schatten §. 423. 450. 451. 454. 455. 464. 468. 571.
» -Schnitte s. Schnitte.
» -Spiegel §. 569 bis 571. 586. 587.
» -Spiegelbild §. 539.
Kernschatten §. 389.
Kreis-Perspective §. 218 bis 229. 233. 310.
Kreis-Theilung, perspectivische §. 267.
Kugel-Perspective §. 237 bis 245. 351 bis 359.
Kugel-Pol §. 243. 359. 425. 470.
» -Schatten §. 425. 428. 449. 470.
Kugel-Schnitte s. Schnitte.
» -Spiegel §. 556 bis 559. 582. 583.

Längen-Maßstab, perspectivischer §. 84.
Lichtachse §. 402. 433.
Lichtebene §. 399.
Licht-Fußpunkt §. 402.
Lichtpol der Kugel §. 425. 428. 470.

Maßlinie §. 92.
Maßstab, perspectivischer Höhen- §. 158. 187. 193.
Maßstab, perspectivischer Längen- §. 84.
» » Vergrößerungs- §. 164.
Meridianlinien §. 247 bis 249.

Nischenschatten §. 452. 479.

Objectives Spiegelbild §. 575. 578.
Objectschatten §. 388.

Parabel-Spiegel §. 575.
Parallelität §. 47.
Parallelstrahl §. 52.
Perspective, perspectivisches Bild §. 5.
Pole der Kugel §. 243. 359. 425. 470.

Reflectirende Linie §. 514.
Reflectirender Punkt §. 510. 545 bis 547.
Reflectirtes Licht §. 396.
Reflexe §. 396 fg.

Schirmbild §. 550.
Schlagschatten §. 388.
Schnitte zwischen schiefen Ebenen §. 309. 322 bis 339.
» » zwischen Ebenen und Cylindern §. 342. 344.
» » zwischen Ebenen und Kegeln §. 254 bis 256. 343. 345.
» » zwischen Ebenen und Kugeln §. 243 bis 246. 348 bis 350.
» » zwischen Ebenen und anderen krummen Flächen §. 250 bis 253. 340.
» » zwischen krummen Flächen §. 257 bis 263. 268.
Sonnen-Fußpunkt §. 433.
Standebene, -Linie, -Punkt §. 34.
Subjectives Spiegelbild §. 548.

Tangenten an Kegelſchnitten §. 231. 476.
Theilpunkt §. 90.
Theilung auf krummen Linien §. 269.

Vergrößerungs-Maßſtab §. 164.
Verſchwindungslinie §. 65.
Verſchwindungspunkt §. 46.
Verſchwindungspunkt, correſpondirender §. 57.
» » » -Methode §. 45.
Verticale §. 34.
» » gedrehte §. 74.
Verticalebene §. 33.
» » -Linie §. 34.

Berichtigungen.

Seite 179, Zeile 5 v. u., ſtatt: (y), lies: y
» 180, » 14 v. u., ſind die Worte: „außerhalb der Figur liegenden" zu ſtreichen.
» 181, » 18 v. o., ſt.: φ^1, c u. ſ. w., L.: φ^1, c^1 u. ſ. w.
» 185, » 8 v. o., iſt hinter y einzuſchalten: und s
» 189, » 13 v. o., ſt.: A, L.: P
» 194, » 5 v. o., ſt.: über, L.: unter
» 238, » 2 v. u., ſt.: P, L.: T
» 255, » 6 v. o., iſt hinter Δ (c) ein Kommo zu ſetzen.
» 278, » 9 u. 10 v. o., ſt.: H^1, L.: P
» 278, » 9 u. 12 v. o., ſt.: w x, L.: dem Horizonte
» 278, » 13 v. o., ſt.: der w x, L.: dem Horizonte
» 283, » 19 v. o., ſt.: um, L.: in
» 291, » 9 v. o., ſt.: 3, L.: 1^b
» 302, » 15 v. u., ſt.: (r), l.: (r^1)
» 310, » 5 v. u., ſt.: A C, l.: A und C
» 323, » 13 v. u., ſt.: g, l.: (g)
» 328, » 12 v. o., ſt.: $S^1 s$, l.: Ss
» 331, » 7 v. o., ſt.: sc, L.: st
» 333, » 15 u. 16 v. u., ſt.: deren Peripherie, L.: dieſer ſelbſt
» 356, » 8 v. o., ſt.: C L, l.: C N
» 393, » 15 v. o., ſt.: 26, L.: 25

00563750

Druck von F. A. Brockhaus in Leipzig.

Digitized by Google